Übungen zu Einführung in die Teilchenphysik
Wintersemester 2017/18

1. Welche Geschwindigkeit hat ein α-Teilchen mit einer kinetischen Energie von 5 MeV?

2. In Zentrum der Sonne herrscht eine Temperatur von 15×10^6 K. Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit von Elektronen?
   Hinweis: Berechnen Sie $\sqrt{\overline{v^2}}$, die Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat.

3. Leiten Sie die Formel für v/v_0 her, die bei die elastischen Neutron-Kernstreuung verwendet wurde (Bestimmung der Masse des Neutrons durch Chadwick).

4. Betrachten Sie die Zerfallsreihe $A \to B \to C$ mit Lebensdauern τ_A and τ_B; C sei stabil. $N_A(t)$ sei die Anzahl der Atome der Sorte A, etc. Die Anfangsbedingung sei $N_A(0) > 0$, $N_B(0) = N_C(0) = 0$. Berechnen Sie $N_{A,B,C}(t)$. Beantworten Sie weiters mit Hilfe dieser Lösung folgende Frage. Angenommen, es sei $\tau_A \gg \tau_B$ und $t \gg \tau_B$. Wie groß ist dann näherungsweise $N_B(t)/N_A(t)$?

5. Berechnen Sie für ein Myon mit Energie $E > mc^2$ (m ist die Masse des Myons) die mittlere Wegstrecke $\bar{x}$ zwischen Produktion und Zerfall.
   `Hinweis:` Verwenden Sie dazu die Wahrscheinlichkeitsverteilung

   $$P(x) = \frac{1}{L} e^{-x/L} \; (x > 0) \quad \text{mit} \quad L = \tau_\mu c \sqrt{\left(\frac{E}{m_\mu c^2}\right)^2 - 1}$$

   aus der VO.

6. Ein Myon bewege sich mit einer Energie von 3.094 GeV in einem Synchrotron mit 14.1 m Durchmesser (Experiment am BNL zu Bestimmung des anomalen magnetischen Moments des Myons). Wieviele Runden fliegt das Myon im Mittel, bevor es zerfällt? Wieviele Runden würde es im Mittel ohne die Berücksichtigung der Zeitdilatation fliegen?

7. Welche Energie muss ein τ-Lepton haben, damit $\bar{x} = 100\ \mu$m ist? ($m_\tau = 1777$ MeV, seine Lebensdauer 290×10^{-15} s).

8. Das Intertialsystem K' bewege sich relativ zum Intertialsystem K mit Geschwindigkeit $\vec{v}$, und K' habe zu K parallele Koordinatenachsen. In K' bewege sich ein Teilchen mit Geschwindigkeit $\vec{w}$. Welche Geschwindigkeit $\vec{u}$ des Teilchens misst ein Beobachter, der in K ruht? Die resultierende Formel für $\vec{u}$ nennt man *allgemeines Geschwindigkeitsadditionstheorem*. Wie vereinfacht sich das allgemeine Geschwindigkeitsadditionstheorem, wenn $\vec{v}$ und $\vec{w}$ parallel sind?

9. Gehen Sie vom allgemeinen Geschwindigkeitsadditionstheorem wie im vorigen Beispiel aus. Angenommen, es sei $|\vec{w}\,| = c$. Was folgt daraus für $|\vec{u}\,|$?

10. Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}_+^\uparrow$ eine Gruppe bildet.
    `Hinweis:` Es sind zwei Punkte zu zeigen.

    (a) $L^0{}_0 \geq 1 \Rightarrow \left(L^{-1}\right)^0{}_0 \geq 1$,

    (b) $L_1,\ L_2 \in \mathcal{L}_+^\uparrow \Rightarrow \left(L_1 L_2\right)^0{}_0 \geq 1$.

Ad (a): Überlegen Sie sich, dass $\left(L^{-1}\right)^0{}_0 = L^0{}_0$ gilt.

