Kapitel 4: Interpolation

Sei $\mathcal{U}$ eine Klasse von einfach strukturierten Funktionen, z.B.

- Polynome,
- rationale Funktionen,
- trigonometrische Polynome,
- Splines.

Interpolationsproblem 4: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Gegeben seien $n + 1$ *paarweise verschiedene* Punkte

$$x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b],$$

welche man als *Stützstellen* bezeichnet, sowie ein System von $n + 1$ weiteren (nicht notwendig verschiedenen) Punkten

$$y_j = f(x_j), \quad j = 0, \ldots, n,$$

die man als *Stützwerte* bezeichnet. Gesucht ist $u \in \mathcal{U}$ mit

$$u(x_j) = y_j, \quad j = 0, \ldots, n.$$

4.1. Polynominterpolation

Definition: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Mit

$$\mathcal{P}_n = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \cdots + a_n \cdot x^n,\ a_j \in \mathbb{R}\}$$

bezeichnet man den Vektorraum der Polynome vom $\mathrm{Grad}(p) \le n$. Es gilt $\dim(\mathcal{P}_n) = n + 1$.

Ein großer Vorteil von Polynomen ist, dass man mit ihnen jede auf einem kompakten Intervall stetige Funktion beliebig genau annähern kann:

Satz von Weierstrass Es sei I ein kompaktes Intervall und $f \in C(I)$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Polynom p, so dass

$$\|f - p\|_{C(I)} := \max_{x \in I} |f(x) - p(x)| < \varepsilon.$$

Definition: Eine Lösung $p \in \mathcal{P}_n$ des Interpolationsproblems 4 heißt ein Interpolationspolynom.

4.1.1 Lösbarkeit des Polynominterpolationsproblems

Satz: Das Interpolationspolynom ist eindeutig.

Beweisidee: Die Vandermonde-Matrix

$$V(x_0,\dots,x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

ist die Systemmatrix des Gleichungssystem

$$p(x_j) = \sum_{k=0}^{n} a_k x_j^k, \quad j = 0,\dots,n.$$

Es gilt

$$\det\left(V(x_0,\dots,x_n)\right) = \prod_{0\le i<j\le n} (x_j - x_i) \neq 0.$$

4.1.2 Konditionierung des Polynominterpolationsproblems

Seien $f, \tilde{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Für den Problemfehler gilt

$$
\begin{aligned}
\|p - \tilde{p}\|_\infty &= \max_{x\in[a,b]} \left| \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k^{(n)}(x) - \sum_{k=0}^{n} \tilde{f}(x_k) L_k^{(n)}(x) \right| \\
&\leq \left\| \sum_{k=0}^{n} \left| L_k^{(n)} \right| \right\|_\infty \cdot \underbrace{\max_{k=0,\dots,n} |f(x_k) - \tilde{f}(x_k)|}_{\textit{Eingabefehler}} .
\end{aligned}
$$

Die Lebesque-Konstante (Fehlerverstärkungsfaktor) $\Lambda_n := \left\| \sum_{k=0}^{n} \left| L_k^{(n)} \right| \right\|_\infty$

- für die äquidistanten Stützstellen $x_j = a + j\frac{(b-a)}{n}$, $j = 0, \dots, n$, wächst exponentiel und ist proportional zu $2^{n+1} \left(n \log n\right)^{-1}$.
- für die Tschebytscheff-Stützstellen $x_j = \frac{(b-a)}{2} \left(\cos \frac{2j-1}{2n+2}\pi\right) + \frac{a+b}{2}$, $j = 0, \dots, n$, wächst logarithmisch, ist proportional zu $\log(n+1) + 1$.

4.1.3 Algorithmen zur Berechnung des Interpolationspolynoms

Die numerische Berechnung der Monom-Darstellung

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad x \in \mathbb{R},$$

des Interpolationspolynoms p ist instabil, da die Vandermonder-Matrix für grosse n schlecht konditioniert ist.

Lagrange-Darstellung des Interpolationspolynoms

Definition: Es seien $n+1$ paarweise verschiedene Stützstellen $x_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, \ldots, n$, gegeben. Dann bezeichnet man die Polynome

$$L_k^{(n)}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \in \mathcal{P}_n, \quad k = 0, \ldots, n,$$

als die zu diesen Stützstellen gehörenden Lagrange-Basispolynome.

