

## 9. Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGI)

**Motivation:** Viele Prozesse der Natur werden durch Differentialgleichungen oder Systeme von Differentialgleichungen beschrieben. Hierbei werden Beziehungen zwischen der Funktion  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und ihrer Ableitungen  $y'(x)$ ,  $y''(x)$ , ... dargestellt, die man nach  $y$  auflösen muss.

- $y' = \alpha y$  mit  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  
exponentieller Wachstums- bzw. Zerfallprozess, allgemeine Lösung ist  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y(t) = Ce^{\alpha t}$  mit beliebiger Konstante  $C \in \mathbb{R}$ . Meist wird die Konstante durch die Angabe eines *Anfangswerts*  $y(t_0) = y_0$  bestimmt.
- $y' = \alpha y(R - y)$  mit  $\alpha > 0$ ,  
logistischer Wachstumsprozess, Lösungen sind  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y(t) = \frac{R}{1 + Ce^{-\alpha R t}}$  mit beliebiger Konstante  $C > 0$ . Zu dem Anfangswert  $0 < y(0) = y_0 < R$  ermittelt man  $C = \frac{R}{y_0} - 1 > 0$ .  
Beachte: Es gibt andere Lösungen mit  $C \leq 0$ .

- Ein System von Differentialgleichungen kann die Dynamik und die Wechselwirkung mehrerer Prozesse modellieren, wie z.B. chemische Reaktionsprozesse: Sei  $y_j(t)$  die Konzentration des chemischen Stoffes  $S_j$  zum Zeitpunkt  $t > 0$ . Die Dynamik eines Reaktionsprozesses (chemischer Pyrolyse) wird wie folgt beschrieben

$$y_1' = -k_1 y_1 - k_3 y_1 y_3,$$

$$y_2' = k_1 y_1 - k_2 y_2 y_3,$$

$$y_3' = k_1 y_1 - k_2 y_2 y_3 - k_3 y_1 y_3 + k_4 y_4,$$

$$y_4' = k_3 y_1 y_3 - k_4 y_4,$$

$$y_5' = k_2 y_2 y_3,$$

$$y_6' = k_4 y_4,$$

wobei  $k_j$  die vorgegebenen Reaktionsgeschwindigkeitskonstanten sind. Die Anfangsbedingungen sind:

$$y_1(0) = 1.8 \cdot 10^{-3}, \quad \text{und} \quad y_j(0) = 0, \quad j = 2, \dots, 6.$$

- Die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial T(t, x)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T(t, x)}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in (0, \ell),$$

beschreibt die Temperaturverteilung  $T(x, t)$  eines Stabs der Länge  $\ell$  zur Zeit  $t > 0$ . Anfangs- und Randwerte sind  $T(x, 0) = f(x)$  bzw.  $T(0, t) = T(\ell, t) = 0$ . Die gesuchte Lösung  $T(x, t)$  kann man mit Hilfe eines Systems gewöhnlicher Dgl. erster Ordnung annähern:

$$y_j' = \frac{k \cdot n_x}{\ell} (y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}), \quad j = 1, \dots, n_x - 1, \quad n_x \in \mathbb{N},$$

wobei

$$y_j(t) \approx T(x_j, t), \quad x_j = \frac{j \cdot \ell}{n_x}, \quad j = 1, \dots, n_x - 1.$$

Aufgrund der gegebenen Randwerte gilt  $y_0(t) = y_{n_x}(t) = 0, t > 0$ .

- Hamiltonische Formulierung der Bewegungsgleichung ist die gewöhnliche Dgl. zweiter Ordnung

$$q''(t) = -m^{-1} \frac{\partial H}{\partial q}, \quad t > 0,$$

mit Anfangsbedingungen

$$q(0) = q_0, \quad q'(0) = p_0.$$

Oder äquivalent,

$$y'(t) = \begin{pmatrix} q'(t) \\ p'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^{-1} p(t) \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix}, \quad t > 0,$$

mit Anfangsbedingungen

$$y(0) = \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix}.$$

**Definition:** Gleichungen der Gestalt

$$y' = f(t, y) \quad f : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (a, b) \subseteq \mathbb{R}, \quad (c, d) \subseteq \mathbb{R}, \quad (*)$$

heißt Differentialgleichung 1. Ordnung. Eine *Lösung* der Differentialgleichung ist eine differenzierbare Funktion  $y : J \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y(t) \in (c, d)$  für alle  $t \in J$ , die die Gleichung (\*) für alle  $t \in J$  erfüllt.