Ad (b): Verwenden Sie die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung und

$$\sum_{i=1}^{3} \left(L^i{}_0\right)^2 = \sum_{j=1}^{3} \left(L^0{}_j\right)^2 = \left(L^0{}_0\right)^2 - 1.$$

11. Führen Sie zwei Geschwindigkeitstransformationen hintereinander aus, die erste entlang der x-Achse und die zweite entlang der y-Achse. Die resultierende Transformation $L = L(w\vec{e}_y)L(v\vec{e}_x)$ ist für $vw \neq 0$ keine reine Geschwindigkeitstransformation, sondern kann geschrieben werden als $L = L(\alpha)L(\vec{u})$ mit

$$L(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$L(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \gamma_u & -\gamma_u \vec{\beta}_u^T \\ -\gamma_u \vec{\beta}_u & \mathbb{1} + \frac{\gamma_u - 1}{\beta_u^2} \vec{\beta}_u \vec{\beta}_u^T \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $L(\vec{u})$ eine reine Geschwindigkeitstransformation mit $\vec{u}$ in der xy-Ebene. Berechnen Sie $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ und $\vec{u}$ als Funktion von v und w.

12. Ein astrophysikalisches Objekt emittiere die L_α- Linie ($\lambda = 121.6$ nm) des H-Atoms und bewege sich mit Geschwindigkeit v von der Erde weg. In welchem Intervall muss die Geschwindigkeit v liegen, damit sich die L_α-Linie im sichtbaren Licht befindet? Erklären Sie, was die L_α- Linie ist.

13. Es sei $p = (E/c, \vec{p})^T$ ein 4-Impulsvector mit $p^2 = m^2c^2 > 0$ und $v = |\vec{v}\,|$ sei die Geschwindigkeit des Teilchens. Geben Sie γ, $v\gamma$ and v als Funktion von E, m and c an.

14. Ein neutrales Pion zerfällt praktisch zu 100% in zwei Photonen ($\pi^0 \to \gamma + \gamma$). Angenommen, das Pion habe die Energie E und die beiden Photonenenergien seien gleich, also $E/2$. Wie groß ist der Winkel als Funktion von E, den die beiden Photonen einschließen?

15. Angenommen, es werden zwei Photonen detektiert, die von einem Punkt (Vertex) ausgehen. Die Photonen haben Energie E_1 und E_2 und ihre Richtungen schließen einen Winkel α ein. Was ist eine notwendige Bedingung, dass die beiden Photonen von einem π^0-Zerfall stammen?

16. Ein e^+e^--Collider soll das $\Upsilon(4S)$ mit einer Masse von 10.5 GeV erzeugen. Allerdings werde der Collider asymmetrisch betrieben, also $E_+ \neq E_-$. Angenommen, man gibt die Energie E_- des Elektronstrahls vor. Wie groß muss E_+ sein? Geben Sie weiters den Impuls und die Geschwindigkeit des $\Upsilon(4S)$ an.
`Hinweis:` Die Elektronmasse kann vernachlässigt werden.

17. Zeigen Sie, dass (im Vakuum) die Prozesse $\gamma \to e^+ + e^-$ und $e^- \to e^- + \gamma$ kinematisch verboten sind.

18. Betrachten Sie den Prozess $\gamma + \mathcal{N} \to \mathcal{N} + e^+ + e^-$ (Paarerzeugung im Coulombfeld eines Atomkerns $\mathcal{N}$), wobei der Kern im Anfangszustand ruht. Berechnen Sie die untere Schranke an E_γ als Funktion von m_e und $m_\mathcal{N}$, ab der dieser Prozess kinematisch erlaubt ist.

19. Beim LEP (symmetrischer Large Electron Positron Collider) am CERN wurde der Prozess $e^+ + e^- \to Z^0$ mit $m_Z = 92.2$ GeV genau vermessen. Angenommen, man hätte dasselbe Experiment als Fixed-Target-Experiment durchgeführt mit ruhenden Elektronen. Welche Positronenergie hätte man benötigt?

20. Berechnen Sie die Mindestenergie E_0 des Elektron-Antineutrinos im inversen β-Zerfall $\bar{\nu}_e + p \to n + e^+$, wobei p ruht. Das Neutrino wird masselos angenommen. Geben Sie weiters eine einfache Näherung für E_0 an. Wie groß ist E_0 in dieser Näherung (auf zwei Stellen genau)?

21. Was ist der Wert der maximalen Energie eines Pions im Zerfall $K_L \to 3\pi^0$? Nehmen Sie das K_L-Meson mit Masse 497.6 MeV als ruhend an. Die Pionmasse ist 135.0 MeV. Berechnen Sie weiters analytisch die 4-Impulskonfiguration der Pionen für den Fall, dass ein Pion die Maximalenergie hat.