Lemma: Die Lagrange-Basispolynome

$$\{L_k^{(n)} \ : \ k = 0, \ldots, n\}$$

bilden eine Basis von $\mathcal{P}_n$ und es gilt

$$L_k^{(n)}(x_j) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

Die Lagrange-Darstellung des Interpolationspolynoms ist

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot L_k^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \prod_{j=0}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.$$

Bemerkungen:

(i) Die Matrix

$$\left(L_k^{(n)}(x_j)\right)_{k,j=0,\ldots,n}$$

des Gleichungssystems

$$p(x_j) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot L_k^{(n)}(x_j), \quad j = 0, \ldots, n,$$

ist die Einheitsmatrix mit $\mathrm{cond}_2(I) = 1$.

(ii) Der Nachteil der Lagrangeschen Darstellung des Interpolationspolynoms $p \in \mathcal{P}_n$ ist, dass bei der Hinzunahme eines weiteren Stützpunktes (x_{n+1}, y_{n+1}) oder bei der Änderung eines Stützpunktes (x_j, y_j) die Basispolynome $L_k^{(n)}$ sich völlig ändern. Deshalb ist diese Darstellung des Interpolationspolynoms für die praktischen Zwecke zu aufwändig.

Newton-Darstellung des Interpolationspolynoms

Definition: Die Newton-Basispolynome sind definiert durch

$$\begin{aligned} N_0(x) &= 1 \\ N_k(x) &= (x - x_{k-1}) \cdot N_{k-1}(x), \quad k = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

D.h. explizit $N_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1}(x - x_j), \quad k = 0, \ldots, n.$

Lemma: Für $k = 0, \ldots, n$ gilt

$$N_k(x_j) = \begin{cases} 0 & , j < k \\ \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(x_j - x_i) & , j \geq k. \end{cases}$$

Dann ist $\left(N_k(x_j)\right)_{k,j=0,\ldots,n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & x_n - x_0 & \ldots & \displaystyle\prod_{j=0}^{n-1}(x_n - x_j) \end{pmatrix}$ die Matrix

des Gleichungssystems $p(x_j) = \sum_{k=0}^{n} b_k N_k(x_j)$, $j = 0, \ldots, n,.$

Satz: Die Newton-Darstellung des Interpolationspolynom ist

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} [y_0, \ldots, y_k] N_k(x),$$

wobei

$$\begin{aligned} j = 0, \ldots, n: &\qquad [y_j] := y_j \\ k = 1, \ldots, n-j: &\qquad [y_j, \ldots, y_{j+k}] := \frac{[y_{j+1}, \ldots, y_{j+k}] - [y_j, \ldots, y_{j+k-1}]}{x_{j+k} - x_j}. \end{aligned}$$

Die Zahlen $[y_j, \ldots, y_{j+k}]$ nennt man dividierte Differenzen.

Beweis: (vollständige Induktion)
Für $n = 0$ ist $p(x) = y_0 = [y_0]$ das Interpolationspolynom zu (x_0, y_0).
Nach der Induktionsannahme interpoliert

$$p_{0,\dots,n-1}(x) = [y_0] + [y_0, y_1](x - x_0) + \ldots + [y_0, \dots, y_{n-1}](x - x_0) \cdots (x - x_{n-2}) \in \mathcal{P}_{n-1}$$

die Punkte $(x_0, y_0), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})$, und analog interpoliert

$$p_{1,\dots,n}(x) = [y_1] + [y_1, y_2](x - x_1) + \ldots + [y_1, \dots, y_n](x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \in \mathcal{P}_{n-1}$$

die Punkte $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Damit interpoliert

$$q(x) = \frac{(x - x_0)p_{1,\dots,n}(x) - (x - x_n)p_{0,\dots,n-1}(x)}{x_n - x_0}$$

die Punkte $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ und es gilt $p(x) = q(x)$, $x \in [a, b]$ (wegen der Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms). Der Leitkoeffizient von q ist

$$LK(q) = \frac{LK(p_{1,\dots,n}) - LK(p_{0,\dots,n-1})}{x_n - x_0} = \frac{[y_1, \dots, y_n] - [y_0, \dots, y_{n-1}]}{x_n - x_0} =: [y_0, \dots, y_n].$$

Weiterhin gilt (durch Hinzunahme von (x_n, y_n) zu $p_{0,\dots,n-1}(x)$)

$$q(x) = p(x) = p_{0,\dots,n-1}(x) + LK(q)(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}). \qquad \square$$

