Übungsbeispiele zu Gewöhnliche Differentialgleichungen
SS 2018, Josef Hofbauer

0. Löse folgende Differentialgleichungen (etwa durch Separation der Variablen):
   a) $y' = 1 + y^2$, b) $y' = xy$
1. Finde die Lösung der logistischen Dgl. $\dot{x} = ax(K - x)$ mit Anfangswert $x(0) > 0$ durch direkte Integration (Trennung der Variablen). Zeige die Monotonie der Lösungen und bestimme deren Verhalten für $t \to \pm\infty$.
2. Die Differentialgleichung $\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$ ($a, b > 0$) ist ein einfaches Modell für eine gedämpfte Schwingung. Finde (zumindest für kleine a) die Lösungen dieser Dgl. mit dem Ansatz $x(t) = e^{-\frac{a}{2}t}y(t)$.
3. Löse die Differentialgleichung für den verzögerten freien Fall $m\ddot{x} = -\rho\dot{x} + mg$. Finde die Grenzgeschwindigkeit. (Hinweis: Zuerst eine spezielle (konstante) Lösung für $\dot{x} = y$ suchen.)
4. Die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung $y' = a(x)y$, wo $a(x)$ eine stetige Funktion auf einem Intervall I ist, ist gegeben durch $y(x) = Ce^{A(x)}$, wobei $A(x)$ eine Stammfunktion von $a(x)$ ist.
5. Löse die inhomogene lineare Dgl. $y' = 2y + 1 + x^2$.
6. $y' = -y + \frac{1}{x}$.
7. Bestimme das Phasenportrait von $\ddot{x} + x = 0$ durch Lösen der Dgl. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}$.
8. Zeige, dass eine *homogene Differentialgleichung* $y' = f(\frac{y}{x})$ durch die Substitution $u = \frac{y}{x}$ gelöst werden kann.
9. Bestimme das Phasenportrait des linearen Dgl-systems $\dot{x} = ax + by, \dot{y} = cx + dy$ im $\mathbb{R}^2$ durch Lösen der Differentialgleichung
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{cx + dy}{ax + by},$$
   zumindest für die drei grundlegenden Fälle 1) $b = c = 0$, 2) $d = a, c = -b$ und 3) $d = a, b = 0, c = 1$.
10. Für welche Werte von a, b, c, d ist die Differentialform
$$(cx + dy)\mathrm{d}x - (ax + by)\mathrm{d}y = 0$$
   exakt? Was bedeutet diese Bedingung für das zugehörige lineare Dgl-system im $\mathbb{R}^2$? Berechne die Stammfunktion.
11. Integriere die Differentialform aus Bsp. 10 für beliebige a, b, c, d mit Hilfe eines integrierenden Faktors.
12. Die *Bernoullische Differentialgleichung* $y' = a(x)y + b(x)y^\alpha$ ($\alpha \neq 1$, a, b stetig auf einem Intervall I) kann durch den Ansatz $z = y^\beta$ (für geschickte Wahl von β) auf eine lineare Dgl. zurückgeführt werden. (Vgl. die Lösung der logistischen Dgl in der Vorlesung.)
13. Löse die Dgl. $\dot{x} + \frac{x}{t} = t^2x^2$.
14. Für die *Riccatische Differentialgleichung* $y' = a(x)y + b(x)y^2 + c(x)$ (also eine "inhomogene Bernoullische") hat Euler 1763 folgende Methode angegeben: Wenn man eine spezielle Lösung y_s kennt, dann führt der Ansatz $y = y_s + u$ auf eine Bernoullische Dgl für u .
15. Löse die Dgl. $y' - (1 - 2x)y + y^2 = 2x$ (errate zuerst eine Lösung).
16. Löse die Dgl. $y' = e^{-x}y^2 + y - e^x$.
17. Versuche die Lösung der Dgl. $y' = y^2 - x^2$ mit Anfangswert $y(0) = 1$ zu finden.

18. Bestimme die Lösungskurven von $(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$.
19. $ydx + (2xy - e^{-2y})dy = 0$.
20. Man finde zwei 2×2 Matrizen A, B mit $e^{A+B} \neq e^A e^B$.
21. Gibt es reelle 2×2 Matrizen S mit $e^S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ bzw. $e^S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$?
22. Skizziere das Vektorfeld und die Lösungskurven der linearen Dgl. $\dot{x} = Ax$ im $\mathbb{R}^2$ für die folgenden Matrizen A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

23. Löse das System (siehe §2. Fall II)

$$\dot{x} = \alpha x - \beta y, \quad \dot{y} = \beta x + \alpha y$$

durch Übergang zu komplexen Koordinaten $z = x + iy$.
24. Löse die lineare Dgl $\dot{x} = Ax$ für die folgenden Matrizen A :