22. Betrachten Sie den β-Zerfall $(Z, A) \to (Z + 1, A) + e^- + \bar{\nu}_e$ and berechnen Sie die maximale die kinetische Energie T_f des Tochterkerns (Masse M_f) unter der Annahme, dass der Mutterkern (Masse M_i) in Ruhe ist.

23. Bei einem symmetrischen e^+e^--Collider ($E_{e^+} = E_{e^-} = E$) werde der Prozess $e^+ + e^- \to e^+ + e^- + \gamma$ beobachtet. Was ist die maximale Photonenergie? Geben Sie bei maximaler Photonenergie die 4-Impulse der Teilchen im Endzustand als Funktion von E an.

24. Das geladene Pion zerfällt fast ausschließlich gemäß $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$. Berechnen Sie Energie und Impuls der Teilchen im Endzustand unter der Annahme, dass das Pion ruht and das Neutrino masselos ist.

25. Betrachten Sie den Pionzerfall wie im Beispiel 24, aber das Pion habe nun die Energie $E > m_\pi$, d.h., das Pion bewege sich relativ zum ruhenden Beobachter. Im Ruhesystem des Pions ist die Winkelverteilung des Neutrinos isotrop. Wie sieht Winkelverteilung im System des Beobachters aus?

26. Zwischen zwei parallelen Wänden (Abstand ℓ) befinde sich Wasser. Ein Elektron trete orthogonal auf die Wand in den Wasserbehälter ein und durchquere ihn mit konstanter Geschwindigkeit $v = c\beta > c/n$ ($n \simeq 1.33$ ist der Brechungsindex). Die Wand, durch die das Elektron den Behälter wieder verlässt, sei dicht mit Photozellen ausgekleidet. Welches Signal bewirkt die Cherenkovstrahlung an der Austrittswand, bzw. wie entwickelt es sich zeitlich? Verwenden Sie die Näherung $\cos\theta = 1/(\beta n)$ für den Winkel zwischen Cherenkov-Strahlung und Elektronimpuls.

27. Es sei U eine unitäre $N \times N$-Matrix mit $\det U = 1$ ($U \in SU(N)$). Zeigen Sie, dass sich U schreiben lässt als $U = e^{iT}$, wobei T eine spurlose hermitische Matrix ist.

28. Mit wievielen rellen Parametern lässt sich die Gruppe $SU(N)$ parameterisieren? Lösen Sie diese Aufgabe mit Hilfe der vorigen Aufgabe.

29. Benützen Sie Aufgabe 27 um zu zeigen, dass sich jede Matrix $U \in SU(2)$ als $U = \exp(-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}/2)$ darstellen lässt.

30. Rechnen Sie nach, dass der in der VO hergestellte Zusammenhang $U \in SU(2) \to R_U \in SO(3)$ für $U = U(\alpha, \vec{n})$ und $R_U = R(\alpha, \vec{n})$ erfüllt ist.

31. Rechnen Sie für die 3×3 Matrizen $(T_k)_{ij} = -i\varepsilon_{ijk}$ nach, dass diese die Kommutatorrelationen des Drehimpulses erfüllen.

32. Berechnen mit den T_k aus der vorigen Aufgabe $\left(\vec{n} \cdot \vec{T}\right)^2$ und $\left(\vec{n} \cdot \vec{T}\right)^3$ für $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ and $\vec{n}^2 = 1$.

33. Benützen Sie das Ergebnis der vorigen Aufgabe um zu zeigen, dass $e^{-i\alpha\vec{n}\cdot\vec{T}} = R(\alpha, \vec{n})$ gilt.

34. Es seien A und B beliebige $n \times n$-Matrizen. Wenn der Parameter t genügend klein ist, kann man zeigen, dass es eine Matrixfunktion $C(t)$ gibt, so dass $e^{tA}e^{tB} = e^{C(t)}$ gilt, wobei $C(t) = C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + \cdots$ eine Potenzreihe ist. Berechnen Sie C_1 und C_2.

35. Schreiben für den Drehimpuls $j = 1$ die Matrizen J_3, J_+, J_-, J_1 und J_2 hin.

36. Da alle Darstellungen der Drehimpulsalgebra mit $j = 1$ äquivalent sind, muss es eine unitäre 3×3-Matrix W geben, so dass $W^\dagger T_k W = J_k$ für $k = 1, 2, 3$ gilt. Dabei sind die T_k die Matrizen aus Aufgabe 31 und die J_k aus der vorigen Aufgabe. Berechnen Sie W.

