## 7. Nichtlineare Gleichngssysteme

Problem 7: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig. Löse $f(x) = 0$.

Das Gleichungssystem $f(x) = 0$ lässt sich in die Fixpunktgleichung $x = \phi(x)$ umschreiben , wobei $\phi : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Beispielsweise wählt man

$$\phi(x) = x + C(x)\,f(x), \quad C(x)C(x)^{-1} = I, \quad x \in D.$$

Definition: Die Funktion $\phi : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt

(*i*) Lipschitz-stetig mit der Lipschitzkonstante $L \geq 0$, falls

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle} \quad x, y \in D.$$

(*ii*) kontrahierend mit Kontraktionszahl $L$, falls $\phi$ Lipschitz-stetig ist und $0 \leq L < 1$.

Banachscher Fixpunktsatz: Sei $X$ ein normierter Vektorraum mit der Norm $\|\cdot\|$ und $E \subseteq X$ sei vollständig. Weiterhin, sei die Selbstabbildung $\phi : E \to E$ kontrahierend mit der Kontraktionszahl $0 \leq L < 1$. Dann

(*i*) existiert ein eindeutiger Fixpunkt $x^* \in E$ von $\phi$ (d.h. $x^* = \phi(x^*)$),

(*ii*) für alle $x^{(0)} \in E$ konvergiert die Folge

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots$$

gegen $x^*$,

(*iii*) gelten die Fehlerabschätzungen

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{L^k}{1-L}\|x^{(1)} - x^{(0)}\| \quad \text{(a-priori)}$$

und

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{L}{1-L}\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \quad \text{(a-posteriori)}$$

## 7.1 Eindeutige Lösbarkeit

Lemma: Sei $\phi : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig. Weiterhin, seien $\xi_0 \in D$, $r > 0$, sowie $0 \leq L < 1$ mit den folgenden Eigeschaften gegeben:

($i$) $K_r(\xi_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x - \xi_0\| \leq r\} \subseteq D$

($ii$) $\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq L\|x - y\|$ für alle $x, y \in K_r(\xi_0)$

($iii$) $\|\phi(\xi_0) - \xi_0 \ \leq r(1 - L)|$.

Dann ist $\phi : K_r(\xi_0) \to K_r(\xi_0)$ kontrahierend.

Satz: Die Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ sei konvex und $\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} : D \to \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar. Falls es eine natürliche Matrixnorm $\| \cdot \|$ existiert so, dass

$$L := \sup_{x \in D} \left\| \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{= D\phi \text{ Jacobi-Matrix}} \right\| < 1,$$

dann gilt

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle} \quad x, y \in D.$$

## 7.2 Konditionierung ($n = 1$)

Seien $x^*$ bzw. $\tilde{x}^*$ die $m$-fachen Nullstellen von $f$ bzw. $\tilde{f}$ und

$$|f(\tilde{x}^*)| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Die Taylorentwicklung von $f$ um $\tilde{x}^*$ ergibt

$$|x^* - \tilde{x}^*| \lesssim \varepsilon^{1/m} \left| \frac{m!}{f^{(m)}(x^*)} \right|^{1/m}.$$

D.h. das Problem 7 ist schlecht konditioniert für $m > 1$ und ist gut konditioniert für $m = 1$.

## 7.3 Newton-Verfahren

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Zur Lösung von $f(x) = 0$ wählt man $x^{(0)} \in D$ und berechnet

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left[ Df(x^{(k)}) \right]^{-1} f(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Das Verfahren bricht ab, falls die Jacobi-Matrix $Df(x^{(k)})$ singulär ist.

## Numerische Implementierung des Newton-Verfahrens

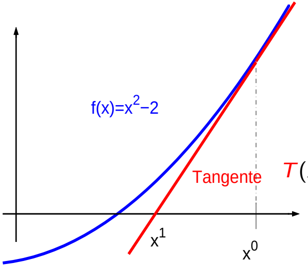
Wähle beliebigen Startvektor $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ und $TOL > 0$

Für $k = 0, 1, 2, \ldots$

1. Berechne $f(x^{(k)})$ und $Df(x^{(k)})$
2. Löse $Df(x^{(k)})s_k = f(x^{(k)})$
3. Setze $x^{(k+1)} = x^{(k)} - s_k$

STOP: $\|f(x^{(k+1)})\| < TOL$

## Geometrische Interpretation des Newton-Verfahrens ($n = 1$)




$T(x) = f(x^0) + f'(x^0)(x - x^0)$

und $T(x^1) = 0$

Satz: (Lokale Konvergenz des Newton-Verfahrens) Falls

(*i*) $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $\Omega$ ist offen und konvex,

