Priv.Doz. Dr.(USA) Maria Charina

4. Übungsblatt zur Numerik
WS 2016/17

Aufgabe 4.1

(i) Lösen Sie mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung von A das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 8 & 8 & 8 & -2 & 2 \\ 1 & 8 & 26 & 4 & 7 & 7 \\ 2 & 8 & 4 & 18 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & 7 & -1 & 42 & 13 \\ 4 & 2 & 7 & -4 & 13 & 40 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 2 \\ 11 \\ -45 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die LR-Zerlegung von A an. Warum kann man in diesem Fall die Gauß-Elimination ohne Pivotierung durchführen?

(ii) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -a & \\ & -a & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

positiv definit? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4.2 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und

$$a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Zeigen Sie, dass die Matrix A positiv definit ist.

Aufgabe 4.3 Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(i) Führen Sie zwei Schritte des Gesamtschrittverfahrens zum Startvektor $x^{(0)} = (1,1,1,1)^T$ durch.

(ii) Führen Sie zwei Schritte des Einzelschrittverfahrens zum Startvektor $x^{(0)} = (1,1,1,1)^T$ durch.

(iii) Zeigen Sie, das die Verfahren aus (i) und (ii) konvergieren.

Aufgabe 4.4 Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle_A : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\langle x, y \rangle_A = y^T A x = x_1 y_1 + 3 x_2 y_2 - x_2 y_3 - x_3 y_2 + 3 x_3 y_3$$

für $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ und $y = (y_1, y_2, y_3)^T$.

(i) Zeigen Sie, dass diese Abbildung ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist, und geben Sie die induzierte Vektornorm $\| \cdot \|_A$ an.

(ii) Zeigen Sie, dass die Norm $\| \cdot \|_A$ äquivalent zur Euklidischen Norm ist.

(iii) Geben Sie die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}^3$ an, die die Identität $\|x\|_A^2 = 1$ erfüllen, und skizzieren Sie diese Menge.

(Hinweis: Diagonalizieren Sie die Matrix A.)