37. Betrachten Sie die Produktdarstellung $D(j_1) \otimes D(j_2)$ der Drehimpulsalgebra, auf der $\vec{J} = \vec{J}^{(1)} + \vec{J}^{(2)}$ gilt. Dabei wirkt $\vec{J}^{(1)}$ auf den ersten Zustand im Produktraum und $\vec{J}^{(2)}$ auf den zweiten. Drücken Sie $\vec{J}^2$ durch Eigenwerte von $\left(\vec{J}^{(i)}\right)^2$ und die Operatoren $J_3^{(i)}$ und $J_\pm^{(i)}$ aus.
`Hinweis:` Benützen Sie $\vec{J}^2 = \left(\vec{J}^{(1)}\right)^2 + \left(\vec{J}^{(2)}\right)^2 + 2\vec{J}^{(1)} \cdot \vec{J}^{(2)}$.

38. Rechnen Sie mit Hilfe des Resultats der vorigen Aufgabe nach, dass der Zustand

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$$

gebildet aus zwei Spins tatsächlich Spin Null hat.
`Hinweis:` Mit $\vec{S} = \vec{S}^{(1)} + \vec{S}^{(2)}$ müssen Sie also nachrechnen, dass $\left(\vec{S}\right)^2 \psi = 0$ gilt.

39. Man kann zeigen, dass in $D(j_1) \otimes D(j_2)$ jeder zu den Gesamtdrehimpulsen

$$j = |j_1 - j_2|,\ \ |j_1 - j_2| + 1, \ldots, j_1 + j_2 - 1,\ \ j_1 + j_2$$

gehörige Zustand genau einmal vorkommen. Rechnen Sie nach, dass diese Behauptung zumindest der Dimension nach richtig ist.

40. Wir verwenden die Notation $|j_1 m_1; j_2 m_2\rangle \equiv |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$ für die in $D(j_1) \otimes D(j_2)$ vorkommenden Produktzustände und $|(j_1 j_2) j m\rangle$ für die Eigenzustände von $\vec{J}^2$ und J_3 mit $\vec{J} = \vec{J}^{(1)} + \vec{J}^{(2)}$. Berechnen Sie für $j_1 = 1$ und $j_2 = 1/2$ die Zustände $|(j_1 j_2) j m\rangle$. Erklären Sie in diesem Zusammenhang, was die Clebsch-Gordan-Koeffizienten sind.
`Hinweis:` Nach der vorigen Aufgabe kann j nur $3/2$ oder $1/2$ sein. Dann gilt aber $|(1\,\frac{1}{2})\frac{3}{2}\,\frac{3}{2}\rangle = |11; \frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$. Mit dem Leiteroperator bekommen Sie die fehlenden drei Zustände zu $j = 3/2$. Nun bestimmen Sie $|(1\,\frac{1}{2})\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle$ dadurch, dass dieser Zustand auf $|(1\,\frac{1}{2})\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\rangle$ orthogonal sein muss.

41. Gemäß Aufgabe 40 treten bei der Pion-Nukleon-Streuung $\pi + N \to \pi' + N'$ nur zwei Streuamplituden auf, nämlich die für Isospin $I = 3/2$ und $I = 1/2$ unter der Näherung, dass nur isospinerhaltende starke Wechselwirkung für die Streuung verantwortlich ist. Macht man Pion-Nukleon-Streuung an der Δ-Resonanz, dominiert die $I = 3/2$-Streuamplitude. Zeigen Sie, dass man in diesem Fall die Verhältnisse

$$\sigma(\pi^+ p \to \pi^+ p) : \sigma(\pi^- p \to \pi^- p) : \sigma(\pi^- p \to \pi^0 n) = 9 : 1 : 2$$

für die Wirkungsquerschnitte bekommt.
`Hinweis:` In dieser Aufgabe geht es nur um die Clebsch-Gordan-Koeffizienten der Anfangs- und Endzustände. Diese bekommen Sie entweder durch Lösen der Aufgabe 40 oder durch Nachschlagen. Siehe z.B. Griffiths, *Einführung in die Elementarteilchenphysik*.

42. Welche Feldgleichung erhält man aus der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 V_\mu V^\mu$$

mit $F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$?