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

25. Finde eine 2×2 Matrix A , sodass $x(t) = (e^{2t} - e^{-t}, e^{2t} + 2e^{-t})$ eine Lösung von $\dot{x} = Ax$ ist.
26. Führe das lineare System

$$\dot{x} = ax + by, \quad \dot{y} = cx + dy$$

in eine Differentialgleichung 2. Ordnung $\ddot{x} - (a + d)\dot{x} + (ad - bc)x = 0$ über.
27. Zeige für die Norm $\|A\| = (\sum_{i,j} a_{ij}^2)^{1/2}$ einer Matrix die Ungleichung

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

28. Zeige, dass die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems $\dot{x} = Ax + s(t)$ durch

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}s(\tau)d\tau$$

gegeben ist.
29. Löse mit Variation der Konstanten:

$$\dot{x} = 4x + y - 36t \quad \dot{y} = -2x + y - 2e^t.$$

30. Bestimme das Phasenportrait und die Bahnen für die lineare Dgl. $\dot{x} = Ax$ in $n = 2$, wenn ein Eigenwert von A Null ist.

31/32. Löse die lineare Dgl $\dot{x} = Ax$ für die folgenden Matrizen A :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

33. Sei $\mathcal{P}_n$ der Vektorraum aller Polynome $p(x)$ vom Grad $< n$. Berechne für den Differentiationsoperator $Dp(x) = p'(x)$ die Eigenwerte und e^{tD}.

Übungsbeispiele zu Gewöhnliche Differentialgleichungen
SS 2018, Josef Hofbauer

34. Sei $\lambda^3 - S\lambda^2 + M\lambda - D = 0$ das charakteristische Polynom einer 3×3 Matrix A. Zeige, dass A genau dann stabil ist (d.h., alle Eigenwerte haben negativen Realteil), wenn $S < 0$, $D < 0$ und $SM < D$ gilt. Was passiert für $SM = D$?
35. Zeige: Falls A eine stabile Matrix ist, dann gilt $\lim_{t\to-\infty} |x(t)| = \infty$ für alle Lösungen $x(t) \neq 0$.
36. Unter welchen Bedingungen an A sind alle Lösungen von $\dot{x} = Ax$ beschränkt für $t \to +\infty$ bzw. beschränkt für $t \to \pm\infty$?
37. Sei u ein linker Eigenvektor von A, also $u^T A = \lambda u^T$. Berechne $(u^T x)^{\cdot}$ entlang $\dot{x} = Ax$ und deute das Ergebnis geometrisch.
38. Berechne die Bahnen von $\dot{x} = Ax$ für

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

39. Zeige dass $t^k e^{\lambda t}$ die lineare Dgl. n-ter Ordnung $x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = 0$ löst, falls λ eine $(k+1)$-fache Nullstelle des Polynoms $p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ ist. (Hinweis: Es ist dann auch $p'(\lambda) = \ldots = p^{(k)}(\lambda) = 0$.)
40. Zeige, dass das charakteristische Polynom der 'Begleitmatrix'

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix}$$

durch $p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$ gegeben ist.
Zeige außerdem, dass hat jeder Eigenwert von A geometrische Vielfachheit 1 hat.
41. Löse $x^{(3)} - \ddot{x} + 4\dot{x} - 4x = 0$ mit $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = -1$ und $\ddot{x}(0) = 1$.
42. Finde alle periodischen Lösungen von $x^{(4)} + 2\ddot{x} + x = 0$.
43. Löse die Dgl. einer erzwungenen Schwingung mit Reibung: $\ddot{x} + 2\rho\dot{x} + \omega^2 x = a\cos\nu t$. (Hinweis: Schreibe $\cos\nu t = \mathrm{Re}\ e^{i\nu t}$ und rechne komplex.) Mit welcher Frequenz schwingt das System schließlich? Für welches ν ist die Amplitude dieser Grenzschwingung maximal? Begründe: Das System ist nur für $\rho < \frac{\omega}{\sqrt{2}}$ resonanzfähig.
44. Eine spezielle Lösung von

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = f(t)$$

ist durch $x(t) = \int_0^t f(t-s)u(s)ds$ $(t > 0)$ gegeben, wobei $u(t)$ die Lösung der homogenen Gleichung mit den Anfangsbedingungen $u(0) = \dot{u}(0) = \ldots = u^{(n-2)}(0) = 0$ und $u^{(n-1)}(0) = 1$ ist.

44. Eine spezielle Lösung von

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = f(t)$$

ist durch $x(t) = \int_0^t f(t-s)u(s)ds$ $(t > 0)$ gegeben, wobei $u(t)$ die Lösung der homogenen Gleichung mit den Anfangsbedingungen $u(0) = \dot{u}(0) = \ldots = u^{(n-2)}(0) = 0$ und $u^{(n-1)}(0) = 1$ ist.

