Priv.Doz. Dr.(USA) Maria Charina

3. Übungsblatt zur Numerik
WS 2016/17

Aufgabe 3.1

(i) Seien $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$ die Standard-Einheitsvektoren,

$$G_k = I - \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_{k+1,k} \\ \vdots \\ g_{n,k} \end{pmatrix} e_k^T, \quad k = 1, \ldots, n-1,$$

und $P_{ij} = I - (e_i - e_j)(e_i - e_j)^T$, $1 \leq i \leq j \leq n$.

Zeigen Sie, dass $P_{ij} G_k P_{ij}$, $1 \leq k < i \leq j \leq n$, untere Dreiecksmatrizen sind.

(ii) Zeigen Sie, dass die unteren Dreiecksmatrizen $L = (\ell_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\ell_{ii} = 1$, $i = 1, \ldots, n$, eine Gruppe bzgl. der Matrixmultiplikation bilden. Ist diese Gruppe abelsch?

Aufgabe 3.2 Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3.1 & 10000 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -30000 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

(i) Lösen Sie dieses Gleichungssystem zunächst exakt und dann in vierstelliger Gleitkommaarithmetik (d.h. $\mathrm{fl}(10, 4, s)$) mit Hilfe der Gauß-Elimination mit Pivotierung.

(ii) Skalieren Sie das Gleichungssystem

$$D^{-1}Ax = D^{-1}b, \quad D = \mathrm{diag}(d_1, d_2), \quad d_j = |a_{j1}| + |a_{j2}|,$$

und berechnen Sie die Lösung des skalierten Systems in vierstelliger Gleitkommaarithmetik (d.h. $\mathrm{fl}(10, 4, s)$) mit Hilfe der Gauß-Elimination mit Pivotierung.

Vergleichen Sie die Lösungen aus (i) und (ii) mit der exakten Lösung von $Ax = b$.

Aufgabe 3.3

(i) Schreiben Sie ein Matlab-Programm

$$\texttt{function LRZerlegung} = \texttt{myLRZerlegung(A)},$$

das die $LR-$Zerlegung einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Hilfe der Gauß-Elimination ohne Pivotierung berechnet. Um den Speicherplatz zu reduzieren, sollen die Einträge der Matrix A mit den Einträgen von L und R überschrieben werden. D.h. auf und oberhalb der Hauptdiagonale besteht die $n \times n$ Matrix `LRZerlegung` aus den entsprechenden Einträgen von R und unterhalb der Hauptdiagonale aus den entsprechenden Einträgen von L. (Beachten Sie, dass die Diagonalelemente von L alle gleich 1 sind. Deshalb werden die nicht gespeichert.) Benutzen Sie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \texttt{LRZerlegung} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & -3 & -6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

um das Programm zu testen.

(ii) Schreiben Sie ein Matlab-Programm

$$\texttt{x} = \texttt{mysolve(A, b)},$$

das das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der `LRZerlegung` aus (i) löst. Benutzen Sie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 31 \end{pmatrix},$$

um das Programm zu testen.

Aufgabe 3.4 Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1.05 & 1.02 \\ 1.04 & 1.02 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie die $LR-$Zerlegungen von A

$$A \approx L^{(0)}R^{(0)} \quad \text{bzw.} \quad A \approx L^{(1)}R^{(1)}$$

in dreistelliger bzw. in sechsstelliger Gleitkommaarithmetik (d.h. $\mathrm{fl}(10,3,s)$ bzw. $\mathrm{fl}(10,6,s)$).

(ii) Lösen Sie das Gleichungssystem $L^{(0)}R^{(0)}x^{(0)} = b$ in dreistelliger Gleitkommaarithmetik (d.h. $\mathrm{fl}(10,3,s)$).

(iii) Führen Sie einen Schritt der Nachiteration

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \delta, \quad L^{(0)}R^{(0)}\delta = b - L^{(1)}R^{(1)}x^{(0)},$$

durch. Vergleichen Sie $x^{(1)}$ mit der exakten Lösung von $Ax = b$.