Neville-Aitken-Schema: Die Auswertung der dividierten Differenzen verläuft nach dem Schema

$$
\begin{array}{c|cccccc}
x_0 & y_0 = [y_0] & & & & \\
 & & [y_0, y_1] & & & \\
x_1 & y_1 = [y_1] & & [y_0, y_1, y_2] & & \\
 & & [y_1, y_2] & \vdots & \ddots & \\
x_2 & y_2 = [y_2] & \vdots & \vdots & & [y_0, \ldots, y_n] \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & [y_{n-2}, y_{n-1}, y_n] & & \\
\vdots & \vdots & [y_{n-1}, y_n] & & & \\
x_n & y_n = [y_n] & & & &
\end{array}
$$

Die Tabelle wird spaltenweise aufgebaut und die Koeffizienten $[y_0, \ldots, y_k]$ des Interpolationspolynoms werden der obersten Schrägzeile entnohmen.

Die Hinzunahme eines weiteren Stützpunktes (x_{n+1}, y_{n+1}) ist beim Neville-Aitken-Schema problemlos.

4.1.4 Approximationsfehler der Polynominterpolation

Satz: Sei $f \in C^{n+1}[a,b]$, $n \in \mathbb{N}_0$, und $p_n \in \mathcal{P}_n$ mit

$$p_n(x_j) = f(x_j), \quad a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b.$$

Dann gilt

$$|f(x) - p_n(x)| \le \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \left| \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \right|, \quad x \in [a,b].$$

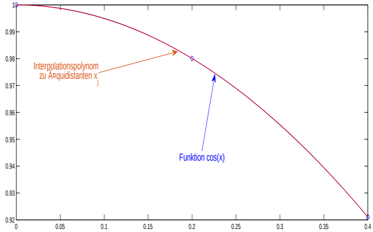
Bemerkung: Für äquidistante Stützstellen x_j, $j = 0, \dots, n$, gilt

$$|f(x) - p_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{n+1} \left(\frac{b-a}{n} \right)^{n+1}, \quad M_{n+1} := \|f^{(n+1)}\|_\infty.$$

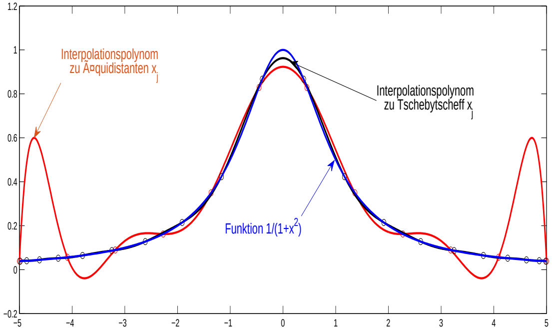
Ist die Folge $\left(\frac{M_{n+1}}{n+1} \left(\frac{b-a}{n} \right)^{n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge, so konvergiert die Folge $(p_n(x))_{n \in \mathbb{N}_0}$ der Interpolationspolynome gleichmässig gegen f. Ist die Folge $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ beschränkt (z.B. für $f = \cos(x)$), so ist diese Konvergenz sehr schnell.

Beispiele+Anwendungen:

- $f(x) = \cos(x)$, $x \in [0, 0.4]$.



- Beispiel von Runge $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in [-5, 5]$.



4.2 Splineinterpolation

Um die Probleme

- Globalität,
- Oszillation,
- hohe Komplexität,

von Interpolationspolynome zu beheben, werden wir $\mathcal{U}$ so wählen, dass die Lösung des Interpolationsproblems 4 nur lokal von $f(x_j)$ abhängt.

Definition: Sei eine Zerlegung X des Intervalls $[a, b]$ gegeben durch

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Die Funktionen aus dem reellen Vektorraum

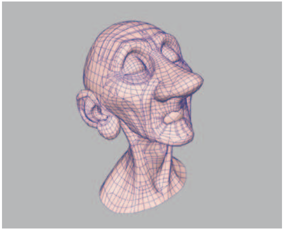
$$S_m(X) := \{s : [a,b] \to \mathbb{R} \ : \ s \in C^{m-1}[a,b], \quad s|_{(x_j, x_{j+1})} \in \mathcal{P}_m\}$$

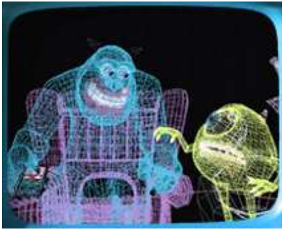
heißen polynomiale Splines vom Grad m auf der Zerlegung X.

Es gilt $\mathcal{P}_m \subset S_m(X)$.

