

## Kurvendiskussion:

K 1. Führe mit den folgenden Funktionen eine Kurvendiskussion durch.  
Die Kurvendiskussion soll die folgenden Punkte beinhalten:

- Definitionsmenge
- Nullstellen
- Extrempunkte
- Wendepunkte und Wendetangenten
- Monotonie und Krümmung
- Verhalten der Funktion an den Grenzen des Definitionsbereiches
- Graph

(a)  $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{15}{4}$

(b)  $y = -\frac{x^2}{4} + x + 3$

(c)  $y = \frac{x^2}{2} - 4$

(d)  $y = -x^2 + x$

(e)  $y = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x + 2$

(f)  $y = \frac{x^3}{4} + \frac{3x^2}{2} + \frac{13x}{4} + 3$

(g)  $y = -\frac{1}{16}(x^3 - 3x^2 - 9x - 5)$

(h)  $y = \frac{1}{4}(-x^3 + 6x^2 - 13x + 20)$

(i)  $y = -\frac{1}{100}(x^3 - 3x^2 - 144x + 432)$

(j)  $y = \frac{x^3}{4} - \frac{x^2}{4} - 4x + 4$

(k)  $y = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 7$

(l)  $y = \frac{1}{8}(x^3 - 9x^2 + 27x + 19)$

(m)  $y = \frac{1}{3}(x^3 - 4x^2)$

(n)  $y = x^3 - 1$

(o)  $y = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 1$

(p)  $y = \frac{1}{16}x^4 - \frac{\sqrt{3}}{2}x^3 + 3x^2$

(q)  $y = -\frac{1}{4}x^4 + x^3$

(r)  $y = \frac{1}{50}(x^4 - 14x^3 + 45x^2)$

(s)  $y = \frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{2}$

(t)  $y = -\frac{x^4}{2} + \frac{3x^2}{2} - 2x$

(u)  $y = -\frac{1}{24}x^4 + x^2$

(v)  $y = \frac{1}{3}x^4 - x^3$

(w)  $y = \frac{1}{20}(x^4 - 8x)$

(x)  $y = \frac{4x^4}{81} - \frac{8x^3}{27}$

(y)  $y = \frac{x}{64}(x^2 - 20)^2$

(z)  $y = \frac{1}{32}x^6 - \frac{3}{8}x^4 + \frac{3}{2}x^2$

K 2. Der Graph der Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = ax^2 + bx + c$  enthält die Punkte  $A(-1|-3)$ ,  $B(1|1)$ ,  $C(2|4,5)$ . Ermittle die Funktionsgleichung von  $f$  und diskutiere die Kurve!

K 3. Der Graph der Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = \frac{3}{4}x^2 + bx + c$  geht durch den Punkt  $P(-1|9)$ . Die Steigung der Tangente im Punkt  $P$  ist  $-6$ . Ermittle die Funktionsgleichung von  $f$  und diskutiere die Kurve!

K 4. Der Graph der Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = ax^3 + bx^2$  hat den Extrempunkt  $E(4|4)$ . Ermittle die Funktionsgleichung von  $f$  und diskutiere die Kurve!

K 5. Der Graph der Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = -\frac{1}{8}x^3 + px^2 + 2$  hat an der Stelle 2 einen Wendepunkt. Ermittle die Funktionsgleichung von  $f$ !

K 6. Der Graph der Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = x^3 + px + q$  hat die Wendetangente  $t_w : 3x + 2y = 4$ . Ermittle die Funktionsgleichung von  $f$ !

