Priv.Doz. Dr.(USA) Maria Charina

10. Übungsblatt zur Numerik
WS 2016/17

Aufgabe 10.1 Seien $n = 2^\ell$, $\ell \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{C}^n$, $\mathcal{F}_n$ die $n \times n$ Fourier-Matrix und

$$\omega_n = e^{-i2\pi/n}.$$

Die Idee des Cooley-Tukey-Algorithmus: ersetze $c = \mathcal{F}_n y$ durch

$$\begin{pmatrix} c_{0+\ell\frac{n}{2}} \\ \vdots \\ c_{\frac{n}{2}-1+\ell\frac{n}{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{n}\mathcal{F}_{n/2}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} \end{pmatrix} + (-1)^\ell \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \omega_n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_n^{n-1} \end{pmatrix} \frac{1}{n}\mathcal{F}_{n/2}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix},$$

$\ell = 0, 1$. Beweisen Sie, dass der Rechenaufwand des Cooley-Tukey-Algorithmus $O\left(n\log_2(n)\right)$ ist.

Aufgabe 10.2 Die 2π-periodische Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \pi/2), \\ \pi - x, & x \in [\pi/2, \pi], \end{cases}$$

wird ungerade fortgesetzt. Berechnen Sie die beste Gauß-Approximation

$$s^* \in S = \operatorname{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(x), \sin(x)\right\}$$

and $f \in C[-\pi, \pi]$. Vergleichen Sie s^* mit dem trigonometrischen Interpolationspolynom aus Aufgabe 9.2.

Aufgabe 10.3 Seien $V = C[0,1]$ und $S = \operatorname{span}\{1, x^2\} \subset C[0,1]$.

(i) Zeigen Sie, dass S ein Haarscher Raum ist.

(ii) Sei $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, $x \in [0,1]$. Bestimmen Sie ein $s \in S$ und ein Extremum $z_1 \in (0,1)$ der Fehlerfunktion $f - s$, so dass gilt

$$(f-s)(0) = -(f-s)(z_1) = (f-s)(1).$$

Ist diese Funktion s die beste Tschebyscheff-Approximation an f?

Aufgabe 10.4 Es sei eine Quadraturformel

$$\int_0^1 f(x)dx \approx I_2 = a_0 f(0) + a_1 f(\frac{1}{2}) + a_2 f(1)$$

gegeben. Bestimmen Sie die Gewichte $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ so, dass $I_2(f)$ auf $\mathcal{P}_m$ exakt ist, wobei $m \in \mathbb{N}$ so groß wie möglich ist.