**Beispiel:**  $y' = 2ty - t^2y^3$  mit  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t, y) = 2ty - t^2y^3$ .

**Definition:** Eine *Anfangswertaufgabe* besteht aus

$$y' = f(t, y) \quad f : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (a, b) \subseteq \mathbb{R}, \quad (c, d) \subseteq \mathbb{R}, \quad (*)$$

sowie einer Anfangsbedingung  $y(t_0) = y_0$ ,  $(t_0, y_0) \in (a, b) \times (c, d)$ .

Eine Funktion  $y : J \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $J \subset (a, b)$  ist Lösung der AWA, wenn  $t_0 \in J$  sowie  $y(t_0) = y_0$  gilt und wenn  $y$  die Differentialgleichung (\*) löst.

**Bemerkung:** Im Allgemeinen gilt  $J \subset (a, b)$ . Die AWA mit  $(a, b) = \mathbb{R}$

$$y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0,$$

hat die eindeutige Lösung  $y(t) = \tan(t)$  auf  $J = (-\pi/2, \pi/2)$ .

**9.1 Existenz- und Eindeigkeitsatz von Picard und Lindelöf:** Die Funktion  $f : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig. Weiterhin sei  $f$  Lipschitz-beschränkt bzgl.  $y$ , d.h. es existiert eine Lipschitzkonstante  $0 \leq L < \infty$  mit

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall (t, y_1), (t, y_2) \in (a, b) \times (c, d).$$

Dann existiert zu jedem Punkt  $(t_0, y_0) \in (a, b) \times (c, d)$  ein Intervall  $J = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ ,  $\delta > 0$ , sowie eine differenzierbare Funktion  $y : J \rightarrow \mathbb{R}$ , die die AWA

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

auf  $J$  löst. Jede weitere Lösung  $z = z(t)$  derselber AWA stimmt auf  $J$  mit  $y$  überein.

**Beispiele:**

- (i)  $f(t, y) = 2\sqrt{y}$  ist in einer Umgebung von 0 nicht Lipschitz-beschränkt.
- (ii)  $f(t, y) = y^2$  ist auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  stetig, auf jedem Kompaktum Lipschitz-beschränkt bzgl.  $y$ .

**Bemerkungen zum Beweis:** Der Satz von Picard-Lindelöf ist im Wesentlichen eine Konsequenz des Banachschen Fixpunktsatzes.

- (a) Die Funktion  $y : J \rightarrow \mathbb{R}$  löst die AWA  $y' = f(t, y)$ ,  $y(t_0) = y_0$ , genau dann, wenn sie löst  $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$ ,  $t \in J$ .
- (b) Definiere eine Abbildung  $\Phi : C(J) \rightarrow C(J)$  durch

$$\Phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds, \quad t \in J.$$

Beachte, dass  $\Phi$  eine Selbstabbildung von  $C(J)$  ist, da das Parameterintegral auf der rechten Seite eine steige Funktion ist.

Kontraktionseigenschaft von  $\Phi$ : für  $y_1, y_2 \in C(J)$  gilt

$$\begin{aligned} \max_{t \in J} |\Phi(y_1)(t) - \Phi(y_2)(t)| &\leq \max_{t \in J} \left| \int_{t_0}^t L \cdot \max_{s \in J} |y_1(s) - y_2(s)| ds \right| \\ &\leq L \delta \max_{s \in J} |y_1(s) - y_2(s)|. \end{aligned}$$

Für hinreichend kleines  $\delta > 0$  ist  $L \delta < 1$ .

- (c) *Maximale Lösung:* Zur Lösung  $y : J \rightarrow \mathbb{R}$  der AWA existiert eine (maximale) Lösung  $z$ , die auf  $J = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  mit  $y$  übereinstimmt und deren Graph für fallendes und wachsendes  $t$  gegen den Rand von  $(a, b) \times (c, d)$  strebt: z.B. die eindeutige Lösung der AWA  $y' = y^2$ ,  $y(0) = 3$  in der Umgebung von  $t_0 = 0$  ist

$$y(t) = \frac{3}{1 - 3t}, \quad t \in (-\delta, \delta).$$

Die maximale Lösung  $y$  ist also für  $t \in (-\infty, 1/3)$  definiert.

