Beispiele zur Monte Carlo-Simulation

1. Es sei $z = x + y$ die Summe zweier statistisch unabhängiger, auf dem Intervall $[0, 1)$ gleichverteilter Zufallsvariablen. Erzeuge eine Stichprobe $\{\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n\}$ und berechne Stichprobenmittelwert, Varianz sowie ein Histogramm der Wahrscheinlichkeitsdichte von z.

2. Symmetrische Irrfahrt (*Random Walk*) in einer Dimension: Ein Random Walker startet bei $x_0 = 0$ und führt n Schritte der Länge $\Delta x = x_{i+1} - x_i = \pm 1$ aus. Bei jedem Schritt sei die Wahrscheinlichkeit, nach links oder rechts zu gehen, jeweils 1/2. Führe eine größere Anzahl von Random Walks durch und bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung, daß nach Ende der Irrfahrt der Random Walk genau bei $x_n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$ endet. Bestimme auch den im quadratischen Mittel zurückgelegten Weg $\langle x_n^2 \rangle$.

3. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung für eine Poisson-verteilte Zufallsvariable x

$$P(x = k) = P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}$$

erfüllt die Beziehung

$$P_\lambda(k+1) = \frac{\lambda}{k+1}\, P_\lambda(k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Um nach der inversen Transformationsmethode eine Stichprobe aus dieser Verteilung zu erzeugen, kann man daher so vorgehen, daß man eine im Intervall $[0, 1)$ gleichverteilte Zufallszahl ξ würfelt und dann, beginnend mit $P_\lambda(0) = e^{-\lambda}$, die obige Rekursion so lange iteriert, bis

$$P_\lambda(k-1) \leq \xi < P_\lambda(k)$$

gilt, und schließlich $x = k$ setzt. [Ist schon $\xi < P_\lambda(0)$, so wird $x = 0$ gesetzt.]
Erzeuge nach dieser Methode für den Fall $\lambda = 10$ eine hinreichend große Stichprobe und berechne daraus, Mittelwert, Varianz und ein Histogramm der Wahrscheinlichkeitsverteilung.

4. Benütze die Transformationsmethode, um eine Stichprobe aus der Cauchy-Verteilung

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

zu erzeugen. Überprüfe die Implementation durch Vergleich des aus der Stichprobe gewonnenen Histogramms mit der vorgegebenen Verteilung.

5. Es sei die (unnormierte) Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = x(1-x)$$

auf dem Intervall $[0,1]$ gegeben. Um nach der *Rejection*-Methode eine Stichprobe aus dieser Verteilung zu erzeugen, sucht man eine obere Schranke A, für die gilt $f(x) \leq A$ (hier also z.B. $A = 1/4$). Man würfelt nun Punktepaare (x, y) mit $x = \xi$ und $y = A\eta$ (wo ξ und η unabhängige gleichverteile Zufallsvariablen aus $[0,1)$ sind) und verwirft alle Punkte, für die $y > f(x)$ ist. Die x-Koordinaten der verbleibenden Punktepaare bilden eine Stichprobe aus $f(x)$. Warum?
Erzeuge eine hinreichend große Stichprobe und verifziere an Hand des Histogramms die Korrektheit der Methode.

6. Welche Transformation führt eine auf dem Intervall $[0,1)$ gleichverteilte Zufallsvariable t in eine Zufallsvariable x auf dem Intervall $[-1,1)$ über, deren Wahrscheinlichkeitsdichte durch
$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
gegeben ist?
Benütze diese Transformation, um eines oder mehrere der Integrale
$$I_k = \int_{-1}^{1} dx \, \frac{T_k^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$
nach dem Muster
$$\int dx \, f(x) \, g(x) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)$$
mit Hilfe von Monte Carlo-Integration numerisch zu berechnen. Dabei sollen die ξ_i eine Stichprobe aus der Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$ bilden, während die übrigen Anteile des Integranden von I_k als zu mittelnde Funktion $g(x)$ interpretiert werden.
Diese Integrale treten als Normierungsfaktoren der Tschebyscheff-Polynome
$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$
auf und haben die exakten Werte
$$I_k = \begin{cases} \pi & \text{für} \quad k = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für} \quad k = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$