Anwendungen von Splinekurven und Splineflächen

- Computeranimation





- Schiffsbau

Bemerkung: Ein Spline s auf X erfüllt $s \in C^{m-1}[a, b]$ genau dann, wenn

$$s^{(r)}(x_j+) - s^{(r)}(x_j-) = 0, \quad r = 0, \ldots, m-1, \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

Wichtige Splines sind

- die linearen Splines vom Grad $m = 1$ (Polygonzüge),
- die kubischen Splines vom Grad $m = 3$.

Die kubischen Splines eignen sich bestens zur graphischen Darstellung von Kurven, da das Auge Unstetigkeiten in der Krümmung (zweiten Ableitung) bei $m = 2$ noch erkennen kann, bei $m = 3$ nicht mehr.

Bezeichnung: Ein kubischer Spline s heißt

- natürlich, falls $s''(a) = s''(b) = 0$.
- vollständig, falls $s'(a) = f'(a)$ und $s'(b) = f'(b)$.

Splineinterpolationsproblem 4 (für $m = 3$):

Gegeben: Eine Zerlegung

$$X: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

des Intervalls $[a, b]$ und

$$y_j = f(x_j), \quad j = 0, \ldots, n.$$

Gesucht: Ein kubischer, natürlicher Spline $s \in S_3(X)$ mit

$$s(x_j) = y_j, \quad j = 0, \ldots, n, \quad \text{sowie} \quad s'(a) = f'(a) \quad \text{und} \quad s'(b) = f'(b).$$

Bemerkung: $\dim\big(S_m(X)\big) = m + n$.

4.2.1 Satz: Das Splineinterpolationsproblem 4 ist eindeutug lösbar.

4.2.2. Satz: Sei $s \in S_3(X)$ die Lösung des Splineinterpolationsproblems 4 mit $s^{''}(a) = s''(b) = 0$. Dann gilt

$$\int_a^b \left(s''(x)\right)^2 dx \leq \int_a^b \left(g''(x)\right)^2$$

für alle $g \in C^2[a,b]$ mit $s(x_j) = g(x_j)$, $j = 0, \ldots, n$.

Bemerkung: Die Totalekrümmung der Kurve $x \mapsto (x, g(x))$, $x \in [a,b]$, ist gegeben durch

$$\int_a^b \frac{(g''(x))^2}{(1 + (g'(x))^2)^{5/2}} dx.$$

Der natürliche Interpolationsspline minimiert (näherungsweise) diesen Wert unter allen möglichen C^2-Funktionen, die die Daten $f(x_j)$ interpolieren. Das Wort Spline (deutsch: Straaklatte) bezeichnet ein elastisches Lineal im Schiffsbau, das zur Minimierung der Krümmung eingesetzt wird.

4.2.3 Approximationsfehler der Splineinterpolation (für $m = 3$):

Satz: Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei 4-mal stetig differenzierbar. Dann gilt für den kubischen, vollständigen Interpolationsspline s, d.h.

$$s \in S_3(X), \quad s(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, \ldots, n$$

und

$$s'(a) = f'(a), \quad s'(b) = f'(b),$$

die Fehleranschätzung

$$\max_{x \in [a,b]} \| f^{(k)}(x) - s^{(k)}(x)| \leq C_k h^{4-k} \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|, \quad k = 0, 1, 2,$$

mit

$$\begin{aligned} h &= \max_{j=0,\ldots,n-1} |x_{j+1} - x_j|, \\ C_0 &= \frac{5}{384}, \quad C_1 = \frac{1}{24} \quad \text{und} \quad C_2 = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

4.3 Trigonometrische Interpolation einer $2\pi-$periodischen Funktion f, d.h.

$$f(x+2\pi) = f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Definition: Die Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \; e^{ikx}, \quad c_k \in \mathbb{C},$$

heißt komplexes trigonometrisches Polynom vom Grad n. Die Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right), \quad a_k, b_k \in \mathbb{R},$$

heißt reelles trigonometrisches Polynom vom Grad m.

Interpolationsproblem 4: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ stetig und 2π-periodisch. Gegeben seien $n+1$ Stützstellen

$$x_j = \frac{2\pi j}{n+1}, \quad j = 0, \dots, n,$$

und $n+1$ Stützwerte

$$y_j = f(x_j), \quad j = 0, \dots, n.$$

Gesucht ist ein komplexes ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) oder reeles ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) trigonometrisches Polynom p, so dass $p(x_j) = y_j$, $j = 0, \dots, n$.

