

Priv.Doz. Dr.(USA) Maria Charina

2. Übungsblatt zur Numerik WS 2016/17

Aufgabe 2.1

(i) Schreiben Sie das Problem

”Berechnen Sie die Lösungen von $x^2 + px + q = 0$ ”

als eine Variante des Problems 1 um.

(ii) Ist das Problem 1 aus (i) gut bzw. schlecht konditioniert für $q \ll \frac{p^2}{4}$?
Begründen Sie Ihre Antwort.

(iii) Ist der Algorithmus

$$y_1 = (p \otimes p) \oslash 4$$

$$y_2 = y_1 \ominus q$$

$$y_3 = \sqrt{y_2}$$

$$y = (p \oslash 2) \oplus y_3$$

numerisch stabil bzw. instabil für $p < 0$ und $q \ll \frac{p^2}{4}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2.2

(i) Zeigen Sie, dass die Frobenius-Norm

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i,k=1}^n |a_{i,k}|^2}$$

eine Matrixnorm ist, die mit der Euklidischen Vektornorm $\|\cdot\|_2$ verträglich ist.

(ii) Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so dass gilt

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 \neq \|A\|_F.$$

Aufgabe 2.3 Berechnen Sie für die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Inversen A_j^{-1} , $j = 1, 2$ und die Konditionszahlen $\text{cond}_1(A_j)$ und $\text{cond}_\infty(A_j)$, $j = 1, 2$.

Aufgabe 2.3

(i) Lösen Sie mit Hilfe der Gauß-Elimination die Gleichungssysteme

a) $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1.985 & -1.358 \\ 0.953 & -0.652 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2.212 \\ 1.062 \end{pmatrix}.$$

b) $Ax = \tilde{b}$ mit A wie in a) und $\tilde{b} = (2.212, 1.061)^T$.

Ist das Problem in a) gut bzw. schlecht konditioniert?

(ii) Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wie groß sind die relativen Fehler $\|x - \tilde{x}\|_1 / \|x\|_1$ und $\|x - \tilde{x}\|_\infty / \|x\|_\infty$, wenn der relative Fehler in den Matrixelementen höchstens $\pm 1\%$ und in den Komponenten der rechten Seite höchstens $\pm 3\%$ beträgt?