Priv.Doz. Dr.(USA) Maria Charina

9. Übungsblatt zur Numerik
WS 2016/17

Aufgabe 9.1 Sei $n \in \mathbb{N}$ und die Funktionen $e_k : [0, 2\pi) \to \mathbb{C}$ seien definiert durch

$$e_k(x) = e^{ikx}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Zeigen Sie, dass für $x_j = \frac{2\pi j}{n+1}$, $j = 0, \dots, n$, gilt

$$(e_k, e_\ell) := \sum_{j=0}^{n} e_k(x_j)\overline{e_\ell(x_j)} = \begin{cases} n+1, & \ell = k, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases} \qquad k, \ell = 0, \dots, n.$$

Aufgabe 9.2 Die 2π-periodische Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \pi/2), \\ \pi - x, & x \in [\pi/2, \pi], \end{cases}$$

wird ungerade fortgesetzt. Benutzen Sie die diskrete Fourier-Transformation (Matlab-Befehle `fft`), um das interpolierende trigonometrische Polynom zu den Stützstellen

$$x_j = \frac{2\pi j}{n+1}, \quad j = 0, \dots, n,$$

und Stützwerten

$$y_j = f(x_j), \quad j = 0, \dots, n,$$

zu berechen. Wählen Sie $n = 2, 10, 100$.

Aufgabe 9.3 Seien $V = C[0, 1]$ und

$$\mathcal{S} = \mathcal{P}_2 = \operatorname{span}\{1, x, x^2\} \subset V.$$

Stellen Sie die Gram-Matrix zu dieser Basis von $\mathcal{P}_2$ auf. Benutzen Sie dafür das Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_{L_2}$. Berechnen Sie die entsprechende beste Gauß-Approximation $s^* \in \mathcal{S}$ an

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(\pi x).$$

Aufgabe 9.4 Sei $V = C[-1,1]$. Bestimmen Sie die beste Gauß-Legendre-Approximation $s^* \in \mathcal{P}_3$ an $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. (Benutzen Sie die entsprechenden Legendre-Polynome, um s^* dazustellen).