43. Es sei ϕ ein komplexes Skalarfeld, das die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt. Zeigen Sie durch Anwendung dieser Gleichung, dass

$$j^\mu = i\left(\phi\, \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial^\mu \phi\right)$$

ein erhaltener Strom ist.

44. Es sei $\vec{E}(x)$ der Feldoperator des elektrischen Feldes, quantisiert in einem endlichen Volumen Ω definiert durch $0 \le x_1 \le L_1$, $0 \le x_2 \le L_2$, $0 \le x_3 \le L_3$. Weiters sei der Zustand $|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|\vec{k},\lambda\rangle$ mit $|\vec{k},\lambda\rangle \equiv \left(a_{\vec{k}}^{(\lambda)}\right)^\dagger |0\rangle$ und $c_0, c_1 \in \mathbb{C}$ gegeben. Wie erfüllt man die Normierungsbedingung $\langle\psi|\psi\rangle = 1$? Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\psi|\vec{E}(x)|\psi\rangle$.
`Hinweis:` Beachten Sie, dass sich das elektrische Feld schreiben lässt als $\vec{E}(x) = \vec{E}^{(+)}(x) + \vec{E}^{(-)}(x)$, wobei $\vec{E}^{(+)}(x)$ nur die Vernichtungsoperatoren und $\vec{E}^{(-)}(x) = \left(\vec{E}^{(+)}(x)\right)^\dagger$ nur die Erzeugungsoperatoren enthält. Daher gilt

$$\langle\psi|\vec{E}(x)|\psi\rangle = 2\,\mathrm{Re}\left(\langle\psi|\vec{E}^{(+)}(x)|\psi\rangle\right).$$

45. Machen Sie das Analoge für $|\psi\rangle = c_1|\vec{k}_1,\lambda_1\rangle + c_2|\vec{k}_2,\lambda_2\rangle + c_{12}|\vec{k}_1,\lambda_1;\, \vec{k}_2,\lambda_2\rangle$. Dabei sei $(\vec{k}_1,\lambda_1) \neq (\vec{k}_2,\lambda_2)$.

46. Berechnen Sie den Erwartungswert des Teilchenzahloperators N und dessen Schwankungsquadrat in den Zuständen $|\psi\rangle$ der beiden vorigen Aufgaben.

47. Berechnen Sie $\langle\psi|\vec{E}(x)|\psi\rangle$ für den kohärenten Zustand

$$|\psi(\vec{k},\lambda,z)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|\vec{k},\lambda,n\rangle,$$

der durch

$$|\vec{k},\lambda,n\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\left(a_{\vec{k}}^{(\lambda)}\right)^\dagger\right)^n |0\rangle \quad \text{und} \quad c_n = e^{-|z|^2/2}\,\frac{z^n}{\sqrt{n!}}$$

definiert ist. Dabei sei z eine beliebige, jedoch fixe komplexe Zahl.
`Hinweis:` Was ist $a_{\vec{k}}^{(\lambda)}|\psi(\vec{k},\lambda,z)\rangle$?

48. Berechnen Sie $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ in der Weyl-Darstellung.

49. Zeigen Sie, dass

    (a) $(\gamma_5)^2 = \mathbb{1}$ erfüllt ist, ohne auf eine spezielle Darstellung der γ-Matrizen Bezug zu nehmen, und dass

    (b) $\gamma_5^\dagger = \gamma_5$ gilt.

    Für die zweite Relation müssen Sie allerdings $\gamma_0^\dagger = \gamma_0$ und $\gamma_j^\dagger = -\gamma_j$ $(j = 1,2,3)$ voraussetzen. Ab jetzt setzen wir diese Hermitizitätseigenschaften der γ-Matrizen für alle folgenden Übungsaufgaben voraus.

50. Zeigen Sie, dass die Ströme $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ und $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$ (Vektorstrom und Axialvektorstrom) hermitisch sind.

51. Berechnen Sie die Feldgleichung, die man durch Variation der Dirac-Lagrangedichte nach ψ erhält und zeigen Sie, dass diese – unter der Voraussetzung $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0$ – zur Dirac-Gleichung äquivalent ist.

