Fourier-Reihen

Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation ist eines der wichtigsten Instrumente zur Behandlung linearer Systeme, seien es gewöhnliche oder partielle lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, Anwendungen in der Signalverarbeitung, Bildrekonstruktion oder Computertomographie. Während für das Arbeiten mit formalen Methoden entscheidend ist, daß durch Fourier-Transformation komplizierte Operationen wie Differentiation, Integration oder Faltung in einfachere wie Multiplikation und Division übergehen, kommt bei numerischen Anwendungen noch dazu, daß es einen äußerst effizienten Algorithmus zur praktischen Berechnung von Fourier-Transformierten gibt, nämlich die sogenannte "schnelle" Fourier-Transformation (Fast Fourier Transform, FFT).

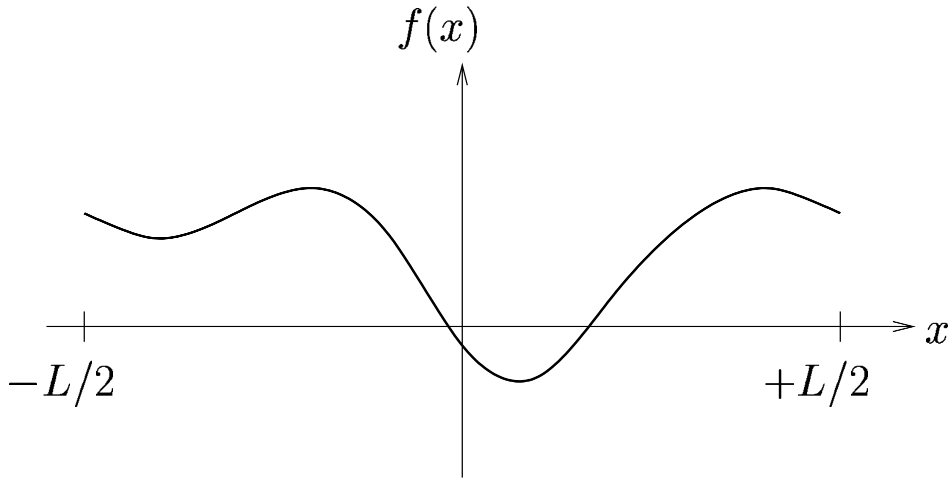
Durch die Fourier-Transformation wird einem Satz von Ausgangsdaten ein gleichwertiger Satz von transformierten Daten zugeordnet. Man nennt dabei den Raum der Ausgangsdaten den *Realraum*, den Raum der transformierten Daten aber den *Fourier-Raum*. Je nach der Beschaffenheit der Daten unterscheidet man drei Arten der Fourier-Transformation:

- Diskrete Fourier-Transformation: Ausgangsdaten und Transformierte sind jeweils endliche Folgen von Zahlenwerten
- Fourier-Reihen: Ausgangsdaten sind Funktionen über einem endlichen Intervall, Transformierte abzählbare Folgen von Zahlenwerten (bzw. umgekehrt, wenn man die Rollen von Real- und Fourier-Raum vertauscht)
- Fourier-Integrale: Ausgangsdaten und Transformierte sind jeweils Funktionen über der ganzen reellen Achse.

Wir wollen hier in erster Linie Fourier-Reihen, d.h. die Darstellung von Funktionen auf einem endlichen Intervall durch trigonometrische Funktionen, betrachten.

Fourier-Reihen

Definition



Es sei $f(x)$ eine hinreichend glatte, komplexwertige Funktion über dem Intervall $[-L/2, L/2]$. Dann läßt sich $f(x)$ als Fourier-Reihe

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{ik_n x}$$

darstellen, wobei die *Fourier-Koeffizienten* gegeben sind durch

$$c_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx \, e^{-ik_n x} \, f(x)$$

und die *Wellenzahlen* k_n durch

$$k_n = n\Delta k, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

mit

$$\Delta k = \frac{2\pi}{L}$$

Die Fourier-Transformierte von $f(x)$ besteht bei Fourier-Reihen also aus der Menge der Fourier-Koeffizienten $\{c_n\}$. Die bei deren Definition auftretenden Integrale können numerisch oder analytisch berechnet werden.

