Bereich ihrer Argumente „hinreichend glatt" (auf jeden Fall stetig) sind. Besonders bequem wäre es, wenn sie auf

$$(\alpha)\ V \times \mathbb{C}^N \qquad\qquad (\beta)\ V \times \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^{N(n+1)}$$

definiert und glatt oder sogar analytisch wären, aber in vielen interessanten Fällen ist das nicht so. Beispielsweise handelt es sich hier bei den Einsteingleichungen in ihrer üblichen Darstellung um rationale Funktionen.

Von einer Lösung u unserer PDgl wollen wir zunächst annehmen, daß

$$(\alpha)\ u \in C^1(V, \mathbb{C}^N) \qquad\qquad (\beta)\ u \in C^2(V, \mathbb{C}^N) \quad ,$$

so daß die linke Seite unserer Gleichung nach Einsetzen von u stetig ist.

Wir wollen noch einige Begriffe einführen, die einfach sind, aber eine wichtige Rolle spielen. Der Teil einer PDgl, der die Ableitungen höchster Ordnung enthält, in unserem Fall

$$(\alpha)\ A^i\, \partial_i u \qquad\qquad (\beta)\ A^{ik} \partial_i \partial_k u \quad ,$$

heißt ihr „*Hauptteil*". Ist der Hauptteil „linear in den höchsten Ableitungen", wie es bei unserer Gleichung der Fall ist, so heißt die Gleichung „*quasilinear*". Gilt darüber hinaus $A^i = A^i(x)$ bzw. $A^{ik} = A^{ik}(x)$, d.h. die Funktionen im Hauptteil, die vor den Ableitungen höchster Ordnung auftreten hängen nicht von der Unbekannten oder ihren Ableitungen ab, so heißt die Gleichung „*semilinear*". Ist zudem noch die Funktion b linear in u und seinen Ableitungen, so heißt die Gleichung „*linear*".

Es gibt natürlich auch interessante Gleichungen, die nicht quasi-linear sind, wie z.B. die Hamilton-Jacobi bzw. Eikonalgleichung, der wir später noch begegnen werden, die Gleichung zur Bestimmung von Flächen mit vorgegebener Gauß-Krümmung, allgemeine Monge-Ampère-Gleichungen, die in der Differentialgeometrie eine Rolle spielen, oder Gravitationsfeldgleichungen mit Gauß-Bonnet Termen. Euler-Lagrange-Gleichungen zu einer in den höchsten Ableitungen nichtlinearen Lagrangedichte sind quasilinear (können aber, wie wir am Beispiel der Gravitationsfeldgleichungen mit Gauß-Bonnet Termen lernen (vergl. [1]), „echt nicht-linear" werden, wenn man zusätzliche Folgerungen aus dem Variationsprinzip in Betracht zieht, um sie zu „vereinfachen"). In vielen Fällen lassen sich aus echt nichtlinearen Gleichungen quasilineare gewinnen. Ist uns z.B. eine skalare PDgl der Form

$$F(\partial_j u, u, x) = 0$$

gegeben, die nicht quasilinear ist, so erhalten wir daraus (falls F differenzierbar ist! Es werden durchaus echt nichtlineare PDgl studiert, wo das nicht notwendig der Fall ist) durch formales Ableiten nach den x^k die n quasilinearen Gleichungen

$$\partial_{p_j} F\, \partial_k \partial_j u + \partial_u F\, \partial_k u + \partial_k F = 0 \quad .$$

Wir erhalten also ein überbestimmtes System für eine Unbekannte u, und wir müssen außerdem noch die ursprüngliche Gleichung als eine Art Zwangsbedingung mitberücksichtigen. Wir wollen offen lassen, ob dieses Verfahren dem gegebenen Problem immer angemessen ist.