- (d) Die Iteration-Abbildung  $\Phi$  definiert die Picard-Iteration:

$$y^{(k+1)}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y^{(k)}(s)) ds, \quad y^{(0)} = y_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Also für die AWA aus (c) gilt

$$y^{(0)}(t) = 3,$$

$$y^{(1)}(t) = 3 + \int_0^t 3^2 ds = 3 + 9t$$

$$y^{(2)}(t) = 3 + \int_0^t (3 + 9s)^2 ds = 3 + 9t + 27t^2 + 27t^3$$

...



## 9.2 Störungssatz: **Kondition einer AWA** Gegeben seien die Anfangswertaufgaben

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y), & y(t_0) &= y_0 \\ z' &= g(t, z), & z(t_0) &= z_0 \end{aligned} \quad (t, y) \in (a, b) \times (c, d).$$

mit stetigen Funktionen  $f$  und  $g$ . Die Funktion  $f$  sei auf  $(a, b) \times (c, d)$  Lipschitz-beschränkt bzgl.  $y$  und besitze die Lipschitz-Konstante  $L > 0$ . Dann gilt für  $y$  und  $z$  auf dem gemeinsamen Lösungsintervall  $J \subset (a, b)$

$$\|y(t) - z(t)\| \leq e^{L(t-t_0)} \left\{ \|y_0 - z_0\| + \left| \int_{t_0}^t \epsilon(s) ds \right| \right\}, \quad t \geq t_0, \quad (*)$$

wobei  $\epsilon(s) = \sup_{v \in (c, d)} \|f(s, v) - g(s, v)\|$  gesetzt wird.

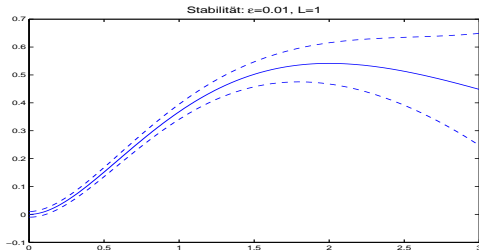
### Bemerkung:

- (a) Die Abschätzung (\*) ist die bestmögliche ( $f = g$ ): Die Funktionen  $y(t) = y_0 e^{L(t-t_0)}$  und  $z(t) = z_0 e^{L(t-t_0)}$  sind für  $t \geq t_0$  die Lösungen von

$$y' = L \cdot y, \quad y(t_0) = y_0, \quad \text{bzw.} \quad z' = L \cdot z, \quad z(t_0) = z_0$$

mit  $L > 0$  und es gilt  $y(t) - z(t) = e^{L(t-t_0)}(y_0 - z_0)$ .

- (b) Für großes  $t$  können die Lösungen auch bei kleineren Störungen in den Daten  $y_0$  erheblich variieren, d.h. im Fall  $n = 1$ , dass sich der Graph von  $z$  innerhalb eines "Korridors" um den Graphen von  $y$  befindet, der sich mit wachsendem Abstand  $|t - t_0|$  öffnet:



- (c) Der Beweis von 9.2 mit  $f = g$  folgt aus

**Gronwall-Lemma:** Für jedes  $C \geq 0$  und beliebiges stückweise stetiges  $w(t) \geq 0, t \geq t_0$ , impliziert

$$w(t) \leq C + L \int_{t_0}^t w(s) ds, \quad L \geq 0,$$

die Ungleichung

$$w(t) \leq C e^{L(t-t_0)}.$$

Beweis (von Gronwall-Lemma): Wir setzen

$$\phi(t) := L \int_{t_0}^t w(s) ds, \quad t \geq t_0,$$

und erhalten aus der Voraussetzung

$$\psi(t) := w(t) - \phi(t) \leq C.$$

Dann ist  $\phi$  stetig und stückweise differenzierbar,  $\psi$  stückweise stetig. Man rechnet leicht nach

$$\phi'(t) = Lw(t) = L\phi(t) + L\psi(t), \quad \phi(t_0) = 0. \quad (*)$$

(An Sprungstellen von  $w$  sind die einseitigen Ableitungen von  $\phi$  und die einseitigen Grenzwerte  $w(t-)$  und  $w(t+)$  in der Identität gemeint, so wie etwa  $|t|$  als Stammfunktion von  $\text{sign}(t)$  zu verstehen ist.)

