5 Approximation

Problem 5: Seien V ein normierter Vekktorraum und $S \subset V$ endlichdimensional. Für $f \in V$ bestimme (eine beste Approximation) $s^* \in S$, so dass

$$\|f - s^*\| = \min_{s \in S} \|f - s\|.$$

Sei $V = C[a, b]$ mit

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} \quad \text{(Gauß-Approximation bzgl. des Skalarproduktes } (\cdot, \cdot))$$

oder

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)| \quad \text{(Tschebyscheff-Approximation).}$$

5.1 Gauß-Approximation

Definition: Ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt heißt ein Prähilbert- oder Skalarproduktraum.

Beispiel: In dem Raum $C[a, b]$ wird ein Skalarprodukt definiert durch

$$(f, g)_{L_2} = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

oder, für eine positive, integrierbare Gewichtsfunktion $w : (a, b) \to \mathbb{R}$,

$$(f, g)_{L_2,w} = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}w(x)dx.$$

Satz: Seien V ein Prähilbertraum und $S \subset U$ endlichdimensional. Dann ist $s^* \in S$ eine beste Approximation von $f \in V$ genau dann, wenn

$$(f - s^*, s) = 0 \quad \text{für alle} \quad s \in S$$

gilt. Das Element s^* heißt Orthogonalprojektion von f auf S.

Korollar: Die beste Approximation ist eindeutig.

Beweisidee: Sei $\{\phi_0, \ldots, \phi_n\}$ eine Basis von $S \subset U$. Dann berechnet man die beste Approximation $s^* = \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k$ von f als Lösung von

$$\sum_{k=0}^{n} c_k(\phi_k, \phi_\ell) = (f, \phi_\ell), \quad \ell = 0, \ldots, n.$$

Die sogenannte Gram-Matrix $M = \Big((\phi_k, \phi_\ell)\Big)_{k,\ell=0,\ldots,n}$ ist positiv definit.

Bemerkung: Die Berechnung der besten Approximation ist besonderes einfach, wenn $\{\phi_0, \ldots, \phi_n\}$ eine ONB von S bilden. Dann gilt

$$M = I \quad \Rightarrow \quad c_k = (f, \phi_\ell), \quad k = 0, \ldots, n.$$

Beispiele (Algorithmen zur Berechnung der besten Approximation):

(i) $V = C[-1,1]$ mit $(\cdot,\cdot)_{L_2}$ und

$$S = \mathcal{P}_n = \text{span}\{\phi_0(x) = 1, \phi_1(x) = x, \dots, \phi_n(x) = x^n\}.$$

Die entsprechende Gram-Matrix M ist für großes n schlecht konditioniert.

(ii) Die Gram-Schmidt-Orthonormalisierung von $\{1, x, \dots, x^n\}$ bzgl. $(\cdot,\cdot)_{L_2}$ liefert die ONB

$$\phi_k = \frac{(2k-2)!}{((k-1)!)^2} \cdot \sqrt{\frac{2k-1}{2^{2k-1}}} \cdot L_{k-1}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Die Legendre-Polynome sind rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1, \\ L_1(x) &= x, \\ L_{k+1}(x) &= xL_k(x) - \frac{k^2}{4k^2-1} L_{k-1}(x), \quad k = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

(iii) Die Gram-Schmidt-Orthonormalisierung von $\{1, x, \ldots, x^n\}$ bzgl. des Skalarproduktes

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

liefert die ONB

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_k(x) \ : \ k = 1, \ldots, n \right\}$$

des Raumes $\mathcal{P}_n$. Die Tschebyscheff-Polynome 1.Art sind rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_{k+1}(x) &= 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), \quad k = 1, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

Bemerkung: Bei der Gauß-Approximation wird die Maximalabweichung

$$\|f - s^*\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - s^*(x)|$$

häufig insbesondere in der Nähe der Intervallenden groß. Deshalb verwendet man bei der Berechnung der besten Gauß-Approximation s^* das gewichtete Skalarprodukt

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\, dx,$$

wobei der Fehler am Rand höher gewichtet wird als in der Mitte des Intervalls. Deshalb, besitzt die Gauß-Aproximation mit Tschebyscheff-Polynomen in der Regel befriedigende gleichmäßige Approximationseigenschaften über dem ganzen Intervall.

Beispiel (Algorithmus zur Berechnung der besten Approximation): Die Funtionen $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(kx), \sin(kx) \;:\; k = 1, \ldots, n\right\}$ bilden ein ONSystem in $C[-\pi,\pi] = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ stetig}, 2\pi\text{-periodisch}\}$ bzgl.

$$(f,g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx.$$

Die beste Approximation (die $n-$te Partialsumme der Fourier-Reihe)

$$s^* \in S = \operatorname{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(kx), \sin(kx) \;:\; k = 1, \ldots, n\right\}$$

an $f \in C[-\pi,\pi]$ hat die Gestalt

$$s^*(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx)\right), \; x \in [-\pi,\pi],$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx, \quad k = 0, \ldots, n, \\ B_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx, \quad k = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

5.2 Tschebyscheff-Approximation verwendet die Maximums-Norm

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|, \quad f \in C[a,b],$$

die durch kein Skalarprodukt erzeugt wird. Die Existenz der besten Approximation kann also nicht wie in 5.1 gezeigt werden.

Beispiel: Die beste Tschebyscheff-Approximation ist nicht immer eindeutig. Z.B. für $f(x) \equiv 1$, $x \in [0,1]$, gilt

$$\|f - s\|_\infty \geq 1$$

für alle $s \in S$ mit

$$S = \{s : [0,1] \to \mathbb{R} \ : \ s(x) = a\,x,\ a \in \mathbb{R}\}$$

und

$$\|f - s^*\|_\infty = 1 \quad \text{für alle} \quad s^*(x) = a\,x, \quad a \in [0,2].$$

Satz: Sei V ein normierter Vektorraum und $S \subset V$ ein endlichdimensionaler Teilraum. Dann gibt es zu jedem $f \in V$ eine beste Approximation $s^* \in S$.

Die Eindeutigkeit der besten Tschebyscheff-Approximation wird durch zusätzliche Bedingungen an S garantiert:

Definition: $S \subset C[a, b]$, $\dim(S) = n + 1$, heißt Haarscher Raum der Dimension $n + 1$, wenn jedes $s \in S$, $s \neq 0$, höchstens n Nullstellen hat.

Satz: Sei $S \subset C[a, b]$, $\dim(S) = n$, ein Haarscher Raum. Ein Element $s^* \in S$ ist genau dann die beste Tschebyscheff-Approximation von $f \in C[a, b]$, wenn eine Alternante

$$a \leq z_0 < z_2 < \cdots < z_m \leq b, \quad m \geq n,$$

existiert, d.h. für $j = 0, \ldots m$ gilt

$$|f(z_j) - s^*(z_j)| = \|f - s^*\|_\infty, \quad f(z_j) - s^*(z_j) = -f(z_{j+1}) + s^*(z_{j+1}).$$

Bemerkung: Die Konstruktion einer Alternante und damit der Tschebyscheff-Approximation wird mit Hilfe des sog. Remez-Algorithmus gemacht (siehe Schaback, Wendland, Numerische Mathematik, S.226)