Priv.Doz. Dr.(USA) Maria Charina

7. Übungsblatt zur Numerik
WS 2016/17

Aufgabe 7.1 Berechnen Sie die Singulärwertzerlegungen der Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{cond}_2(A_1) = \|A_1\|_2 \|A_1^+\|_2$ gilt. Ist diese Methode zur Berechnung der 2-Konditionszahl allgemeingültig? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 7.2 Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Lösung $x^* \in \mathbb{R}^2$ des entsprechenden Problems 3 mit der kleinsten Euklidischen norm $\|x^*\|_2$, indem Sie

(*i*) alle Lösungen des Problems 3 zeichnen und x^* auswählen.

(*ii*) die Moore-Penrose-Pseudoinverse A^+ von A berechnen und $x^* = A^+ b$ setzen.

Aufgabe 7.3

(*i*) Skizieren Sie die Lagrange-Basispolynome $L_k^{(4)}$, $k = 0, \ldots, 4$, zu den Stützstellen

$$x_0 = -4, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 5.$$

Sei $f : [-4, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^6 - x^4 + 3x - 2$. Bestimmen Sie das Interpolationspolynom p_4 (in der Lagrange-Darstellung) zu den oben angegebenen Stützstellen und zu den Stützwerten $y_j = f(x_j)$, $j = 0, \ldots, 4$.

(*ii*) Zeigen Sie, dass $\{L_k^{(n)}, k = 0, \ldots, n\}$ eine Basis von $\mathcal{P}_n$ bilden.

Aufgabe 7.4

(*i*) Seien $x_0, x_1, \ldots, x_n$ paarweise verschiedene Stützstellen aus $[a, b]$, $0 < a < b$. Berechnen Sie für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ die n-te dividierte Differenz $[f(x_0), \ldots, f(x_n)]$.

(*ii*) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion, die das Interpolationspolynom $p \in \mathcal{P}_n$ (in der Newton-Darstellung) zu den Stützstellen

$$a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq b$$

und zu den Stützwerten $y_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, \ldots, n$ bestimmt und auf $[a, b]$ zeichnet.