Beispiele zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen

1. Löse die Bewegungsgleichungen für den harmonischen Oszillator

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -\omega^2 x \\ \dot{x} &= v \end{aligned}$$

   (Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $v(0) = v_0$) für den Fall $\omega^2 = 1$, $x_0 = 1$, $v_0 = 0$, mit dem expliziten und impliziten Euler- sowie mit dem Cromer-Verfahren. Welches Verfahren ist stabil, welches instabil ("explodiert"), welches erhält langfristig die Gesamtenergie?

2. Genauigkeit und (möglicherweise) Stabilität der numerischen Lösung von Differentialgleichungen hängen wesentlich von der räumlichen bzw. zeitlichen Schrittweite ab. Wie groß darf (oder wie klein muß) man im vorigen Beispiel den Zeitschritt Δt machen, damit nach ein, zwei, drei, … Perioden des Oszillators die numerischen Lösung noch annähernd mit der analytischen übereinstimmt?

3. Während der harmonische Oszillator eines der wenigen Systeme darstellt, für die man die Lösung der Bewegungsgleichungen geschlossen angeben kann, ist dies beim mathematischen Pendel

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{\ell} \sin\varphi$$

   schon nicht mehr der Fall (φ ist der Auslenkwinkel, g die Erdbeschleunigung und ℓ die Pendellänge). Löse die Bewegungsgleichungen des mathematischen Pendels numerisch für den Fall $g/\ell = 1$ und verschiedene Anfangsauslenkungen. Hängt die Periodendauer von der Auslenkung ab? Wie vergleichen sich die Trajektorien von harmonischem Oszillator und mathematischem Pendel im Phasenraum (x–v- bzw. φ–ω-Ebene, wo $\omega = \dot{\varphi}$ die Winkelgeschwindigkeit des Pendels ist)?

4. Löse die Bewegungsgleichungen für den harmonischen Oszillator oder das mathematische Pendel mit dem Leapfrog Verfahren (wobei der fehlende Startwert für die Geschwindigkeit mit Taylorentwicklung aus der Differentialgleichung berechnet werden soll) sowie mit dem Runge–Kutta Verfahren 2. und/oder 4. Ordnung. Kann man beim Verfahren 4. Ordnung einen größeren Zeitschritt verwenden?

5. Die Besselfunktionen erster Art sind die im Ursprung regulären Lösungen der Differentialgleichung

$$x^2 y'' + x\, y' + (x^2 - n^2)\, y = 0$$

   und werden mit $J_n(x)$ bezeichnet. Berechne $J_0(x)$ im Intervall $0 \leq x \leq 10$ durch numerische Integration der obigen Differentialgleichung für den Fall $n = 0$, d.h. von

$$y'' + \frac{1}{x}\, y' + y = 0$$

mit den “Anfangsbedingungen”

$$y(0) = 1 \qquad \text{und} \qquad y'(0) = 0$$

Falls beim numerischen Integrationsverfahren dieser Wert benötigt wird, kann

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\, y'(x) = -\frac{1}{2}$$

gesetzt werden. Dies folgt aus der Reihenentwicklung

$$J_0(x) = 1 - \frac{1}{4}\, x^2 + \frac{1}{64}\, x^4 + \ldots$$

die sich aus einem Potenzreihenansatz von J_0 ergibt.

6. Die von van der Pol ursprünglich zur Beschreibung von elektrischen Schaltkreisen mit negativem Widerstand aufgestellte, aber z.B. von ihm selbst schon in den 1920er Jahren als Modell für den Herzschlag vorgeschlagene Differentialgleichung

$$\ddot{x} = \mu(1 - x^2)\dot{x} - x$$

beschreibt einen nichtlinearen Oszillator, dessen amplitudenabhängiger “Reibungsterm” bei positivem Parameter μ für große Amplituden eine Dämpfung, für kleine Amplituden aber eine Verstärkung bewirkt. Sein typisches Merkmal sind selbsterregte Schwingungen, deren Phasenraumtrajektorien gegen stabile Grenzzyklen laufen.

Integriere die van der Pol-Gleichung für die Anfangsbedingungen $x_0 = 0.01$, $\dot{x}_0 = 0$, mit Hilfe des Adams–Bashforth/Adams–Moulton Verfahrens 2. Ordnung oder des Runge–Kutta Verfahrens 4. Ordnung im Zeitintervall $0 \le t \le 50$. Untersuche sowohl die Schwingungsform $x(t)$ als auch die Phasenraumtrajektorie im Fall kleiner ($\mu = 0.2$), mittlerer ($\mu = 1$) und großer ($\mu = 5$) Nichtlinearität.