Durch (\*) ist eine lineare AWA gegeben, ihre Lösung lautet

$$\phi(t) = e^{L(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-L(s-t_0)} L\psi(s) ds.$$

Die Ungleichungen  $\psi(s) \leq C$  und  $L \geq 0$  ergeben (beachte hierbei auch  $t \geq t_0$ )

$$\phi(t) \leq e^{L(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-L(s-t_0)} LC ds = e^{L(t-t_0)} \left( C - Ce^{-L(t-t_0)} \right) = Ce^{L(t-t_0)} - C,$$

und hieraus folgt weiter

$$w(t) = \phi(t) + \psi(t) \leq \phi(t) + C \leq Ce^{L(t-t_0)}.$$

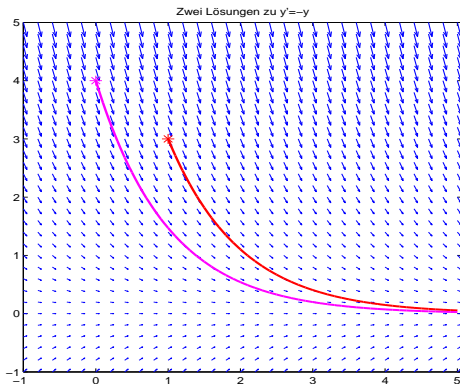
## 9.3 Richtungsfeld und Einschrittverfahren

Die *Differentialgleichung*

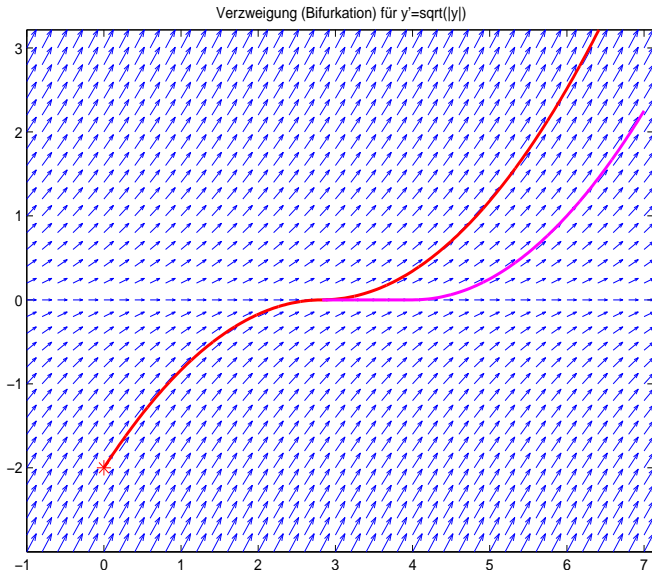
$$y' = f(t, y) \quad (*)$$

lässt sich veranschaulichen im *Richtungsfeld*: wenn der Punkt  $(t, y) \in \mathbb{R}^2$  zum Graphen einer Lösung  $y = y(t)$  gehört, so wird durch  $(*)$  die **Steigung**  $f(t, y)$  in diesem Punkt angegeben. Wir zeichnen ein kurzes Geradenstück mit dieser Steigung und bekommen einen Eindruck über den weiteren Verlauf des Graphen von  $y$ :

- Zur Differentialgleichung  $y' = -y$  erhalten wir z.B. die Lösungen:



- Zur Differentialgleichung  $y' = \sqrt{|y|}$  erhalten wir Lösungen, die sich verzweigen können:



**Definition:** Zu gegebener AWA  $y' = f(t, y)$ ,  $y(t_0) = y_0$  und gegebener Schrittweite  $h > 0$  heißt der Algorithmus

$$t_{k+1} := t_k + h, \quad y_{k+1} := y_k + h F(f, t_k, y_k, h),$$

für  $k = 0, 1, \dots, N - 1$  ein *explizites Einschrittverfahren* mit der *Zuwachsfunktion*  $F = F(f, t, y, h)$ .

**Bemerkung:**

- (a) Die *Einschritt-Verfahren* orientieren sich am Richtungsfeld der Differentialgleichung.
- (b) Solche Verfahren lassen sich in einfacher Weise auf Systeme von Differentialgleichungen verallgemeinern. Dann ist die Zuwachsfunktion  $F$  vektorwertig, genau so wie  $y$  und die Funktion  $f$ .