(*ii*) $f$ besitzt eine Nullstelle $x^* \in \Omega$,

(*iii*) $Df$ ist auf $\Omega$ Lipschitz-stetig mit einer Konstanten $M > 0$,

(*iv*) für jedes $x \in \Omega$ ist $Df(x)$ invertierbar und

$$m = \sup_{x \in \Omega} \|[Df(x)]^{-1}\| < \infty,$$

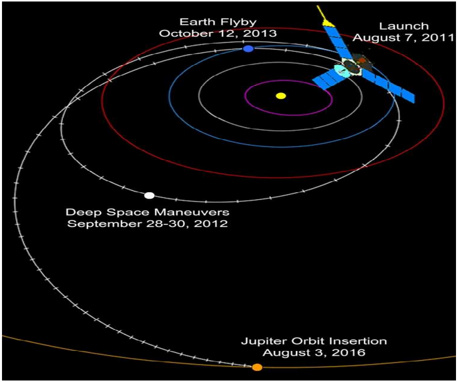
(*v*) es existiert $0 < r < \frac{2}{Mm}$, so dass $K_r(x^*) \subset \Omega$,

dann konvergiert die Folge $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x^{(k)} \in K_r(x^*)$, $k \in \mathbb{N}$, des Newton-Verfahrens für jeden Startwert $x^{(0)} \in K_r(x^*)$ gegen $x^*$. Diese Konvergenz ist lokal quadratisch (Verdopplung genauer Stellen pro Schritt), d.h.

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{Mm}{2} \|x^{(k-1)} - x^*\|^2.$$

## Einige Anwendungen:

- Wurzelberechnung $f(x) = x^2 - a = 0,\ a \in \mathbb{R}$.
- Berechnung von Polynomnullstellen
- Nichtlineare Ausgleichsprobleme
- Flugbahnberechnung der NASA-Jupitersonde (beim Lösen von DGLs mit Hilfe von impliziten Verfahren)



## Varianten des Newton-Verfahrens:

($i$) Beim Newton-Verfahren (mit $n > 1$) kostet in jedem Schritt sowohl das Aufstellen der Matrix $Df(x^{(k)})$ als auch das Lösen des linearen Gleichungssystems $Df(x^{(k)})s_k = f(x^{(k)})$ die meiste Zeit.

($ii$) Beim vereinfachten Newton-Verfahren ersetzt man die Matrizen $Df(x^{(k)})$, $k = 0, \dots, \ell$, $\ell \in \mathbb{N}$, durch $Df(x^{(0)})$.

($iii$) Bei einer $m$-fachen Nullstelle an der Stelle $x^*$ wird das modifizierte Newton-Verfahren

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - ms_k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

verwendet. Die Konvergenz, falls vorkommt, ist lokal quadratisch.

($iv$) Um die Wahl des Startvektors $x^{(0)}$ zu vereinfachen, wird das gedämpfte Newton-Verfahren

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \lambda_k s_k, \quad 0 < \lambda_k \leq 1, \quad k = 0, 1, \dots,$$

verwendet. Die Wahl von $\lambda_k$ wird im Kapitel 8 erläutert.

## Andere Iterationsverfahren (keine Fixpunktiterationsverfahren):

*(i)* Bissektionsverfahren ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig) wird häufig benutzt, um den Startwert $x^{(0)}$ für das Newton-Verfahren zu wählen.

*(ii)* Regula-Falsi ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, monoton).

*(iii)* Sekanten-Verfahren ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig)

Wähle die Startwerte $x^{(0)}, x^{(1)} \in \mathbb{R}$ und $TOL > 0$

Für $k = 0, 1, 2, \ldots$

berechne $x^{(k+1)} = x^{(k)} - f(x^{(k)}) \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}$

STOP: $|f(x^{(k+1)})| < TOL$

Konvergenzordnung des Sekanten-Verfahrens ist $p \approx 1.6$. Nachteil: zwei Startwerte.

Example: Bestimme eine Näherungan an die Nullstelle $x^* = 0.45677721650410...$ der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x^2 - 3x$.

Newton:

| $k$ | $x_k$ | $f(x_k)$ | $f'(x_k)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1.0 | -2.0 |
| 1 | 0.5 | -0.10127872929987 | -2.35127872929987 |
| 2 | 0.45692610661688 | -0.00034760015192 | -2.33464002662699 |
| 3 | 0.45677721850224 | -0.00000000466481 | -2.33457735881993 |
| 4 | 0.45677721650410 | 0.00000000000000 | -2.33457735797867 |

Sekantenverfahren:

| $k$ | $x_k$ | $f(x_k)$ | $\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1.0 | |
| 1 | 2.0 | -2.61094390106935 | -1.80547195053467 |
| 2 | 0.55387180050283 | -0.22841253688563 | -1.64752431009377 |
| 3 | 0.41523194220986 | 0.09660863546484 | -2.34435591865388 |
| 4 | 0.45644097309810 | 0.00078496243207 | -2.32530760775826 |
| 5 | 0.45677854668597 | -0.00000310541286 | -2.33450682527118 |
| 6 | 0.45677721646375 | 0.00000000009420 | -2.33457763798244 |
| 7 | 0.45677721650410 | -0.00000000000000 | -2.33458163537657 |