Die obige Schreibweise ist üblich, wenn es sich bei x um eine Ortsvariable handelt. Ist die unabhängige Variable die Zeit t, so wird für die Länge des Grundintervalls T verwendet, und an die Stelle der Wellenzahlen k_n treten die diskreten Frequenzen $\omega_n = n\Delta\omega$ mit $\Delta\omega = 2\pi/T$.

Wenn $f(x)$ im Intervall $[-L/2, L/2]$ stetig ist und die Funktionswerte am linken und rechten Rand des Intervalls übereinstimmen, dann konvergiert die Fourier-Reihe punktweise gegen die ursprüngliche Funktion. Ist $f(x)$ stetig bis auf endlich viele Sprungstellen, so konvergiert an diesen Sprungstellen die Fourier-Reihe gegen den Mittelwert aus linkem und rechtem Grenzwert von $f(x)$. Man kann Fourier-Reihen aber auch für allgemeinere Funktionen definieren, wobei das Gleichheitszeichen in der Darstellung dann in einem eingeschränkten Sinn gilt.

Die Wellenzahlen k_n sind so beschaffen, daß die Funktionen $e^{ik_n x}$ periodisch sind mit Periode L. Die Fourier-Reihe ist dann als Summe periodischer Funktionen natürlich ebenfalls periodisch. Wenn $f(x)$ selbst schon periodisch war, dann gilt die Darstellung durch die Fourier-Reihe auf der ganzen reellen Achse. Ist $f(x)$ nicht periodisch oder für $x \notin [-L/2, L/2]$ gar nicht erklärt, so definiert die Fourier-Reihe eine periodische Fortsetzung von $f(x)$ außerhalb des Grundintervalls.

Eigenschaften

Differentiation und Integration

Unter der Annahme, daß Differentiation und Summation vertauscht werden dürfen, ergibt sich durch Differenzieren der Fourier-Reihe

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{ik_n x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{d}{dx} e^{ik_n x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, ik_n \, e^{ik_n x} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (ik_n c_n) \, e^{ik_n x} \end{aligned}$$

Die Fourier-Koeffizienten der Ableitung einer Funktion erhält man also, indem man die Fourier-Koeffizienten der ursprünglichen Funktion mit ik_n multipliziert. Mehrmaliges Differenzieren führt entsprechend zu Multiplikation mit höheren Potenzen von ik_n.

Man sagt daher, daß beim Übergang in den Fourier-Raum Differentiation in Multiplikation (mit ik_n) übergeht. Da Differentiation und Integration zu einander inverse Operationen sind, sollte analog der Integration im Realraum die Division (durch ik_n) im Fourier-Raum entsprechen. Die letztere Aussage gilt allerdings nur für Funktionen mit $c_0 = 0$. Tatsächlich ist aber eines der wichtigsten Anwendungsgebiete der Fourier-Transformation die "Integration" von Differentialgleichungen.

Reellwertige Funktionen

Ist $f(x)$ eine reellwertige Funktion, so gilt

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{ik_n x} = f^*(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* \, e^{-ik_n x}$$

und, wenn man im letzten Ausdruck $-n$ statt n als Summationsindex verwendet und beachtet, daß $k_{-n} = -k_n$,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{ik_n x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n}^* \, e^{ik_n x}$$

Da die Funktionen $\{e^{ik_n x}\}$ linear unabhängig sind, müssen die Koeffizienten der Reihen übereinstimmen. Es gilt also, wenn man nochmals n durch $-n$ ersetzt,

$$c_n^* = c_{-n}$$

Es genügt demnach, z. B. die Fourier-Koeffizienten für $n \geq 0$ zu kennen.

Für reellwertige Funktionen setzt man daher oft

$$c_n = \frac{a_n}{2} - i\,\frac{b_n}{2}$$

(mit $a_{-n} = a_n$ und $b_{-n} = -b_n$) und schreibt die Fourier-Reihe in der Form

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n\, e^{ik_n x} + c_{-n}\, e^{ik_{-n} x} \right] = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n\, e^{ik_n x} + c_n^*\, e^{-ik_n x} \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{2} (e^{ik_n x} + e^{-ik_n x}) - i\,\frac{b_n}{2} (e^{ik_n x} - e^{-ik_n x}) \right] \end{aligned}$$

also

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(k_n x) + b_n \sin(k_n x) \right]$$

(wegen $c_0^* = c_{-0}$ ist $b_0 = 0$). Für die Koeffizienten in dieser Darstellung findet man

