Priv.Doz. Dr.(USA) Maria Charina

8. Übungsblatt zur Numerik
WS 2016/17

Aufgabe 8.1 Die folgenden Daten y_j, $j = 0, \ldots, 8$ sind Funktionswerte eines Polynoms vom Grad 3. In der Tabelle verbirgt sich ein falscher Funktionswert. Bestimmen Sie diesen mit Hilfe des Schemas der dividierten Differenzen und korrigieren Sie ihn.

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_j	3.6	3.61	3.62	3.63	3.64	3.65	3.66	3.67	3.68
y_j	0.112046	0.120204	0.128350	0.136462	0.1446	0.152702	0.160788	0.168857	0.176908

Aufgabe 8.2 Seien $k \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$. Definiere

$$(x-a)_+^k = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ (x-a)^k, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i) Sind die folgenden Funktionen in $S_3(X)$, $X = \{x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2\}$?

(a) $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2$,

(b) $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)_+^3 - \frac{x^3}{2}$.

(ii) Bestimmen Sie alle 5-tupel $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$, so dass die Funktion

$$s(x) = ax_+^3 + b(x-1)^3 + c(x-2)_+^3 + dx + e$$

in $S_3(X)$, $X = \{x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2\}$, ist.

(iii) Bestimmen Sie den natürlichen interpolierenden Spline $s \in S_3(X)$, $X = \{x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2\}$, für $f(x) = x^3$. Wie lautet das Ergebnis, wenn die Randbedinungen $s''(0) = f''(0)$ und $s''(2) = f''(2)$ gewählt werden?

Aufgabe 8.3

(*i*) Zeigen Sie, dass gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_j & x_j^2 & x_j^3 \\ 1 & x_{j+1} & x_{j+1}^2 & x_{j+1}^3 \\ 0 & 1 & 2x_j & 3x_j^2 \\ 0 & 1 & 2x_{j+1} & 3x_{j+1}^2 \end{pmatrix} = -(x_j - x_{j+1})^4.$$

(Hinweis: Verwenden Sie den Trick aus dem Beweis in 4.1.1.)

(*ii*) Beweisen Sie, dass das Splineinterpolationsproblem

Gegeben: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ (Zerlegung X von $[a, b]$)
$y_j = f(x_j), \quad j = 0, \ldots, n,$
Bestimme: $s \in S_3(X),\ s(x_j) = y_j,\ j = 0, \ldots, n,\ s''(a) = s''(b) = 0$

eindeutig lösbar ist.

Aufgabe 8.4 Die Funktion $\sin(x)$ soll im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ äquidistant so tabelliert werden, dass bei geeigneter Interpolation der entsprechende Approximationsfehler für jedes $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ kleiner als $\frac{1}{2}10^{-4}$ ist. Wieviele Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ benötigt man dazu, wenn man zur Interpolation

(*a*) das Interpolationspolynom $p \in \mathcal{P}_n$, bzw.

(*b*) den kubischen Spline $s \in S_3(X)$ mit $s''(0) = 0$ und $s''(\frac{\pi}{2}) = -1$

benutzt. (Benutzen Sie eine Version vom Satz in 4.2.3 (mit $C_1 = C_2 = C_3 = \frac{1}{2}$) für kubische Splines mit $s''(a) = f''(a)$ und $s''(b) = f''(b)$.)