52. Rechnen Sie nach, dass $u^\dagger(\vec{p}, r)\, v(-\vec{p}, s) = 0$ für Dirac-Spinoren u, v gilt.

53. Zeige Sie, dass für den Dirac-Hamilton-Operator $\bar{H} = \vec{\alpha} \cdot \vec{P} + \beta m + V(r)$ die Drehimpulserhaltung gilt.
`Hinweis:` Es ist $[\bar{H}, J_k] = 0$ $(k = 1, 2, 3)$ zu zeigen mit $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$.

54. Zeigen Sie die Invarianz der Dirac-Gleichung unter Raumspiegelung: Ist $\psi(x)$ eine Lösung der Dirac-Gleichung mit dem elektromagnetischen Potential $A^\mu(x)$, dann ist $\gamma_0 \psi(\hat{x})$ eine Lösung mit $(A^0(\hat{x}), -\vec{A}(\hat{x}))$, wobei die Abkürzung $\hat{x} = (x^0, -\vec{x}\,)$ verwendet wurde.

55. Wie verhalten sich die Skalare $S(x) \equiv \bar{\psi}(x)\psi(x)$ und $P(x) \equiv \bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$ unter Raumspiegelung?

56. Wie verhalten sich die 4-Vektoren $V^\mu(x) \equiv \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ und $A^\mu(x) \equiv \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)$ unter Raumspiegelung?

57. Es seien $P_{L,R}$ die Chiralitätsprojektoren und ψ ein chirales Dirac-Feld mit $P_L\psi = \psi$. Was gilt dann für $P_R\psi$, $P_R\psi^c$, $P_L\psi^c$? Dabei bezeichnet ψ^c das ladungskonjugierte Feld $\psi^c = C\gamma_0^T\psi^*$.
`Hinweis:` Verwenden Sie $C^{-1}\gamma_5 C = \gamma_5^T$.

58. Zeigen Sie die Ladungskonjugationsinvarianz der Dirac-Gleichung: Ist $\psi(x)$ eine Lösung der Dirac-Gleichung mit dem elektromagnetischen Potential $A^\mu(x)$, dann ist $\psi^c(x)$ eine Lösung mit $-A^\mu(x)$.

59. Wie verhält sich $\bar{\psi}_1\gamma^\mu\psi_2$ unter Ladungskonjugation? Berücksichtigen Sie dabei, dass die Komponenten ψ_{ia} $(a = 1, \ldots, 4)$ der Dirac-Felder ψ_i $(i = 1, 2)$ antikommutierende Größen sind.

60. Es sei $A_\mu = T_a A_\mu^a$ und $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu]$ der Feldstärketensor in Matrixform. Rechnen Sie nach, dass die Eichtransformation

$$A_\mu \to U A_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}\,(\partial_\mu U)\, U^{-1}$$

das Transformationsverhalten $F_{\mu\nu} \to U F_{\mu\nu} U^{-1}$ induziert.

61. Die hermitischen Matrizen T_a $(a = 1, \ldots, n_G)$ seien Generatoren einer (kompakten) Liegruppe mit der Kommutatorrelation

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c.$$

Weiters sollen diese Generatoren die Spurrelation $\mathrm{Sp}\,(T_a T_b) = k\delta_{ab}$ erfüllen, wobei $k > 0$ eine Konstante ist. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Strukturkonstanten f_{abc} total antisymmetrisch in den Indizes a, b, c sind.
`Hinweis:` Unter den gegebenen Voraussetzungen gilt $\mathrm{Sp}\,([T_a, T_b]T_c) = ik f_{abc}$.

62. Es sei eine $SO(N)$-invariante Theorie gegeben, in der die Symmetriegruppe $SO(N)$ durch spontane Symmetriebrechung auf $SO(N-1)$ gebrochen wird. Wieviele masselose Skalare muss es in diesm Fall gemäß dem Goldstone-Theorem geben?

63. Es sei die $SO(N)$-invariante Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(\partial_\mu\varphi_j\right)\left(\partial^\mu\varphi_j\right) - \frac{1}{2}\mu^2\sum_{j=1}^{N}\varphi_j^2 - \frac{1}{4}\lambda\left(\sum_{j=1}^{N}\varphi_j^2\right)^2$$

mit rellen skalaren Feldern φ_j gegeben ($\lambda > 0$). Für $\mu^2 < 0$ tritt die spontane Symmetriebrechung $SO(N) \to SO(N-1)$ ein. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können Sie annehmen, dass wegen der $SO(N)$-Invarianz nur φ_N einen Vakuumerwartungswert v bekommt. Berechnen Sie v als Funktion von μ^2 und λ und bestimmen Sie das Massenspektrum.