Übungsbeispiele zu Gewöhnliche Differentialgleichungen
SS 2018, Josef Hofbauer

45. Zeige für den Integraloperator T aus §3.2

$$\|T^n y - T^n z\| \leq \frac{(L\alpha)^n}{n!}\|y - z\|.$$

46. Zeige die folgende Verallgemeinerung des *Banachschen Fixpunktsatzes*:
T bilde einen vollständigen metrischen Raum X in sich ab und habe die Eigenschaft $d(T^n y, T^n z) \leq \alpha_n d(y, z) \quad (\forall y, z \in X)$, wobei $\sum \alpha_n < \infty$. Dann hat T genau einen Fixpunkt in X.
47. Sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Zeige, dass f eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt.
48. Zeige folgende Variante der *Gronwallschen Ungleichung*:
Seien $f_1, f_2 : D \to \mathbb{R}^n$ mit $|f_1(t, x) - f_2(t, x)| \leq \varepsilon$ und $x_i(t)$ Lösungen der jeweiligen Dgl, also $\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_i(t))$, mit demselben Anfangswert $x_i(t_0) = x_0$. f_1 habe Lipschitzkonstante L . Zeige: $|x_1(t) - x_2(t)| \leq \frac{\varepsilon}{L}(e^{L|t-t_0|} - 1)$.
52. Die Dgl. $\dot{x} = f(t, x)$ sei auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ definiert und erfülle auf jedem Streifen $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ eine gleichmäßige Lipschitzbedingung. Dann existieren die Lösungen $x(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
53. Die Dgl. $\dot{x} = f(t, x)$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ erfülle die Ungleichung $xf(t, x) < 0$ für $|x| > K$. Dann existieren die Lösungen $x(t)$ für alle $t > 0$.
55. Eine (nichtkonstante) periodische Lösung besitzt eine minimale Periode.
56. Für eine Dgl. $\dot{x} = f(x)$ auf $\mathbb{R}$ ist ein Gleichgewicht $\hat{x}$ genau dann asymptotisch stabil, wenn $V(x) = (x - \hat{x})^2$ eine strikte Ljapunovfunktion für $\hat{x}$ ist.
57. Finde eine Dgl. $\dot{x} = f(x)$ auf $\mathbb{R}$, für die 0 eine stabiles Gleichgewicht ist, aber keine Ljapunovfunktion für 0 existiert.
58. Für welche 2×2 Matrizen A ist $V(x) = |x|$ eine Ljapunovfunktion für die lineare Dgl. $\dot{x} = Ax$?
59. Kann man die Lösung von $\dot{x} = A(t)x$ wie für $n = 1$ in der Form
$x(t) = x(0) \exp \int_0^t A(s)ds$ schreiben?
60. Man gebe einen weiteren Beweis für den Satz von Ljapunov für lineare Dgl.:
Für eine Matrix A sei $\tilde{A}$ die Abbildung, die jeder $n \times n$ Matrix Q die Matrix $W = QA + A^T Q$ zuordnet. Die Eigenwerte von $\tilde{A}$ sind dann $\lambda_i + \lambda_j$, wenn λ_i die Eigenwerte von A durchläuft. Für stabiles A ist diese Abbildung daher bijektiv. Ist außerdem W negativ definit, muss Q positiv definit sein.
62. In der allgemeinen Räuber-Beute-Gleichung von Lotka-Volterra existiert kein innerer Fixpunkt, falls $as \geq cr$. Finde in diesem Fall eine globale Ljapunovfunktion für den Fixpunkt $(\frac{r}{a}, 0)$.
63. Wenn $\overline{\{x(t) : t \geq 0\}}$ kompakt ist, dann ist $\omega(x)$ zusammenhängend.
64. Für welche $n \times n$ Matrizen A ist die lineare Dgl. $\dot{x} = Ax$ ein Gradientensystem? Was ist das Potential?
65. Die Eigenwerte bei einem Fixpunkt eines Gradientensystemes sind immer reell. Die geometrische Vielfachheit ist gleich der algebraischen Vielfachheit.
66. Ein *verallgemeinertes Gradientensystem* ist eine Dgl. der Gestalt $\dot{x} = G(x)^{-1}\nabla V(x)$, wobei $G(x)$ für jedes x eine symmetrische positiv definite Matrix ist. Zeige, dass V eine Ljapunovfunktion ist. Welche anderen Eigenschaften von Gradientensystemen lassen sich auf verallgemeinerte Gradientensysteme übertragen?
67. Welche lineare Dgl. $\dot{x} = Ax$ sind verallgemeinerte Gradientensysteme?

Zeichne die Phasenportraits der folgenden Dgl., für die $O = (0,0)$ ein nicht-hyperbolisches Gleichgewicht ist:

68.
$$\dot{x}_1 = x_1^2 \qquad \dot{x}_2 = -x_2$$

69.
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(x_1 + 2x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_2(2x_1 + x_2) \end{aligned}$$

70.
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(x_1 - 2x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_2(-2x_1 + x_2) \end{aligned}$$

71.
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2^5 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2^2 \end{aligned}$$

72. Finde eine (strikte) Ljapunovfunktion für den Gleichgewichtspunkt $(0,0)$ der Dgl.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2x - y^2 \\ \dot{y} &= -y - x^2 \end{aligned}$$

mit einem möglichst großen Definitionsbereich.

73. Finde eine Konjugation zwischen den linearen Flüssen e^{At} für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$