Beispiele: explizite Einschrittverfahren

(a) Das **Euler-Verfahren** ist 1-stufig

$$K_1 := f(t, y), \quad F(f, t, y, h) = K_1.$$

(b) Das **Verfahren von Heun 2. Ordnung** ist 2-stufig

$$K_1 := f(t, y), \quad K_2 := f(t + h, y + hK_1), \\ F(f, t, y, h) = \frac{1}{2}(K_1 + K_2).$$

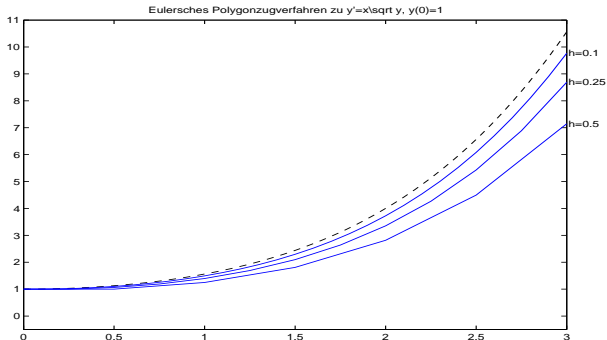
(c) Das **klassische Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung** ist 4-stufig

$$K_1 = f(t, y), \quad K_2 = f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}K_1\right), \\ K_3 = f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}K_2\right), \quad K_4 = f(t + h, y + hK_3), \\ F(f, t, y, h) = \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4).$$

**Beispiel:** Gegeben sei die AWA  $y' = t\sqrt{y}$ ,  $y(0) = 1$ . Das Euler-Verfahren:

$t_k$	$y(t_k)$	$y_k(h = 0.5)$	$y_k(h = 0.25)$	$y_k(h = 0.1)$
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.5000	1.1289	1.0000	1.0625	1.1017
1.0000	1.5625	1.2500	1.3960	1.4930
1.5000	2.4414	1.8090	2.0978	2.2964
2.0000	4.0000	2.8178	3.3519	3.7253
2.5000	6.5664	4.4964	5.4293	6.0842
3.0000	10.5625	7.1470	8.6897	9.7697

Die Polygonzüge stellen Näherungen an den Graphen der Lösung dar, die für wachsendes  $x$  jedoch an Genauigkeit verlieren.





**Definition:** Zu gegebener Anfangswertaufgabe  $y' = f(t, y)$ ,  $y(t_0) = y_0$  und gegebener Schrittweite  $h > 0$  heißt der Algorithmus

$$t_{k+1} := t_k + h, \quad y_{k+1} := y_k + h F(f, t_k, y_k, y_{k+1}, h)$$

für  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ , ein *implizites Einschrittverfahren* mit der *Zuwachsfunktion*  $F = F(f, t, y, \tilde{y}, h)$ .

**Bemerkung:** Die implizite Gleichung  $y_{k+1} := y_k + h F(f, t_k, y_k, y_{k+1}, h)$  wird mit einem Iterationsverfahren näherungsweise gelöst:

- (a) Der Startwert  $y_{k+1}^{(0)}$  (Prädiktor) für das Iterationsverfahren wird mit einem expliziten Einschrittverfahren bestimmt.
- (b)<sub>1</sub> Dann verwendet man z.B. die einfache Fixpunktiteration

$$y_{k+1}^{(s+1)} = y_k + h F(f, t_k, y_k, y_{k+1}^{(s)}, h), \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

Die Kontraktionseigenschaft der Fixpunkt-Iteration wird durch die hinreichend kleine Schrittweiten  $h > 0$  gewährleistet. Es gilt  $y_{k+1} \approx y_{k+1}^{(s+1)}$  für ein  $s \in \mathbb{N}_0$ .

- (b)<sub>2</sub> Alternativ verwendet man für

$$y_{k+1} - y_k - h F(f, t_k, y_k, y_{k+1}, h) = 0.$$

das Newton-Verfahren. Für die Konvergenz des Newton-Verfahrens ist die Wahl des Startwerts  $y_{k+1}^{(0)}$  entscheidend.

## Implizite Einschrittverfahren

- (a) **Implizites Euler-Verfahren** (im Englischen “backward Euler” genannt):

$$F = f(t + h, y(t + h)).$$

Als Prädiktor wird  $y_{k+1}^{(0)} = y_k$  verwendet.

