Statistik 1

2. Übung

Empfohlene Literatur: die Seiten 72–82 bzw. die Seiten 91–109 im Buch.

Die Aufgaben 1., 2., 3., 6., 7., 8., 9., 10., 13. können eventuell bei der Tafel präsentiert werden.

1 Unabhängige Ereignisse und bedingte Wahrscheinlichkeiten

1. Es wird ein Würfel geworfen. Betrachten wir die folgenden drei Ereignisse:

   A: die Augenzahl ist gerade

   B: die Augenzahl ist teilbar durch 3

   C: die Augenzahl ist eine Primzahl

   (a) $\mathbb{P}(A) = ?, \;\; \mathbb{P}(B) = ?, \;\; \mathbb{P}(C) = ?$

   (b) Überlegen Sie *ohne Rechnung*, welche Paare von den drei Ereignissen unabhängig sind.

   (c) Überprüfen Sie Ihre Aussage durch Rechnung.

   (d) Sind die drei Ereignisse zusammen unabhängig?

   (e) Vergleichen Sie $\mathbb{P}(A)$ mit $\mathbb{P}(A \,|\, C)$, sowie $\mathbb{P}(C)$ mit $\mathbb{P}(C \,|\, A)$.

2. Es werden zwei Würfel geworfen. Betrachten wir die folgenden drei Ereignisse:

   A: die erste Augenzahl ist 6

   B: die Summe der beiden Augenzahlen ist gerade

   C: die zweite Augenzahl ist (strikt) größer als die erste

(a) Welche zwei Ereignisse sind unabhängig?

(b) Welche zwei Ereignisse schließen einander aus?

(c) $\mathbb{P}(A \,|\, B) = ?$, $\mathbb{P}(B \,|\, A) = ?$, $\mathbb{P}(B \,|\, C) = ?$, $\mathbb{P}(C \,|\, B) = ?$

3. Wir werfen solange zwei Würfel, bis mindestens eine der Augenzahlen ein Sechser ist. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass dann die andere Augenzahl auch ein Sechser ist?

4. Seien A und B zwei Ereignisse mit $\mathbb{P}(A) = 0.5$ und $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.7$. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(B)$, wenn

   (a) A und B unabhängig sind,

   (b) A und B disjunkt sind,

   (c) $\mathbb{P}(A \,|\, B) = 0.2$,

   (d) $\mathbb{P}(A \,|\, B) = 0.5$?

5. Gegeben seien drei Ereignisse A_1, A_2, A_3 und die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(A_3 \,|\, A_1 \cap A_2) = \frac{1}{5}$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{10}$ und $\mathbb{P}(A_3 \,|\, A_1^C \cup A_2^C) = \frac{3}{5}$. Berechnen Sie $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \,|\, A_3)$.

6. Während einer Epidemie leidet jede tausendste Person an einer bestimmten Krankheit. Ein Schnelltest stellt die Erkrankung mit 99% Wahrscheinlichkeit fest, wenn die untersuchte Person wirklich infiziert ist. Wenn die untersuchte Person gesund ist, ergibt der Test trotzdem in 2% aller Fälle ein positives Resultat (als falsche Diagnose).

   (a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Testergebnis einer zufällig ausgewählten Person positiv wird?

   (b) Gegeben, dass der Test ein positives Ergebnis anzeigt, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person wirklich erkrankt ist?

   (c) Ist das numerische Resultat im Punkt (b) überraschend? Was ist die Erklärung dafür?

(d) Was für ein Verfahren schlagen Sie vor, um einen realistischeren Schluss ziehen zu können? (Angenommen, dass die Fehldiagnosequoten des Schnelltests (1% und 2%) nicht verbessert werden können.)

7. Wir führen das folgende Zufallsexperiment durch: Zuerst werfen wir einen Würfel, dann werfen wir so viele Münzen, wie durch die Augenzahl des Würfels gezeigt wird.

   (a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir als Ergebnis des Münzwurfes genau 3 Köpfe (und eventuell noch einige Zahlen) bekommen?

   (b) Jemand hat uns mitgeteilt, dass als Ergebnis des Münzwurfes genau 3 Köpfe vorgekommen sind. Über die Anzahl der Zahlen haben wir keine Information. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir mit dem Würfel einen Fünfer geworfen haben?

2 Diskrete Zufallsvariablen

8. Sei X das Ergebnis eines einfachen Würfelwurfes.

   (a) Geben Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X durch eine Formel an.

   (b) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion.

   (c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

9. Es werden 3 Münzen geworfen. Sei Y die Anzahl der Köpfe.

   (a) Geben Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable Y durch eine Formel an.

   (b) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion.

   (c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Y.

10. Anna und Bob spielen das folgende Spiel: Sie werfen zwei Würfel. Anna bezahlt Bob jenen Betrag (in Euro), der dem Quadrat der Differenz der beiden Augenzahlen entspricht. Umgekehrt bezahlt Bob Anna jenen Betrag, der der Summe der beiden Augenzahlen entspricht. Für welchen Spieler ist dieses Spiel vorteilhaft?

11. Nehmen wir an, dass man mit einem Rubbellos die folgenden Beträge gewinnen kann: 100 € mit 0.1% Chance, 25 € mit 0.9% Chance, 10 € mit 5% Chance. Was wäre der gerechte Preis für ein solches Rubbellos?

12. Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit der Verteilung $\mathbb{P}(X = -2) = 0.2, \quad \mathbb{P}(X = 0) = 0.5, \quad \mathbb{P}(X = 3) = 0.3$.

    (a) Geben Sie die Verteilungsfunktion F(x) der ZV X an und skizzieren Sie diese.

    (b) Berechnen Sie die Standardabweichung von X.

    (c) Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen $Y = X^3$.

    (d) Berechnen Sie die Varianz der Zufallsvariablen $Z = -3X - 1$.

13. Bei einem Multiple Choice Test werden 10 Fragen gestellt. Bei jeder Frage werden 4 Antwortalternativen vorgegeben und nur eine ist richtig.

    (a) Der Test wird als positiv beurteilt, wenn zumindest 5 Fragen richtig beantwortet wurden. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, diesen Test erfolgreich bestehen zu können, wenn die Antwort bei jeder Frage zufällig ausgewählt wird?

    (b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass man zumindest 8 Antworten errät?