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx\, \cos(k_n x)\, f(x) \\ b_n &= \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx\, \sin(k_n x)\, f(x) \end{aligned}$$

Beispiele

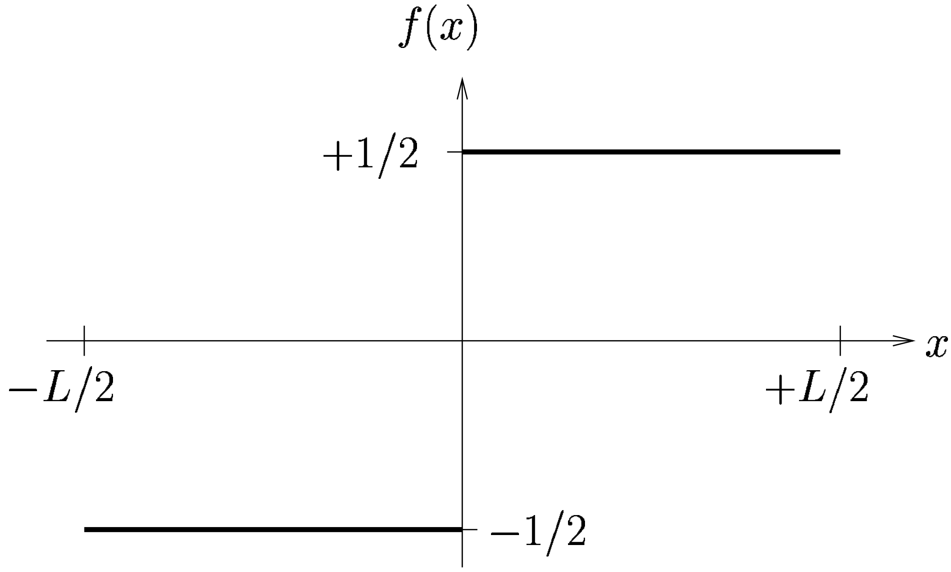
Fourier-Analyse der Heaviside-Funktion

Um die Heaviside-Funktion (Stufenfunktion)

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ 1 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

auf dem Intervall $[-L/2, L/2]$ in eine Fourier-Reihe zu entwickeln, betrachtet man statt $H(x)$ besser die Funktion

$$f(x) = H(x) - \frac{1}{2}$$



Da diese Funktion ungerade ist [d.h. $f(-x) = -f(x)$], dürfen in der Reihenentwicklung von $f(x)$ ebenfalls nur ungerade Funktionen, nämlich Sinus-Terme, vorkommen. Die Fourier-Darstellung von $f(x)$ muß also die Form

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(k_n x)$$

haben. Die Fourier-Koeffizienten berechnet man nach der allgemeinen Formel zu

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx \sin(k_n x)\, f(x) \\
&= \frac{2}{L}\left\{\int_{-L/2}^{0} dx \sin(k_n x)\left(-\frac{1}{2}\right) + \int_{0}^{L/2} dx \sin(k_n x)\left(+\frac{1}{2}\right)\right\} \\
&= \frac{2}{L}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{-\cos(k_n x)}{k_n}\bigg|_{-L/2}^{0} + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{-\cos(k_n x)}{k_n}\bigg|_{0}^{L/2}\right\} \\
&= \frac{1}{k_n L}\{1 - \cos(-k_n L/2) - \cos(k_n L/2) + 1\} \\
&= \frac{2}{k_n L}\{1 - \cos(k_n L/2)\} \\
&= \frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi}
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Gleichung noch berücksichtigt wurde, daß $k_n = 2\pi n/L$. Da $\cos(n\pi) = (-1)^n$, verschwinden die b_n nur für ungerade n nicht, und es gilt insgesamt