- (b) **Implizite Trapez-Methode:**

$$F = \frac{1}{2} (f(t, y(t)) + f(t + h, y(t + h))).$$

Prädiktor wird mit dem Euler-Verfahren bestimmt.

- (c) **Implizite Mittelpunktsregel:**

$$F = f\left(t + \frac{h}{2}, \frac{y(t) + y(t + \frac{h}{2})}{2}\right).$$

Prädiktor wird mit dem Euler-Verfahren bestimmt.

**Beispiel:** AWA:  $y' = y - 2 \sin t$ ,  $y(0) = 1$ , mit  $y(t) = \sin(t) + \cos(t)$ .

- Euler-Verfahren:  $y_{k+1} = (1 + h)y_k - 2h \sin(t_k)$

$h$	$ y_{1/h} - y(1) $	$ y_{2/h} - y(2) $	$ y_{4/h} - y(4) $
$2^{-4}$	0.0647	0.2271	1.5101
$2^{-5}$	0.0332	0.1176	0.8063
$2^{-6}$	0.0168	0.0302	0.4170

- implizite Trapez-Methode:

$$y_{k+1} = \left(1 + \frac{h}{2}\right) y_k + \frac{h}{2} y_{k+\frac{1}{2}} - h(\sin(t_k) + \sin(t_{k+1}))$$

$h$	$ y_{1/h} - y(1) $	$ y_{2/h} - y(2) $	$ y_{4/h} - y(4) $
$2^{-4}$	0.0002739	0.0002956	0.0002493
$2^{-5}$	0.0000685	0.0000740	0.0000618
$2^{-6}$	0.0000171	0.0000185	0.0000154

**Beachte:** Der Fehler beim Euler-Verfahren ist proportional zu  $h$  und bei der impliziten Trapez-Methode proportional zu  $h^2$ . Beachte: Für zunehmendes  $k$  kann auch der Fehler zunehmen.

## Konsistenz und Konvergenz von Einschrittverfahren (ESV)

Die Funktion  $f$  sei hinreichend oft stetig differenzierbar.

Man fragt sich, ob und wie schnell die errechneten Näherungen  $y_k$  die Werte  $y(t_k)$  der exakten Lösung  $y(t)$  approximieren.

**Definition:** Zur AWA  $y' = f(t, y)$ ,  $y(t_0) = y_0$ , bezeichnet

$$E_h(t_k) := E_h(F, t_k) = y(t_k) - y_k$$

den globalen Diskretisierungsfehler an der Stelle  $t_k$  des ESVs mit der Zuwachsfunktion  $F$ .

**Definition:** Ein Einschrittverfahren mit der Zuwachsfunktion  $F$  heißt konvergent von der Ordnung  $p$ , falls gilt

$$\|E_h\|_\infty := \max_{k=0, \dots, N-1} |y(t_k) - y_k| = O(h^p), \quad h \rightarrow 0.$$

Der globale Fehler  $E_h(t_k)$  entsteht durch Akkumulation von lokalen Fehlern an den Stellen  $t_0, \dots, t_{k-1}$ . Um das präziser zu beschreiben, braucht man den lokalen Abbruchfehler.

**Definition:** Sei  $z(t)$  die Lösung der AWA

$$z'(t) = f(t, z), \quad z(t_j) = y(t_j), \quad (\text{oder } z(t_j) = y_j)$$

und

$$z_h(t_j + h) = y(t_j) + h F(f, t_j, y(t_j))$$

das Resultat, das das Einschrittverfahren nach einem Schritt zum Startwert  $(t_j, y(t_j))$  liefert. Dann heißt

$$\tau_h(t_j) := z(t_j + h) - z_h(t_j + h)$$

der lokale Abbruchfehler auf  $(t_j, t_j + h)$ .

Ein wesentliches Qualifikationskriterium eines Verfahrens stellt der folgende Begriff der Konsistenzordnung dar, der als Maß für die Größe des lokalen Abbruchfehlers dient.

**Definition:** Ein ESV heißt mit der AWA  $y' = f(t, y)$ ,  $y(t_0) = y_0$ , konsistent von der Ordnung  $p$ , falls

$$r_h(s) := \frac{\tau_h(s)}{h} = \mathcal{O}(h^p), \quad h \rightarrow 0,$$

für alle  $p$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen  $f : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$  und alle  $(s, y) \in (a, b) \times (c, d)$  gilt.