Bemerkung: In dem Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, gilt

$$p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) + \begin{cases} 0, & n = 2m, \\ \frac{a_{m+1}}{2} \cos(m+1)x, & n = 2m+1. \end{cases}$$

Die Euler-Formeln ergeben

$$p(x) = \begin{cases} e^{-imx} \sum_{k=0}^{2m} d_{k-m} \, e^{ikx}, & n = 2m, \\ e^{-i(m+1)x} \sum_{k=0}^{2m+2} d_{k-m-1} \, e^{ikx}, & n = 2m+1, \end{cases}$$

mit

$$
\begin{aligned}
d_{-m-1} &= d_{m+1} = \frac{a_{m+1}}{4}, \\
d_\ell &= \frac{1}{2}(a_\ell + ib_\ell), \quad \ell = -1, \dots, -m, \\
d_0 &= \frac{a_0}{2}, \\
d_\ell &= \frac{1}{2}(a_\ell - ib_\ell), \quad \ell = 1, \dots, m.
\end{aligned}
$$

4.3.1 Satz: Das interpolierende trigonometrische Polynom ist eindeutig.

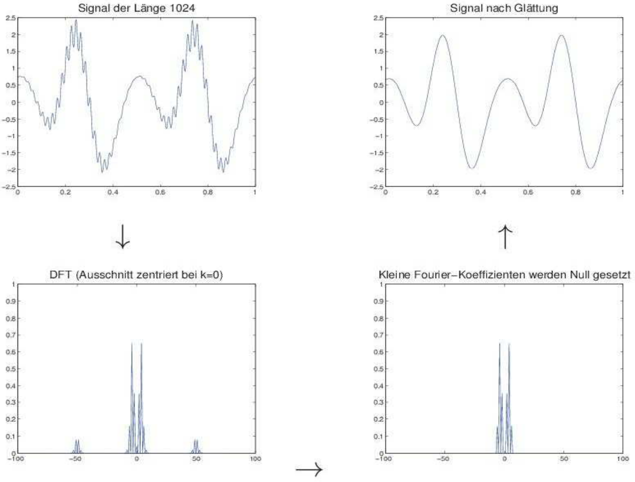
Beweisidee: Für $e_k(x) := e^{ikx}$, $k = 0, \dots, n$, löse

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} e_0(x_0) & \dots & e_n(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ e_0(x_n) & \dots & e_n(x_n) \end{pmatrix}}_{=:\mathcal{F}_n} \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},
$$

wobei $\mathcal{F}_n$ ist hermitesch und invertierbar mit der Inverse $\mathcal{D}_n = \frac{1}{n+1}\overline{\mathcal{F}_n}$.

Anwendungen der Diskreten-Fourier-Transformation $y \mapsto \hat{y} = \mathcal{D}_n y$

- Entrauschen durch Ausblenden (thresholding) von $|\hat{y}_j| < TOL$



- Multiplikative Modifikation von Frequenzamplituden des Rauschens

$$\textit{Faltung}: \qquad B * G = \mathcal{D}_n^{-1}\left(\mathcal{D}_n B \cdot \mathcal{D}_n G\right)$$

Verrauschtes Bild B

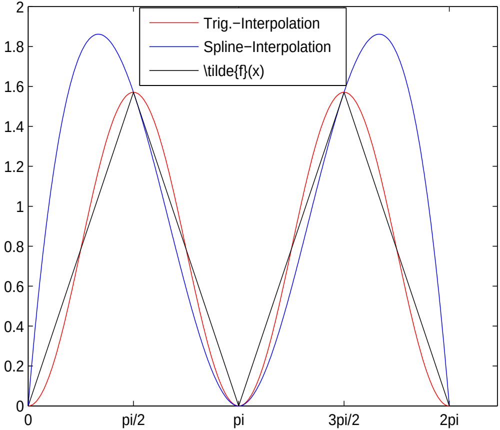
Gauß-Filter G: 3×3

Gauß-Filter G: 5×5

Bemerkung: Die schneller Fourier-Transformation (FFT) mit Cooley-Tukey-Algorithmus benötigt nur $O(n\log(n))$ Rechenoperationen.

Beispiel: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2\pi-$periodische, gerade Fortsetzung von

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < \pi/2, \\ \pi - x & \pi/2 \le x \le \pi. \end{cases}$$



Einschränkungen (oszillatorisches Verhalten) der trigonometrischen Interpolation: Gibbs-Phänomen für unstetige Funktionen