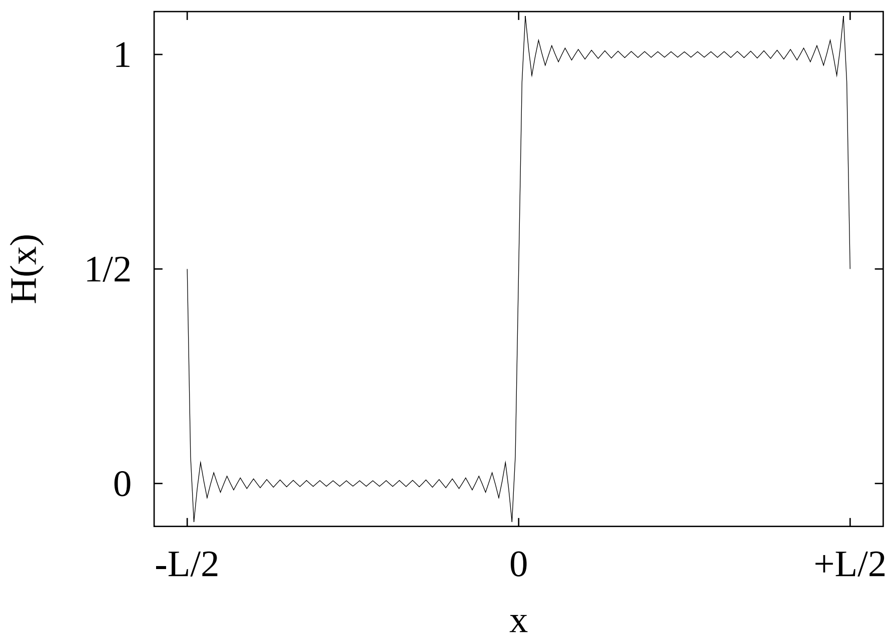
$$b_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi} & \text{für } n = 1, 3, 5 \ldots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Fourier-Darstellung von $H(x)$ ist daher

$$H(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)$$

Gibbs'sches Phänomen

Die Heaviside-Funktion ist, was die Berechnung der Fourier-Koeffizienten betrifft, zwar eines der einfachsten Beispiele für Fourier-Reihen, sie hat aber den Schönheitsfehler, daß sich zwei Unstetigkeiten im Intervall befinden, nämlich die eigentliche Sprungstelle bei $x = 0$ und die Unstetigkeit, die dadurch zustande kommt, daß die Funktionswerte bei $x = \pm L/2$ nicht übereinstimmen. Man wird daher erwarten, daß die Fourier-Reihe für alle anderen Werte von x punktweise gegen $H(x)$ konvergiert, an den Sprungstellen jedoch jeweils zum Mittelwert aus linkem und rechtem Grenzwert.



Wenn man, wie in der Praxis unvermeidlich, die Fourier-Reihe durch eine Summe von endlich vielen Termen approximiert, beobachtet man außerdem, daß beiderseits von Sprungstellen "gedämpfte Oszillationen" auftreten, die zwar auf einen Bereich beschränkt sind, der umso enger an die Sprungstelle heranrückt, je mehr Terme man in der Summe berücksichtigt, die Maximalamplitude dieser Oszillationen bleibt aber konstant. Diese Erscheinung, die man das Gibbs'sche Phänomen nennt, tritt nicht nur bei der Heaviside-Funktion, sondern auch bei anderen Funktionen mit Sprungstellen auf.

Lösung der eindimensionalen Wellengleichung

Die Tatsache, daß Differentiation durch Fourier-Transformation in Multiplikation übergeht, kann man dazu verwenden, lineare Differentialgleichungen durch einen Fourier-Ansatz zu lösen, wenn sich die Randbedingungen dafür eignen. Dies soll am Beispiel der eindimensionalen Wellengleichung für die gezupfte Saite illustriert werden.

Die eindimensionale Wellengleichung für die Auslenkung $u(x,t)$ einer bei $x=0$ und $x=L$ eingespannten Saite ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Dabei ist c die Phasengeschwindigkeit, und die Randbedingungen sind

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad \text{für } t \geq 0$$

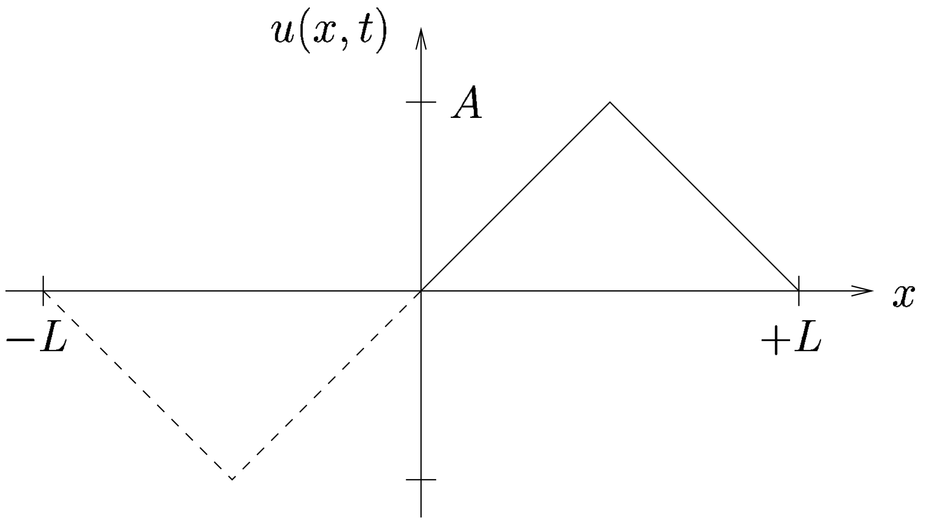
Als Anfangsbedingungen für eine in der Mitte gezupfte Saite wählen wir die Dreiecksfunktion mit Maximalamplitude A

