Logarithmus

L 1. Löse die folgenden Gleichungen!

(a) $3^x = \frac{1}{9}$
(b) $4^{x-2} = 8^{x-3}$
(c) $5^{x-4} = 125$
(d) $12^x = 7$
(e) $3^x = 8,1$
(f) $12,4^{3x-2} = 32,7$
(g) $\left(\frac{1}{4}\right)^{5x-4} = 0.25$
(h) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+3} = 12$

L 2. Berechne ohne Taschenrechner:

(a) ${}^{3}\log 9 =$
(b) ${}^{\frac{1}{2}}\log 8 =$
(c) ${}^{5}\log 1 =$
(d) ${}^{2}\log \sqrt[3]{4} =$
(e) ${}^{10}\log 1000 =$
(f) ${}^{0.1}\log 10 =$
(g) ${}^{4}\log 2 =$
(h) ${}^{7}\log 343 =$
(i) ${}^{3}\log \frac{1}{\sqrt[4]{27}} =$

L 3. Berechne jeweils die Variable x!

(a) ${}^{x}\log 9 = -2$
(b) ${}^{x}\log 27 = -\frac{3}{4}$
(c) ${}^{4}\log x = -1$
(d) ${}^{x}\log \frac{8}{729} = 3$
(e) ${}^{0,1}\log x = -0,125$
(f) ${}^{\frac{9}{4}}\log x = -0,5$
(g) ${}^{20}\log x = 3$
(h) ${}^{x}\log \frac{1}{625} = -4$
(i) ${}^{3}\log x = -1$

L 4. Zerlege den gegebenen Ausdruck mit Hilfe der Rechenregeln für Logarithmen!

(a) $\log (a \cdot b \cdot f)$
(b) $\log \frac{x \cdot y}{z}$
(c) $\log \left(4d^2 f^5\right)$
(d) $\log \left(7z^5 \cdot t^9\right)$
(e) $\log \frac{m^4 n}{4p^3}$
(f) $\log \frac{\sqrt{a}}{b^3}$
(g) $\log \left(\sqrt{c}\sqrt[5]{u^2}\right)$
(h) $\log \frac{\sqrt[3]{u}}{\sqrt[4]{z^3 y^7}}$
(i) $\log \left(z\sqrt{2}\right)$

L 5. Zerlege den gegebenen Ausdruck
(i) ohne den Term vorher zu vereinfachen! **(ii)** nachdem Du den Term vereinfacht hast!

(a) $\log \frac{a^2 \cdot \sqrt{ab}}{\sqrt[3]{b^2}}$
(b) $\log \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x+y}}$
(c) $\log \frac{\sqrt{2u} \cdot \sqrt[5]{v^2}}{\sqrt[3]{4v} \cdot \sqrt[4]{u^3}}$
(d) $\log \left(c + c^2\right)$
(e) $\log \left(z^2 - z\right)$
(f) $\log \frac{\sqrt[3]{pq}}{p^2 \sqrt{q}}$

L 6. Stelle die folgenden Ausdrücke als Logarithmus eines einzigen Terms dar! Vereinfache diesen Term anschließend! (falls möglich)

(a) $\log 2 - \log a + \frac{1}{2} \log b$
(b) $\log(1-x) + \log(1+x) - 2\log x$
(c) $2\log x + \frac{1}{4}[\log a - \log(a-b)]$
(d) $\log x + 2\log y - \frac{2}{3}\log z$
(e) $\log(a+b) + \log(b-a) - 2\log b$
(f) $3\log a - \frac{1}{3}[\log x + \log(x-y)]$
(g) $3\log x - \log y - \frac{1}{5}[2\log(x-y) + \log y]$
(h) $2(\log(2b) - \log(2a)) + \log a^3 + \log b^5$
(i) $\log\left(4a^3\right) - 3\log(2ab) - 2 \cdot \left[\log(2b) + \log b^2\right]$
(j) ${}^{10}\log\left(2a^3\right) - 3 \cdot {}^{10}\log\left(ab^2\right) - \left(2 - {}^{10}\log\left(2b^3\right)\right)$
(k) $1 - \ln\left(3^2 a\right) + 2\left[\ln(ab) - \ln\left(3b^2\right)\right] - \ln a^2$
(l) $\log a + \log b^3 - 2\log\left(ab^2\right)$

