Priv.Doz. Dr.(USA) Maria Charina

12. Übungsblatt zur Numerik
WS 2016/17

Aufgabe 12.1 Gegeben sei die nichtlineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2 + 2 \\ x_1^2 + x_2^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

(i) Führen Sie ausgehend von $x^{(0)} = (1, 2)^T$ zwei Schritte des Newton-Verfahrens durch, um eine Näherung an die Lösung von $f(x_1, x_2) = 0$ zu bestimmen.

(ii) Lösen Sie $f(x_1, x_2) = 0$ analytisch.

(iii) Überprüfen Sie, ob f auf $\Omega = (-1, 1) \times (1, 3)$ die Voraussetzungen des Satzes im Kapitel 7.3 erfüllt. Welche Konsequenzen hat es für die Konvergenz der Iteration in (i)?

Aufgabe 12.2 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $f(x^*) = 0$ und $f'(x^*) \neq 0$. Zeigen Sie, dass es $r > 0$ existiert, so dass die entsprechende Iterationsfunktion des Newton-Verfahrens kontrahierend auf $[x^* - r, x^* + r]$ ist. Was kann man über die Lösbarkeit des entsprechenden Problems 7 aussagen?

Aufgabe 12.3

(i) Berechnen Sie für die Funktion $f(x) = \sin(x) - 1$ mit dem Startwert $x^{(0)} = 3$ zehn Iterierte des Newton-Verfahrens, um eine Näherung an die Nullstelle $x = \frac{\pi}{2}$ von f zu bestimmen. Warum ergibt sich in diesem Fall keine quadratische Konvergenz?

(ii) Modifizieren Sie das Newton-Verfahren für die Funktion f in (i), so dass die quadratische Konvergenz erzielt wird und berechnen Sie die entsprechenden Iterierten.

Aufgabe 12.4 Führen Sie fünf Schritte des Sekantenverfahrens durch, um eine Näherung an die Nullstelle x^* von $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$ zu bestimmen. Verwenden Sie dabei die Startwerte $x^{(0)} = 2$ und $x^{(1)} = 3$.