Priv.Doz. Dr.(USA) Maria Charina

6. Übungsblatt zur Numerik
WS 2016/17

Aufgabe 6.1 Nach dem Keplerschen Gesetz bewegt sich ein Himmelskörper im Sonnensystem, wenn Störungen durch die Planeten vernachlässigt werden, auf einer ebenen Bahn von Ellipsen- oder Hyperbelform. Das Tupel (r, θ) bezeichne nun die Polarkoordinaten bzgl. des Standortes der Sonne. Die Bahn des Himmelskörpers ist dann gegeben durch die "Kegelschnittgleichung"

$$r = \frac{p}{1 - e \cdot \cos\theta}$$

mit einem Parameter p und der sogenannten Exzentrizität e. Für $0 \leq e < 1$ handelt es sich um eine Ellipse, für $e \geq 1$ um eine Hyperbel. Für einen neu entdeckten Himmelskörper werden die folgenden Beobachtungen gemacht

Tag	15.01.	15.04	15.06	15.08.	15.09.
r	10	5	2.5	1.3	1
θ	51°	67°	83°	108°	126°

Bestimmen Sie mit Hilfe der Ausgleichsrechnung den Typ der Kometenbahn. (Bringen Sie dazu zunächst die Gleichung für r in eine Form, die linear in 2 Unbekannten e und p ist.)

Aufgabe 6.2 Betrachten Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 9 & -2 \\ 4 & 12 & -6 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Ist dieses Gleichungssystem eindeutig lösbar?

(ii) Bestimmen Sie eine Lösung der entsprechenden Normalengleichung. Ist diese Lösung eindeutig?

Aufgabe 6.3 Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Householder-Transformation

$$Q_v = I - 2\frac{vv^T}{v^T v}, \quad v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

1. Es gilt $Q_v v = -v$.

2. Sei $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann gilt $Q_v y = -\alpha e_1$ für $v = y + \alpha e_1$ mit $\alpha = \operatorname{sgn}(y_1)\|y\|_2$.

Aufgabe 6.4 Verwenden Sie die entsprechenden QR-Zerlegungen, um zu überprüfen, ob die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 21 & 0 & 5 \\ 0 & 42 & 12 \\ 42 & -189 & -44 \\ -42 & 0 & -10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

vollen Rang haben.