Beispiele zur numerischen Integration

1. Bestimme mit der zusammengesetzten Trapezregel einen Näherungswert von
$$I = \int\limits_{a=0}^{b=1.3} \frac{1}{1+x}\, \mathrm{d}x = \log(1+x)\Big|_0^{1.3}$$
für verschiedene Werte einer relativen Genauigkeit von $\epsilon := |(I - T(h))/I| = 10^{-3}, \ldots, 10^{-5}$.

2. Konvergenzverhalten der Trapezsummen $T(h)$:
Untersuche für das Integral aus Beispiel 1 das Verhalten des relativen Fehlers $|(I - T(h))/I|$ in Abhängigkeit von der Schrittweite h durch sukzessive Halbierung von h (d.h. $h_n = (b-a)/2^n$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots$) und stelle das Ergebnis graphisch dar.

3. In der Statistik tritt häufig die sogenannte *Fehlerfunktion* (engl.: *error function*) auf,
$$\mathrm{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, \mathrm{d}t \,,$$
ein Integral, das sich nicht in geschlossener Form durch elementare Funktionen ausdrücken läßt. Implementiere die zusammengesetzte Simpsonregel mit Hilfe der Trapezregel und berechne für $0 \leq x \leq 3$ Näherungswerte von $\mathrm{erf}(x)$. Stelle diese auch graphisch dar und überprüfe das Ergebnis mit Hilfe von *Gnuplot*:
`gnuplot> set xrange [0:3]; plot erf(x)`

4. Mit der 5-Punkte Gauß-Legendre-Quadraturformel werden Polynome bis zum Grad 9 exakt integriert (abgesehen von Rundungsfehlern). Für
$$\int_{-1}^{1} x^m\, \mathrm{d}x \,, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, 9$$
sollten daher die Ergebnisse der Näherungswerte auf etwa 5 Dezimalstellen genau sein (bei einfachgenauer Rechnung, d.h. mit `real` bzw. `float`). Verwende die obigen Integrale, um die Werte für die Stützstellen x_i und Gewichte w_i auf ihre Korrektheit hin zu überprüfen.

5. Berechne Näherungswerte für das bestimmte Integral
$$\int_0^{\pi/2} x\cos(x)\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - 1$$
mit der zusammengesetzten Trapezregel, der zusammengesetzten Simpsonregel und mit der 5-Punkte Gauß-Legendre-Quadraturformel. Wieviele Funktionsauswertungen müssen in jedem Fall durchgeführt werden, um jeweils auf eine Genauigkeit von 4 Dezimalstellen zu kommen?

6. Die Integration über ein unendliches Integrationsintervall stellt einen wichtigen Typ eines uneigentlichen Integrals dar. Häufig können solche Integrale durch Transformation auf ein endliches Integrationsintervall numerisch behandelt werden (vorausgesetzt, daß das ursprüngliche Integral überhaupt existiert): So kann etwa die Integration über $[0, \infty)$ durch die Transformation

$$\begin{aligned} t &= \frac{x}{1+x} \\ x &= \frac{t}{1-t} \\ \mathrm{d}x &= (1+x)^2 \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

in eine Integration über $[0, 1)$ verwandelt werden. Berechne mit dieser Transformation und z.B. einer Gauß-Legendre-Quadraturformel einen Näherungswert für das uneigentliche Integral

$$I = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+x)^2} \, \mathrm{d}x \quad .$$

Lösung: $I \approx 0.40365$