Priv.Doz. Dr.(USA) Maria Charina

11. Übungsblatt zur Numerik
WS 2016/17

Aufgabe 11.1 Es gilt

$$\int_0^1 \sin(\sqrt{x})dx = 0.6023373\ldots.$$

(i) Zeigen Sie, dass gilt

$$\int_0^1 \sin(\sqrt{x})dx = \int_0^1 \left(\sin(\sqrt{x}) - \sqrt{x}\right) dx + \frac{2}{3}.$$

(ii) Verwenden Sie die summierte Trapezregel für $m = 1, 2, 4$, um die Näherungen an

$$\int_0^1 \sin(\sqrt{x})dx \quad \text{und} \quad \int_0^1 \left(\sin(\sqrt{x}) - \sqrt{x}\right) dx + \frac{2}{3}$$

zu berechnen. Vergleichen Sie die Ergebnisse.

(iii) Wie viele Funktionsauswertungen sind notwendig, um das Integral

$$\int_0^1 \sin(\sqrt{x})dx$$

mit Hilfe der summierten Trapezregel mit einem Fehler kleiner als 10^{-4} zu berechnen?

Aufgabe 11.2 Bestimmen Sie eine Gauß-Quadraturformel, die das Integral

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(x)\sqrt{|x|}dx$$

exakt für alle Polynome aus $\mathcal{P}_3$ integriert. (Hinweis: $\{1, x, x^2 - \frac{3}{7}\}$ sind orthogonal bzgl. des Skalarproduktes $(f,g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\sqrt{|x|}dx$.)

Aufgabe 11.3

(i) Gegeben sei die Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ der Kettenbrüche

$$x^{(1)} = \frac{1}{2}, \quad x^{(2)} = \frac{1}{2+\frac{1}{2}}, \quad x^{(3)} = \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}} \quad \text{usw.}$$

Bestimmen Sie eine Funktion $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derart, dass für $x^{(0)} = 0$ die Rekursion $x^{n+1} = \phi(x^{(n)})$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ gilt.

(ii) Bestimmen Sie die Kontraktionszahl der Funktion

$$f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} xy \\ -2xe^{-y} \end{pmatrix},$$

bzgl. der Maximumsnorm auf $\mathbb{R}^2$.

Frohe Weihnachten und Prosit 2017!