64. Es sei eine Lagrangefunktion mit zwei komplexen Skalarfeldern $\Phi_{1,2}$ gegeben. Es werde Invarianz unter zwei separaten $U(1)$-Transformationen $\Phi_1 \to e^{i\alpha}\Phi_1$ und $\Phi_2 \to e^{i\beta}\Phi_2$ angenommen. Damit hat das skalare Potential V – unter Beschränkung auf Terme der Dimension kleiner gleich 4 – die Form

$$V(\Phi_1,\Phi_2) = \mu_1^2\Phi_1^*\Phi_1 + \mu_2^2\Phi_2^*\Phi_2 + \lambda_1\left(\Phi_1^*\Phi_1\right)^2 + \lambda_2\left(\Phi_2^*\Phi_2\right)^2 + 2\lambda_{12}\left(\Phi_1^*\Phi_1\right)\left(\Phi_2^*\Phi_2\right),$$

wobei zumindest $\lambda_{1,2} > 0$ gelten muss. Der Vakuumerwartungswert von Φ_1 sei $v/\sqrt{2}$, der von Φ_2 sei $w/\sqrt{2}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können beide größer gleich Null angenommen werden. Nehmen Sie nun an, dass die Relationen $\mu_1^2 < 0$ und $\mu_2^2 > 0$ erfüllt sind. Zeigen, dass in diesem Fall die Extremumsbedingungen durch $\mu_1^2 + \lambda_1 v^2 = 0$ und $w = 0$ erfüllt sind und berechnen Sie damit die Massen der Skalare. Welche Ungleichungen folgen aus der Positivität der Massenquadrate?
`Hinweis:` Machen Sie den Ansatz $\Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(v + \varphi_1 + i\varphi_2\right)$ mit rellen Feldern $\varphi_{1,2}$.

65. Nehmen Sie nun an, dass in V der vorigen Aufgabe beide Parameter μ_i^2 ($i = 1, 2$) kleiner als Null sind und berechnen Sie die Vakuumerwartungswerte v und w. Berechnen Sie weiters die Massen der Skalare und zeigen Sie, dass aus Konsistenzgründen $\lambda_1\lambda_2 > \lambda_{12}^2$ erfüllt sein muss.
`Hinweis:` Jetzt benötigt man zusätzlich zum Ansatz für Φ_1 den analogen Ansatz $\Phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(w + \varphi_3 + i\varphi_4\right)$. Da jetzt beide $U(1)$-Symmetriegruppen spontan gebrochen sind, gibt es zwei Goldstone-Bosonen. Die Felder φ_1 und φ_3 sind keine Masseneigenfelder mehr, sondern ihre Massenterme können in der Form

$$\frac{1}{2}\left(\varphi_1,\varphi_3\right)\mathcal{M}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_3\end{pmatrix}$$

geschrieben werden mit einer 2×2-Matrix $\mathcal{M}$; die Massenquadrate sind durch die Eigenwerte dieser Matrix gegeben.

66. Beweisen Sie die Relation

$$\left(\tau_a\right)_{ij}\left(\tau_a\right)_{kl} = \frac{3}{2}\delta_{il}\delta_{kj} - \frac{1}{2}\left(\tau_b\right)_{il}\left(\tau_b\right)_{kj},$$

wobei über die drei Pauli-Matrizen τ_a bzw. τ_b summiert wird. Durch nochmalige Anwendung dieser Relation erhält man schließlich

$$(\tau_a)_{ij}\,(\tau_a)_{kl} = 2\delta_{il}\delta_{kj} - \delta_{ij}\delta_{kl}.$$

`Hinweis:` Für jedes festgehaltene Paar von Indizes (k, j) ist der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung eine Matrix in den Indizes i, l. Da $\mathbb{1}_2$ und die drei Pauli-Matrizen eine Basis im Raum der 2×2-Matrizen bilden, lässt sich der Ansatz

$$(\tau_a)_{ij}\,(\tau_a)_{kl} = c^0_{kj}\delta_{il} + c^b_{kj}\,(\tau_b)_{il}$$

machen. Die Koeffizienten c^α_{kj} $(\alpha = 0, 1, 2, 3)$ werden durch Spurbildung bestimmt.