- K 7. Eine Polynomfunktion 3. Grades hat den Tiefpunkt  $T(1|-3)$ . Die Tangente im Punkt  $P(-1|y_p)$  hat die Gleichung  $t_p: 4x + y = 9$ .  
Ermittle den Funktionsterm!
- K 8. Der Graph der Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = x^3 + bx^2 + cx + d$  hat den Sattelpunkt  $S(1|4)$ .  
Ermittle die Funktionsgleichung von  $f$ !
- K 9. Der Graph der Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = ax^3 + bx^2 - \frac{9}{2}x + d$  hat an der Stelle 4 den Wendepunkt mit der Wendetangente  $t_w: 3x = 2y$ . Ermittle die Funktionsgleichung von  $f$ !
- K 10. Eine Polynomfunktion 3. Grades geht durch den Punkt  $P(2|3)$  und hat in  $W(0|1)$  den Wendepunkt. Die Steigung der Wendetangente ist  $-3$ . Ermittle die Funktionsgleichung von  $f$ !
- K 11. Der Graph der Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = ax^4 + bx^2$  hat den Extrempunkt  $E(-3|-\frac{27}{4})$ .  
Ermittle die Funktionsgleichung von  $f$ !
- K 12. Der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades hat in  $O(0|0)$  einen Extrempunkt und in  $W(1|\frac{2}{3})$  den Wendepunkt. Ermittle die Funktionsgleichung!
- K 13. Der Graph der Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = ax^4 + bx^3 - x^2$  hat den Wendepunkt  $W(2|-4)$ .  
Ermittle die Funktionsgleichung von  $f$ !
- K 14. Der Graph der Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = ax^4 + bx^3$  hat den Extrempunkt  $E(-2|\frac{27}{4})$ .  
Ermittle die Funktionsgleichung von  $f$ !
- K 15. Der Graph der Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = ax^4 + bx^3 - x^2$  hat den Wendepunkt  $W(2|-4)$ .  
Ermittle die Funktionsgleichung von  $f$ !
- K 16. Eine Polynomfunktion 3. Grades hat den Wendepunkt  $W(0|-5)$ . Die Tangente im Punkt  $P(4|y_p)$  hat die Gleichung  $t_p: y = -2x + 11$   
Gib den Funktionsterm an!
- K 17. Eine Polynomfunktion 4. Grades schneidet die  $x$ -Achse an den Stellen 0 und 2. An der Stelle 1 liegt ein Wendepunkt mit der Wendetangente  $t_w: 2x + y = 1$ . Ermittle die Funktionsgleichung von  $f$ !
- K 18. Der Graph der Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = ax^5 + bx^4 + cx^3$  hat einen Wendepunkt  $W(-2|-2)$ . Die Steigung der Wendetangente ist  $\frac{15}{8}$ . Ermittle die Funktionsgleichung von  $f$ !
- K 19. Der Graph einer Polynomfunktion 4. Grades hat im Ursprung einen Wendepunkt mit der  $x$ -Achse als Wendetangente. Im Punkt  $P(-1|\frac{3}{4})$  hat die Steigung der Tangente den Wert  $-2$ . Ermittle die Funktionsgleichung von  $f$ !
- K 20. Ermittle die Gleichung jener Polynomkurve 4. Grades, die die Gerade  
 $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$   
an den Stellen  $-1$  und  $2$  berührt sowie die  $y$ -Achse in  $P(0|2)$  schneidet!
- K 21. Der zur  $y$ -Achse symmetrische Graph einer Polynomfunktion 4. Grades hat in  $W(-\sqrt{3}|0)$  einen Wendepunkt mit der Wendetangente  $t_w: 8\sqrt{3}x - 3y = -24$ . Ermittle die Funktionsgleichung von  $f$ !
- K 22. Der Graph der Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y = ax^6 + dx^3 + g$  enthält den Punkt  $P(-3|4)$  und hat den Extrempunkt  $E(3|0)$ .

K 23. Gegeben sind mögliche Eigenschaften einer Funktion  $f$  und formale Aussagen A–L:

- |  |                                |
|--|--------------------------------|
| (1) $f$ geht durch den Punkt $(2 8)$ .                                       | A $f(2)$ geht gegen unendlich. |
| (2) $f$ hat bei 2 eine Nullstelle.   | B $f(2) = 0$                   |
| (3) $f$ hat an der Stelle 2 einen Sattelpunkt.                               | C $f(0) = 2$                   |
| (4) $f$ hat an der Stelle 2 einen Wendepunkt.                                | D $f'(2) = 0$                  |
| (5) Der Anstieg im Punkt $(2 8)$ ist 3.                                      | E $f'(0) = 2$                  |
| (6) $f$ hat an der Stelle 2 einen Wendepunkt mit der Tangente $y = 3x + 2$ . | F $f''(2) = 0$                 |
| (7) $f$ schneidet die $x$ -Achse bei 2.                                      | G $f''(2) = 8$                 |
| (8) $f$ hat an der Stelle 2 ein lokales Extremum.                            | H $f(2) = 8$                   |
| (9) $f$ hat bei 2 eine senkrechte Asymptote.                                 | I $f'(2) = 3$                  |
| (10) $f$ geht durch den Ursprung.  | J $f(0) = 0$                   |
|  | K $f(2) = f(0)$                |
|  | L $f'(0) = 1$                  |

Ordne den gegebenen Eigenschaften (1) – (10) alle passenden formalen Aussagen zu!

- |           |            |           |           |
|-----------|------------|-----------|-----------|
| (1) _____ | (2) _____  | (3) _____ | (4) _____ |
| (5) _____ | (6) _____  | (7) _____ | (8) _____ |
| (9) _____ | (10) _____ |           |           |

K 24. Führe mit den folgenden Funktionen eine Kurvendiskussion durch.

