Priv.Doz. Dr.(USA) Maria Charina

13. Übungsblatt zur Numerik
WS 2016/17

Aufgabe 13.1 Entwickeln Sie das gedämpfte Newton-Verfahren zur Berechnung einer Näherung an die Nullstelle von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Führen Sie ausgehend von $x^{(0)} = \frac{3}{2}$ drei Schritte dieses Verfahrens für $f(x) = \arctan(x)$ durch. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den entsprechenden Iterierten des Newton-Verfahrens.

Aufgabe 13.2 Gegeben sei das Gebiet $G := (-1, 1) \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ sowie das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{1}{3}t^3 y\,, \quad y(0) = 1\,.$$

(*i*) Zeigen Sie, dass die Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(t) = e^{t^4/12}$, die Differentialgleichun $y' = \frac{1}{3}t^3 y$ erfüllt.

(*ii*) Weisen Sie nach, dass die Abbildung $\Phi : C[-1, 1] \to C[-1, 1]$,

$$(\Phi y)(t) := 1 + \frac{1}{3}\int_0^t s^3 y(s)\, ds, \quad t \in [-1, 1], \quad y \in C[-1, 1]\,,$$

eine kontrahierende Selbstabbildung des Banachraumes $C[-1, 1]$ mit der Maximumnorm liefert. Ist die Anfangswertaufgabe eindeutig lösbar auf $G = \mathbb{R}^2$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(*iii*) Führen Sie, ausgehend von $y_0(x) \equiv 1$, zwei Schritte der Picard-Iteration zur Lösung der AWA durch. (Hinweis: siehe Vorlesungsfolien.)

(*iv*) Geben Sie eine a posteriori–Fehlerabschätzung für

$$\|y - y_2\| := \max_{x\in[-1,1]} |y(x) - y_2(x)| \text{ an.}$$

Aufgabe 13.3 Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y' = -\frac{t}{y}, \quad y(0) = 1.$$

(*i*) Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differenzialgleichung $y' = -\frac{t}{y}$.

(*ii*) Führen Sie drei Schritte des Euler-Verfahrens zur Schrittweite $h = 0.3$ durch und skizzieren Sie diese Schritte im Richtungsfeld.

(*iii*) Führen Sie drei Schritte des durch $y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))$ definierten Einschrittverfahrens zur Schrittweite $h = 0.3$ durch und skizzieren Sie diese Schritte im Richtungsfeld.

Aufgabe 13.4 Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y' = -200y, \quad y(0) = 5.$$

Bestimmen Sie die obere Schranke h_{max}, so dass das Verfahren von Heun 2.Ordnung für alle Schritte $0 < h < h_{max}$ eine streng monoton fallende Folge von Näherungslösungen liefert.