67. Zeigen Sie mit Hilfe der zweiten Relation aus der vorigen Aufgabe, dass sich die Ausdrücke
$$\phi^\dagger\tau_a\phi\;\phi^\dagger\tau_a\phi, \quad \phi^\dagger\tau_a\tilde{\phi}\;\tilde{\phi}^\dagger\tau_a\phi \quad \text{und} \quad \phi^\dagger\tau_a\phi\;\tilde{\phi}^\dagger\tau_a\tilde{\phi}$$
mit dem Higgs-Dublett ϕ auf $\left(\phi^\dagger\phi\right)^2$ zurückführen lassen.

68. Zeigen Sie, dass es im Standardmodell der Teilchenphysik (SM) keine quartischen Kopplungen der elektrisch neutralen Vektorbosonen gibt.

69. Berechnen Sie die im SM vorkommenden quartischen Kopplungen zwischen den neutralen Vektorbosonen und W^+W^-.

70. Berechnen Sie die im SM vorkommenden quartischen Terme in $W^\pm$.

71. Zeigen Sie, dass die Wechselwirkung des Photonfelds A_μ im SM auf die Form $-eA_\mu \sum_f Q_f \bar{f}\gamma^\mu f$ gebracht werden kann. Dabei ist der Zusammenhang zwischen den physikalischen Fermionfeldern f und den chiralen Masseneigenfeldern $f_{L,R}$ gegeben durch $f = f_L + f_R$ und die Q_f sind die Ladungen der Felder f in Einheiten der Elementarladung e.
`Hinweis:` Die Wechselwirkung des Photonfelds (und auch des Z^0-Felds Z_μ) erhält man aus der kovarianten Ableitung D_μ.

72. Die Wechselwirkung des Z^0 mit den physikalischen Fermionen kann man auf die Form $-\frac{g}{2c_W}\, Z_\mu \sum_f \bar{f}\gamma^\mu(a_f - \gamma_5 b_f)f$ bringen. Bestimmen Sie die Koeffizienten a_f und b_f.

73. In der Lie-Algebra der $SU(3)$ kann man die Basis $T_a = \lambda_a/2$ wählen, wobei die λ_a die Gell-Mann-Matrizen sind. In dieser Basis sind die Strukturkonstanten f_{abc} total antisymmetrisch in den Indizes a, b, c. Berechnen Sie alle Strukturkonstanten, wo ein Index gleich 1 ist.

74. Nehmen Sie an, dass Sie einen Fluss von Reaktorneutrinos ($\bar{\nu}_e$) haben mit einer (mittleren) Energie von 4 MeV. Bei welcher Distanz vom Reaktor hat die Wahrscheinlichkeit $P_{\bar{\nu}_e \to \bar{\nu}_e}$ das erste Minimum?
`Hinweis:` Es brauchen nur die Oszillationen mit $\Delta m^2_{31} c^4 = 2.5 \times 10^{-3}\,\mathrm{eV}^2$ berücksichtigt werden.

75. Zeigen Sie, dass die Neutrinooszillationswahrscheinlichkeiten $P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta}$ die Relationen

$$\sum_\beta P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta} = 1 \quad \text{und} \quad \sum_\alpha P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta} = 1$$

erfüllen.

76. Bestimmen Sie die Elektronendichte in Wasser, indem Sie außer der Avogadro-Zahl $N_A = 6.022 \times 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$ nur den physikalisch-chemischen Hausverstand benützen.

77. Berechnen Sie die de Broglie-Wellenlänge eines Neutrinos mit einer Energie $E_\nu = 1\,\mathrm{MeV}$. Verwenden Sie dazu $\hbar c = 197.3\,\mathrm{MeV\,fm}$.

78. Beweisen Sie für das Ladungskonjugierte Dirac-Feld ψ^c die Relation $\overline{\psi^c} = -\psi^T C^{-1}$.

79. Zeigen Sie die Identität $\psi^{cc} = \psi$. In Worten bedeutet dies, dass man bei zweifacher Ladungskonjugation eines Dirac-Felds ψ wieder das ursprüngliche Feld erhält.

80. Es sei $S = \exp\left(-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right)$ eine Lorentz-Transformation auf Dirac-Spinoren. Beweisen Sie die Relationen

$$C\sigma_{\mu\nu}^T C^{-1} = -\sigma_{\mu\nu} \quad \text{und} \quad S^T C^{-1} S = C^{-1}.$$