**Bemerkung:**

- (a) Die Konstante in dem  $\mathcal{O}$ -Term ist unabhängig von  $s$  und  $y(s)$ .
- (b) Bei konsistenten Verfahren (d.h.  $p = 1$ ) soll gelten

$$\lim_{h \rightarrow 0} F(f, t, y, h) = f(t, y), \quad t \geq t_0.$$

- (c) **Satz:** Sei  $F$  für alle ( $p$ -mal) stetig partiell differenzierbaren Funktionen  $f : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$  ebenfalls ( $p$ -mal) stetig partiell differenzierbar. Dann gilt

Konsistenz der Ordnung  $p \iff$  Konvergenz der Ordnung  $p$ .

### Beispiel: Konsistenzordnung expliziter Verfahren

Die Differentialgleichung  $y' = f(t, y)$  mit  $f \in C^1((a, b) \times (c, d))$  sei gegeben. Für  $(s, y) \in (a, b) \times (c, d)$  sei  $z$  die Lösung von  $z' = f(t, z)$ ,  $z(s) = y(s)$ .

Taylorentwicklung von  $z$  mit Entwicklungspunkt  $s$  ergibt für  $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} (*) \quad \frac{z(s+h) - z(s)}{h} &= z'(s) + \frac{h}{2}z''(s) + \mathcal{O}(h^2) \\ &= f(s, y) + \frac{h}{2}(f_s(s, y) + f(s, y)f_y(s, y)) + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

(a) Das Eulersche Polygonzugverfahren hat die Konsistenzordnung  $p = 1$ :  
Wir vergleichen (\*) mit der Taylorentwicklung  $F(f, s, y, h) = f(s, y)$  von  $F$ . Übereinstimmung liegt nur im konstanten Term vor, also ist  $r_h(s) = \mathcal{O}(h)$ .

(b) Das implizite Euler-Verfahren hat die Konsistenzordnung  $p = 1$ :  
Taylorentwicklung von  $F(f, s, y, \tilde{y}, h) = f(s+h, \tilde{y})$  ergibt

$$\begin{aligned} F(f, s, y, \tilde{y}, h) &= f(s, y) + hf_x(s, y) + (\tilde{y} - y)f_y(s, y) + \mathcal{O}(h^2) & (2) \\ &\stackrel{(1)}{=} f(s, y) + hf_s(s, y) + hF(f, s, y, \tilde{y}, h)f_y(s, y) + \mathcal{O}(h^2) \\ &\stackrel{(2)}{=} f(s, y) + hf_s(s, y) + hf(s, y)f_y(s, y) + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

Nur das konstante Glied stimmt mit der Entwicklung in (\*) überein.

## Liste von eignen Einschrittverfahren:

Verfahren	Konsistenzordnung	Konvergenzordnung
Polygonzugverfahren	1	1
verb. Polygonzugverf.	2	2
Verf. von Heun 2. Ordnung	2	2
klassisches RK-Verf.	4	4
implizites Euler-Verf.	1	1
Trapezregel	2	2
implizite Mittelpunktsregel	2	2



**Beispiel:** Wir vergleichen das explizite und das implizite Euler-Verfahren zur **steifen** Dgl.  $y' = -10y$  mit dem AW  $y(0) = 1$ . Die exakte Lösung lautet  $y(t) = e^{-10t}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

(a) Das explizite Euler-Verfahren zur Schrittweite  $h$  liefert

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) = (1 - 10h)y_k.$$

Also ist  $y_k = (1 - 10h)^k y_0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Für  $h > 1/5$  ist  $y_k$  unbeschränkt, im Gegensatz zur exakten Lösung  $y$ . Diese Werte  $y_k$  sind unbrauchbar.

(b) Das implizite Euler-Verfahren zur Schrittweite  $h$  liefert

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1}) = y_k - 10hy_{k+1}.$$

Anstelle einer Fixpunktiteration lösen wir diese lineare Gleichung nach  $y_{k+1}$  auf und erhalten

$$y_{k+1} = \frac{1}{1 + 10h} y_k = (1 + 10h)^{-k-1} y_0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Für beliebige  $h > 0$  (insbesondere für große Schrittweiten) zeigt  $y_k$  dasselbe asymptotische Verhalten  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 0$  wie die exakte Lösung  $y$ .