Beispiele zur Fourier-Transformation

1. Es seien die folgenden Funktionen auf dem Intervall $[-1, 1]$ gegeben

   - eine Funktion mit Sprungstellen

   $$f_1(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

   - eine Funktion mit Knickstellen

   $$f_2(x) = \begin{cases} 1 + 2x & -1 \le x < 0 \\ 1 - 2x & 0 \le x < 1 \end{cases}$$

   - eine glatte Funktion

   $$f_3(x) = \begin{cases} 4(x + x^2) & -1 \le x < 0 \\ 4(x - x^2) & 0 \le x < 1 \end{cases}$$

   Die Funktionen sind so gewählt, daß (bis auf einen Faktor) f_1 die Ableitung von f_2 ist und f_2 die von f_3. Die Fourier-Koeffizienten von f_2 und f_3 lassen sich daher leicht aus denen von f_1 (vgl. Heaviside-Funktion) berechnen. Wie viele Terme muß man in der Fourier-Entwicklung von f_1, f_2 und f_3 berücksichtigen, um jeweils eine graphisch akzeptable Darstellung der Funktion zu erhalten?

2. Wenn die Fourier-Koeffizienten einer Funktion sich nicht analytisch berechnen lassen, kann man die Integrale in

   $$c_n = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx \, e^{-ik_n x} f(x)$$

   (bzw. a_n und b_n bei reellwertigen Funktionen) immer noch numerisch auswerten. Führe auf diese Weise die Fourier-Darstellung der Funktion

   $$f(x) = \begin{cases} (1 - x^2)^2 \, e^{-x^2} & -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   auf dem Intervall $[-2, 2]$ durch.

3. Ist $f(x)$ ein Funktion auf dem Intervall $[-L/2, L/2]$ mit den Fourier-Koeffizienten c_n, so besagt das Translationstheorem, daß die Fourier-Koeffizienten von $f(x + \alpha)$ durch $e^{ik_n\alpha} \, c_n$ gegeben sind. Warum? Wie lautet das Theorem für die Koeffizienten a_n und b_n einer reellwertigen Funktion? Wende das Theorem auf eine der Funktionen aus den obigen Beispielen an und verifiziere das Ergebnis graphisch durch Zeichnen der Fourier-Darstellung von $f(x + \alpha)$.

4. Betrachte die zeitabhängigen Signale $c(t)$, die durch die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen gegeben sind

   (a) harmonischer Oszillator
   $$\ddot{x} = -\omega_0^2\, x$$
   mit $\omega_0^2 = 1$ und Anfangsbedingungen $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$;

   (b) mathematisches Pendel
   $$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{\ell}\,\sin\varphi$$
   mit $g/\ell = 1$ und Anfangsbedingungen $\varphi(0) = 3\pi/4$, $\dot{\varphi}(0) = 0$;

   (c) van der Pol Oszillator (alternativ zu b)
   $$\ddot{x} = \mu(1 - x^2)\dot{x} - x$$
   mit $\mu = 5$ und Anfangsbedingungen $x(0) = 0.01$, $\dot{x}(0) = 0$.

   Die Lösungen aller drei Systeme sind, nach einer eventuellen Einschwingphase, strikt periodisch. Der nächstliegende Ansatz, die Spektren dieser Prozesse zu berechnen, besteht also darin, die Lösungen über einem geeigneten Grundintervall T in Fourier-Reihen zu entwickeln. Die dabei auftretenden Fourier-Koeffizienten bilden dann ein Linienspektrum bei den Frequenzen $\omega_n = 2\pi n/T$.

   Altenativ dazu kann man die Periodizität auch ignorieren und die numerischen Lösungen der Differentialgleichungen als allgemeine, diskret abgetastete Signale, z.B. mit einer durch den (bei der numerischen Integration verwendeten) Zeitschritt Δt gegebenen Abtastrate $1/\Delta t$, ansehen. Wie sehen in diesem Fall die Spektren aus, wenn man der Auswertung eine größere (ganze oder nicht-ganze) Zahl von Perioden der Lösung zugrunde legt? Welches Problem ergibt sich bei der Normierung der Spektren von periodischen, nicht-abklingenden Funktionen?