Die Kurvendiskussion soll die folgenden Punkte beinhalten:

- Definitionsmenge
- Nullstellen
- Asymptoten
- Extrempunkte
- Wendepunkte und Wendetangenten
- Monotonie und Krümmung
- Graph

- |                                     |                                     |  |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--|
| (a) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$        | (l) $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$      | (v) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-x-6}$                     |
| (b) $f(x) = \frac{x^3-4}{x^2}$      | (m) $f(x) = \frac{3-x^2}{x^2-4}$    | (w) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+2x-3}$                    |
| (c) $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$     | (n) $f(x) = \frac{x^2-6}{x^2-4}$    | (x) $f(x) = \frac{x^2 \cdot (x-9)}{2 \cdot (x-8)^2}$ |
| (d) $f(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$     | (o) $f(x) = \frac{6}{x^2+3}$        | (y) $f(x) = \frac{x^3(8-x)}{2(x-6)^3}$               |
| (e) $f(x) = \frac{x^2+4}{2x-4}$     | (p) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+12}$     | (z1) $f(x) = \frac{x^3}{3(x-2)^2}$                   |
| (f) $f(x) = \frac{x^2-8}{x+2}$      | (q) $f(x) = \frac{x^2-2x}{(x+1)^2}$ | (z2) $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$                    |
| (g) $f(x) = \frac{-x^2+3x+4}{2x+4}$ | (r) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-3}$      | (z3) $f(x) = \frac{4x^3}{1-x-3x^2}$                  |
| (h) $f(x) = \frac{x}{x^2-6}$        | (s) $f(x) = \frac{x^3}{4-x^2}$      | (z4) $f(x) = \frac{x^3-2}{2x}$                       |
| (i) $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$       | (t) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-x-2}$    | (z5) $f(x) = \frac{x^3+3x^2+5}{x}$                   |
| (j) $f(x) = \frac{6x}{x^2+2x+4}$    | (u) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+x-6}$    | (z6) $f(x) = \frac{x^3}{6x-12}$                      |
| (k) $\frac{1-x^4}{x^2}$             |                                     |  |

K 25. Berechne die folgenden Grenzwerte

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

(f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x}$

(k)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan x}$

(g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

(l)  $\lim_{x \rightarrow \infty} 5x^2 \cdot e^{-x}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x}$

(h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^{-x} - 1}$

(m)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + x - 12}{x + 4}$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x}$

(i)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x}$

(n)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\ln x}$

(e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

(j)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^{-x}$

(o)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(3x)}{\cos x}$

K 26. Führe mit den folgenden Funktionen eine Kurvendiskussion durch.

Die Kurvendiskussion soll die folgenden Punkte beinhalten:

- Definitionsmenge
- Nullstellen
- Extrempunkte
- Wendepunkte und Wendetangenten
- Monotonie und Krümmung
- Verhalten der Funktion an den Grenzen des Definitionsbereiches
- Graph

(a)  $y = x \cdot e^x$

(g)  $y = (x^2 - 3) e^x$

(m)  $y = e^{\frac{1}{1-x^2}}$

(b)  $y = x^2 \cdot e^x$

(h)  $y = (x + 1)^2 e^{-2x}$

(n)  $y = \frac{e^x}{2(x-1)}$

(c)  $y = x \cdot e^{-x}$

(i)  $y = (x^2 - 1) e^x$

(o)  $y = e^{\frac{1}{1+x^2}}$

(d)  $y = x^2 \cdot e^{-2x}$

(j)  $y = 2x \cdot e^{x^2/2}$

(p)  $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-x}}{x+1}$

(e)  $y = (x + 4) \cdot e^{-\frac{x}{4}}$

(k)  $y = 2x e^{-x^2/2}$

(f)  $y = \left(\frac{x}{2} + 3\right) e^{-\frac{x}{2}}$

(l)  $y = (e^{-x} - 1)^2$

K 27. Diskutiere die folgenden Kurven!

Die Kurvendiskussion soll dieselben Punkte enthalten wie in Aufgabe K 26.

(a)  $y = x \cdot \ln x$

(e)  $y = x^2 \cdot \ln x$

(i)  $y = \frac{1}{x} + \ln x$

(m)  $y = x \cdot \lg(x^2)$

(b)  $y = \frac{1 - \lg x}{x}$

(f)  $y = \ln x - \frac{1}{\ln x}$

(j)  $y = \frac{1}{x} - \lg x$

(n)  $y = x \cdot \ln(x^3)$

(c)  $y = \frac{1+x}{x}$

(g)  $y = \lg x + \frac{1}{\lg x}$

(k)  $y = x \cdot (\ln x - 1)$

(o)  $y = \ln(x^2 + 1)$

(d)  $y = (\ln x)^2$

(h)  $y = \lg^3(x - 3)$

(l)  $y = x \cdot (1 - \lg x)$

(p)  $y = \lg(x^2 - 1)$