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} \dfrac{2Ax}{L} & \text{für} \quad 0 < x < L/2 \\ \dfrac{2A(L-x)}{L} & \text{für} \quad L/2 < x < L \end{cases}$$

und

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x) = 0$$

(d.h. die Saite ist zu Beginn in Ruhe).



Die Randbedingungen implementiert man am besten, indem man $u(x,t)$ nicht auf $[0,L]$, sondern auf dem doppelten Intervall $[-L,L]$ betrachtet und $u(x,t)$ für $x<0$ ungerade fortsetzt.

In diesem Fall kann man nämlich, analog zum Beispiel der Heaviside-Funktion, die Lösung für jeden festen Zeitpunkt t in eine Sinus-Reihe bezüglich x entwickeln

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\, \sin(k_n x)$$

wobei die k_n wegen der doppelten Intervallgröße durch

$$k_n = \frac{2\pi}{2L}\, n = \frac{n\pi}{L}$$

gegeben sind und die b_n von der Zeit abhängen.

Wenn man diese Fourier-Reihe in die Differentialgleichung einsetzt und gliedweise differenziert, erhält man

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\, b_n(t)\right] \sin(k_n x) &= c^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \sin(k_n x)\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-k_n^2 c^2 b_n(t)\right] \sin(k_n x)
\end{aligned}$$

bzw. durch Koeffizientenvergleich

$$\frac{d^2 b_n(t)}{dt^2} = -k_n^2 c^2 b_n(t)$$

Die $b_n(t)$ gehorchen also einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren allgemeine Lösung

$$b_n(t) = \beta_n^+ e^{ik_n ct} + \beta_n^- e^{-ik_n ct}$$

ist. Die Koeffizienten β_n^+ und β_n^- bestimmt man aus den Anfangsbedingungen für die Wellengleichung. Es ist nämlich einerseits

$$\begin{aligned}
b_n(0) &= \beta_n^+ + \beta_n^- \\
\left.\frac{db_n(t)}{dt}\right|_{t=0} &= ik_n c \left(\beta_n^+ - \beta_n^-\right)
\end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(0)\, \sin(k_n x) \\
g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left.\frac{db_n(t)}{dt}\right|_{t=0} \sin(k_n x)
\end{aligned}$$

Da $g(x) = 0$ angenommen wurde, verschwinden alle $db_n(t)/dt$ bei $t = 0$, und es gilt

$$\beta_n^+ = \beta_n^- = \frac{1}{2}\, b_n(0)$$

Die Zeitabhängigkeit der $b_n(t)$ ist daher gegeben durch

$$b_n(t) = b_n(0)\,\cos(k_n ct)$$

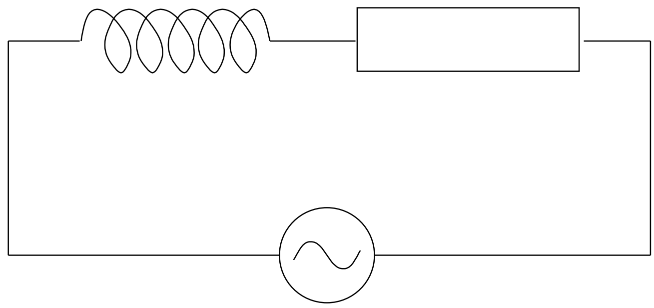
und die Lösung der partiellen Differentialgleichung läßt sich damit schreiben als

