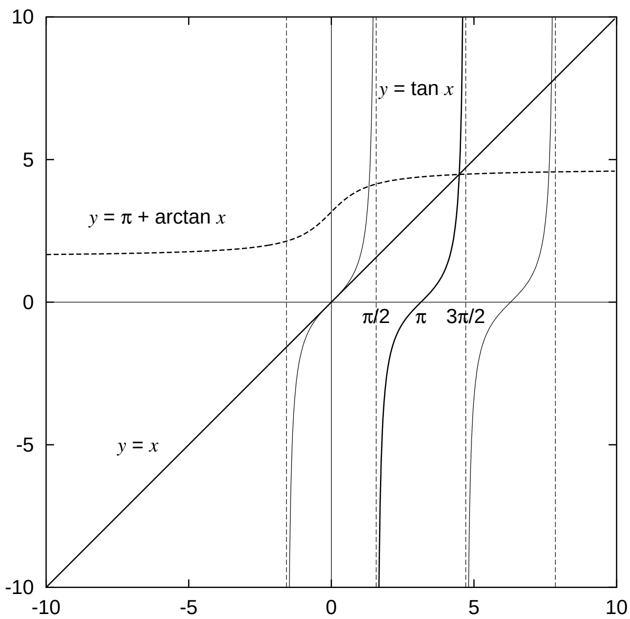
Beispiele zu nichtlinearen Gleichungen

1. Approximiere mit dem Bisektionsverfahren die Wurzel ξ der Gleichung
$$x^3 + 4x^2 - 10 \;=\; 0$$
im Intervall $[1, 2]$ auf $\pm 10^{-4}$ genau.

2. Die Gleichung aus Beispiel 1 kann auf verschiedene Arten in ein äquivalentes Fixpunktproblem umgeformt werden, z.B.:
$$x = \varphi_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$$
$$x = \varphi_2(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$$
Welche der beiden Iterationsfunktionen liefert eine konvergente Iterationsfolge für ξ?

3. Die transzendente Gleichung
$$x = \tan x$$
hat die Lösung $x = 0$, darüber hinaus aber noch unendlich viele weitere Lösungen. Bestimme mit der Methode der Fixpunktiteration die *kleinste positive* Lösung auf $\pm 10^{-4}$ genau.
Anleitung: Die Funktion $\varphi(x) := \tan x$ ist wegen $|\varphi'(x)| = |1/\cos^2 x| \geq 1$ als Iterationsfunktion nicht geeignet. Auf $]\pi/2, 3\pi/2[$ ist aber die Gleichung $x = \tan x$ gleichbedeutend mit $x = \operatorname{arctan}_1 x := \pi + \arctan x$. Man iteriert also nicht $\varphi = \tan$, sondern die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} = \pi + \arctan$.



4. Bestimme die *kleinste positive* Lösung der transzendenten Gleichung
$$\cos x \,\cosh x + 1 \;=\; 0$$
mit dem Newton-Verfahren auf $\pm 10^{-7}$ genau $(x_0 = 1.8)$.

5. Mehrfache Nullstellen: Die Funktion

$$f(x) = \exp(x) - x - 1$$

hat in $\xi = 0$ eine zweifache Nullstelle, da $f(\xi) = 0$, $f'(\xi) = 0$, aber $f''(\xi) = 1 \neq 0$. Approximiere die Lösung ξ von $f(x) = 0$ mit dem Newton-Verfahren auf $\pm 10^{-5}$ genau ($x_0 = 1$) und zeige, daß das Newton-Verfahren in diesem Fall nicht mehr quadratisch konvergiert.