Beispiele zu linearen Gleichungssystemen

1. Löse, falls möglich, folgende Linearsysteme mit dem Gaußschen Verfahren:

(a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -20 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(c)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Für welche Systeme ist das Gaußsche Eliminationsverfahren ohne Spaltenpivotsuche (ohne Zeilenvertauschungen) durchführbar? Welche Systeme sind eindeutig lösbar?

2. Die Hilbertmatrix $\mathbf{H}_n = (h_{ij}) = (\frac{1}{i+j-1})$ ist ein bekanntes Beispiel für eine schlecht konditionierte Matrix. Untersuche das Gleichungssystem $\mathbf{H}_4 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $b_i = \sum_{j=1}^{4} h_{ij}$, bei dem die Eingangsdaten nur mit einer Genauigkeit von 4 Dezimalstellen vorliegen,

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.5 & 0.3333 & 0.25 \\ 0.5 & 0.3333 & 0.25 & 0.2 \\ 0.3333 & 0.25 & 0.2 & 0.1667 \\ 0.25 & 0.2 & 0.1667 & 0.1429 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0833 \\ 1.2833 \\ 0.95 \\ 0.7595 \end{pmatrix},$$

und vergleiche die numerische Lösung mit der exakten Lösung $\mathbf{x} = (1, \ldots, 1)^T$. Wie ändert sich die numerische Lösung, wenn die Eingangsdaten in `double` vorliegen? Was läßt sich in diesem Fall über die numerische Lösung von $\mathbf{H}_{20} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ aussagen?

3. Modifiziere das Programm `lineq.c` so, daß in der Matrix $\mathbf{A}$ eine LU-Zerlegung der ursprünglichen Koeffizientenmatrix zurückgegeben wird. Zeige, daß die Matrix $\mathbf{A}$ aus Beispiel 1(a) eine Dreieckszerlegung der Form $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$ besitzt mit

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix}.$$

Verwende diese Zerlegung von $\mathbf{A}$, um das Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_j = \mathbf{b}_j$ für mehrere rechte Seiten $\mathbf{b}_j$ zu lösen. Beispiel: Für die Einheitsvektoren als rechte Seiten,

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

erhält man mit den Lösungsvektoren $\mathbf{x}_j$ die Spaltenvektoren der Inversen von $\mathbf{A}$, d.h. $\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_4)$.