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(0)\,\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\,\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Für die Koeffizienten $b_n(0)$ findet man durch Fourier-Analyse der (ungerade fortgesetzten) Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x)$

$$b_n(0) = \begin{cases} +\dfrac{8A}{(n\pi)^2} & \text{für } n = 1, 5, 9, \ldots \\ -\dfrac{8A}{(n\pi)^2} & \text{für } n = 3, 7, 11, \ldots \\ \quad 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Elektrischer Schaltkreis mit periodischer Anregung



Das Verhalten linearer Systeme unter periodischer Anregung kann ebenfalls mit Hilfe von Fourier-Reihen untersucht werden. Als einfachstes Beispiel betrachten wir einen elektrischen Schaltkreis, bestehend aus einer Induktivität L, einem Widerstand R und einer Spannungsquelle $U(t)$. Der Strom $I(t)$ in diesem RL-Kreis gehorcht der Differentialgleichung

$$L\,\frac{dI}{dt} + RI = U(t)$$

Wenn die angelegte Spannung periodisch in der Zeit (mit Periode T) ist und etwaige Einschaltvorgänge so weit in der Vergangenheit liegen, daß ihr Einfluß vernachlässigbar ist, dann wird auch der Strom periodisch sein. Statt eine Anfangsbedingung vorzugeben, wird also hier verlangt, daß $I(t)$ *periodisch* sein soll. In diesem Fall liegt es nahe, sowohl Strom als auch Spannung in Fourier-Reihen zu entwickeln

$$\begin{aligned} U(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n\, e^{i\omega_n t} \\ I(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n\, e^{i\omega_n t} \end{aligned}$$

wobei $\omega_n = 2\pi n/T$ ist. Einsetzen in die Differentialgleichung und Vertauschen von Differentiation und Summation liefert

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (L I_n i\omega_n)\, e^{i\omega_n t} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} (R I_n)\, e^{i\omega_n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n\, e^{i\omega_n t}$$

Für die Koeffizienten muß also gelten

$$(i\omega_n L + R)\; I_n = U_n$$

Wegen der Ähnlichkeit dieser Beziehung mit dem Ohm'schen Gesetz nennt man $Z(\omega) = i\omega L + R$ den komplexen Widerstand (Impedanz) des Schaltkreises. Die aus der letzten Gleichung berechneten I_n können nun in die Fourier-Darstellung von $I(t)$ eingesetzt werden.

Das Lösungsverfahren besteht also aus den Schritten:

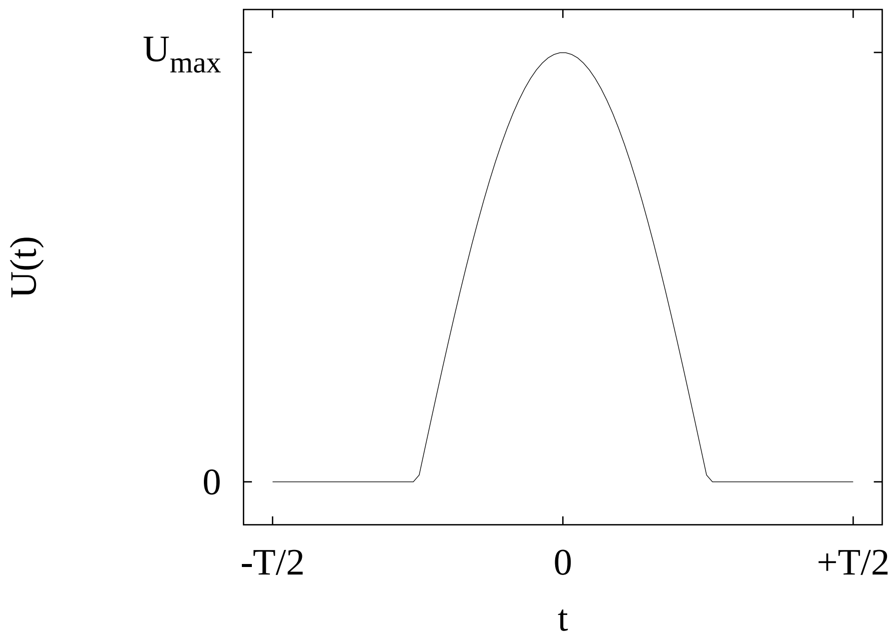
1. Fourier-Analyse der Anregung [Berechnung der Fourier-Koeffizienten U_n von $U(t)$]

2. Lösung der Differentialgleichung im Fourier-Raum

$$I_n = \frac{U_n}{i\omega_n L + R}$$

3. Fourier-Synthese der Lösung [Einsetzen der I_n in die Fourier-Reihe für $I(t)$].

Für $U(t)$ können beliebige periodische Signale vorgegeben werden, die eine Fourier-Reihe besitzen.



