Priv.Doz. Dr.(USA) Maria Charina

5. Übungsblatt zur Numerik
WS 2016/17

Aufgabe 5.1 Benutzen Sie die folgende Version des Banachschen Fixpunktsatzes, um die Konvergenz des Verfahren aus Aufgabe 4.3 (i) nachzuweisen. Geben Sie die a-priori Fehlerabschätzung für $\|x^{(10)} - x\|_\infty$ an, ohne die exakte Lösung x^* von $Ax = b$ oder $x^{(10)}$ zu berechnen.

Banachscher Fixpunksatz: *Sei* $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *kontrahierend, d.h. es existiert* $0 \le L < 1$*, so dass*

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \le L\|x - y\| \quad \textit{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

(i) *Dann hat* ϕ *genau einen Fixpunkt* $x^* \in \mathbb{R}^n$*, d.h.* $x^* = \phi(x^*)$.

(ii) *Für jeden Startvektor* $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ *konvergiert die Folge*

$$\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}, \quad x^{(k)} = \phi(x^{(k-1)}), \quad k \in \mathbb{N},$$

gegen den Fixpunkt x^*.

(iii) *Für* $k \in \mathbb{N}$ *gelten die Fehlerabschätzungen*

$$\begin{aligned} \|x^{(k)} - x^*\| &\le \frac{L}{1-L}\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \qquad (a - posteriori) \\ \|x^{(k)} - x^*\| &\le \frac{L^k}{1-L}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|. \qquad (a - priori) \end{aligned}$$

Aufgabe 5.2 Schreiben Sie ein Matlab-Programm

$$\texttt{function } [\texttt{x}, \texttt{Iter}] = \texttt{CGVerfahren}(\texttt{A}, \texttt{b}, \texttt{x}^{(0)}, \texttt{iter}, \texttt{TOL}),$$

das das CG-Verfahren zum Lösen von $Ax = b$ implementiert.

- `x` $\in \mathbb{R}^n$ gesuchte Näherungslösung $x^{(\texttt{Iter})}$ von $Ax = b$,
- `Iter` $\in \mathbb{N}$ Anzahl der dafür benötigten Iterationen,

- `A` Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
- `b` Vektor $b \in \mathbb{R}^n$,
- `x0` Startvektor $x^{[0]} \in \mathbb{R}^n$ der Iteration,
- `TOL` Fehlertoleranz,
- `iter` $\in \mathbb{N}$ maximale Anzahl der durchzuführenden Iterationen.

Die Iteration wird abgebrochen, falls entweder `iter` üeberschritten wird, oder die Toleranz `TOL` erreicht wird, d.h. $\|r^{(\mathtt{Iter})}\| < \mathtt{TOL}$. Verwenden Sie den Matlab-Befehl `plot`, um die Iterierten $x^{(k)}$, $k = 0, \ldots, \mathtt{Iter}$, zu zeichnen. Testen Sie Ihres Programm anhand von

(*i*) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(*ii*) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(*iii*) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 10^7 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5.3

(*i*) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathrm{Rang}(A) = n \le m$. Zeigen Sie, dass $A^T A$ positiv definit und AA^T semi-positiv definit sind.

(*ii*) Der Kreisesatz von Gerschgorin besagt, dass zu jedem komplexen Eigenwert λ der Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es mindestens eine Kreisscheibe

$$D_i = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|\}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

gibt, welche λ enthält. Zeigen Sie mit Hilfe dieses Satzes, dass die Matrix A aus Aufgabe 4.3 positiv definit ist.

<u>**Aufgabe 5.4**</u> Seien $\{d^{(0)}, \dots, d^{(n-1)}\}$ paarweise konjugiert bzgl. der positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Weiterhin, seien $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ beliebig und $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$, sowie $r^{(0)}, \dots, r^{(n)}$ mit dem entsprechenden CG-Verfahren berechnet worden, d.h. $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)}$. Zeigen Sie, das gilt

$$\left(d^{(k)}\right)^T r^{(k)} = \left(d^{(k)}\right)^T (Ay - b)$$

für alle $y \in U_k = \{z \in \mathbb{R}^n \;\; z = x^{(0)} + \sum_{j=0}^{k-1} c_j d^{(j)},\; c_j \in \mathbb{R}\}$, $k = 1, \dots, n$.