Besteht $U(t)$ z.B. aus positiven Halbwellen mit Maximalamplitude $U_{\max}$,

$$U(t) = \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) U_{\max} & \text{für } -T/4 \leq t \leq T/4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(wobei als Grundintervall $[-T/2, T/2]$ angenommen ist), so sind die U_n

$$U_n = \begin{cases} \frac{1}{4} U_{\max} & \text{für } n = \pm 1 \\ -\frac{\cos(n\pi/2)}{(n^2-1)\pi} U_{\max} & \text{sonst} \end{cases}$$

Darstellung von Signalen mit endlicher Abtastrate

Es sei $c(t)$ ein für alle Zeiten $-\infty < t < \infty$ definiertes, reell- oder komplexwertiges Signal, z.B. der Wert einer Observablen eines physikalischen Prozesses. Wenn $c(t)$ absolut integrierbar ist, dann kann man als Spektrum des Signals

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-i\omega t}\, c(t)$$

definieren und daraus mit Hilfe des Fourier-Integrals (einer Verallgemeinerung der Fourier-Reihe)

$$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{i\omega t}\, f(\omega)$$

das Signal wieder zurückgewinnen. (Bei welcher der beiden Gleichungen der Faktor $1/2\pi$ angebracht wird, ist eine Frage der Konvention.)

Dies ist jedoch eine idealisierte Betrachtungsweise, denn in der Praxis können Signale immer nur mit einer endlichen Abtastrate $1/\Delta t$, entsprechend einer endlichen zeitlichen Auflösung Δt, aufgezeichnet werden. Es existieren also eigentlich nur Meßwerte $c_n = c(t_n)$ zu diskreten Zeitpunkten $t_n = n\Delta t$. In dieser Situation liegt es nahe, die Theorie der Fourier-Reihen auf das Signal anzuwenden, wobei allerdings die Rollen von Real- und Fourier-Raum vertauscht werden, d.h. die Koeffizienten c_n bilden jetzt die Originaldaten, während die Funktion $f(\omega)$ die Transformierte darstellt. Man kann daher ansetzen[1]

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{1}{\Omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{-i\omega t_n} = \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{-i\omega t_n} \\ c_n &= \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} d\omega\, e^{i\omega t_n}\, f(\omega) \end{aligned}$$

Dabei wurden gegenüber der zu Beginn des Kapitels gegebenen Definition der Fourier-Reihen die Ersetzungen $x \to \omega$, $k_n \to t_n$, $\Delta k \to \Delta t$ und $L = 2\pi/\Delta k \to \Omega = 2\pi/\Delta t$ vorgenommen.

[1] Damit die Darstellung von $f(\omega)$ als Reihe konvergiert, müssen die c_n für $n \to \pm\infty$ hinreichend schnell verschwinden; das ist für eine Messung endlicher Dauer, bei der nur endlich viele $c_n \neq 0$ sein können, jedenfalls erfüllt.

Außerdem wurde der Normierungsfaktor $1/\Omega$ (früher $1/L$) an einer anderen Stelle angebracht; das hat den Vorteil, daß die Formeln im Limes $\Delta t \to 0$, $\Omega \to \infty$ in die des Fourier-Integrals übergehen.

Bemerkenswert an diesen Ergebnissen ist, daß zur Darstellung der c_n nur Frequenzen bis zu einer Grenzfrequenz,

$$\omega_{\max} = \frac{\Omega}{2} = \frac{\pi}{\Delta t}$$

der Nyquist-Frequenz, beitragen. Das mit Hilfe der Fourier-Reihe berechnete Spektrum wird also nur dann einen sinnvollen Schätzwert für das "ideale" Spektrum abgeben, wenn dieses für $|\omega| > \omega_{\max}$ näherungsweise verschwindet, d.h. Band-limitiert ist. Da die Nyquist-Frequenz invers porportional zu Δt ist, bedeutet das, daß man im Realraum die Auflösung mindestens so fein wählen muß, daß $c(t)$ zwischen den Stützpunkten hinreichend glatt ist, also durch die Diskretisierung keine Information verlorengeht.