L 7. Berechne:

(a) ${}^{6}\log 12 =$
(b) ${}^{\frac{1}{2}}\log 5 =$
(c) ${}^{3}\log 1 =$
(d) ${}^{0.25}\log 32 =$
(e) ${}^{12}\log 1000 =$
(f) ${}^{7}\log 0,8 =$
(g) ${}^{2}\log 1024 =$
(h) ${}^{22}\log 890 =$

L 8. Löse die folgenden Gleichungen:

(a) $3^{2x-1} \cdot 4^{x+3} = 2^{x+3}$

(b) $5^{x+1} \cdot 76^x = 7^{x-1}$

(c) $8,63^{x-3} = 5,31^{3x+2} \cdot 23^{x-2}$

(d) $5^{x-1} = 3^x \cdot 4^{x+1}$

(e) $\frac{3^{(2x+1)/3}}{5^{4-x}} = 8^{(x-1)/2}$

(f) $3^{x+2} + 4^x = 4^{x+1} - 3^{x+1}$

(g) $5^{x+3} + 6^{x+2} = 5^{x+5} - 6^{x+3}$

(h) $3^x - 4^{2x+3} = 4 \cdot 3^{x-2} + 4^{2x}$

(i) $9^{x-1} \cdot 11^{x+1} = 13^{2x}$

(j) $433^{2x-1} \cdot 0,623^{x-1} = 4,1^x \cdot 0,88^{2x-1}$

(k) $3^{\frac{5-x}{x}} = 10$

(l) $5^{(2x+1/3)} \cdot 3^{x-4} = 8^{(x+1/2)}$

(m) $\frac{91,4^{2x-1}}{6,83^{-x-1}} = 2000$

(n) $13 \cdot 3^{x-1} - 3^x = 3 \cdot 2^{x+2} - 4 \cdot 2^{x-1} - 10 \cdot 2^{x-2}$

(o) $3 \cdot 5^{x-8} - 5^{x-7} = 5 \cdot 2^{x-8} - 2^{x-4} - 3 \cdot 2^{x-9}$

(p) $5^{3x+2} + 7^{4x-1} = 4 \cdot 5^{3x} + 7 \cdot 7^{4x}$

L 9. Gib die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen an! ($\lg x =^{10} \log x$):

(a) $\lg x + \lg 4x = \lg 36$

(b) $\lg 8x = \lg 96 - \lg 3x$

(c) $\ln x + \ln(3x) + \ln(9x) = -3$

(d) $\lg x - \lg(2x) = \lg 1,5 - \lg 3x$

(e) $\ln x - \ln 3 = \ln 5 - \ln(x-2)$

(f) $\log(-5+x) + \log(3x) = \log(-8-x)$

(g) $\lg(2+x) + \lg(4+x) + 2 = 0$

(h) $-2\log(1+x) + 2\log(-4+2x) = \log 3$

(i) $2\ln(x+2) - \ln x = \ln(3x)$

(j) $\ln(x+3) - 2\ln x = 4$

(k) $\log(5+x) - \log(14+9x) = -\log(2+x)$

(l) $-\log(5-6x) + \log x = -\log(3+2x)$

(m) $\ln(x-3) + 2 = \ln(x+3)$

(n) $\ln(6x+3) = \ln(3x-1) + \ln 3$

(o) $\lg(x+3) - \lg(x-3) = 1$

(p) $\ln x + \ln(x+1) = 2 \cdot \ln(1-x)$

(q) $\lg(2x) + \lg(x+6) = \lg 4 + \lg(x-6)$

(r) $\lg(2+x) + \lg(4+x) = 3$

(s) $2\ln(x-5) - \ln x = \ln(3x-1)$

(t) $2\lg(x+1) - \lg(2-x) = 1$

L 10. Gib von den folgenden Funktionen die Definitionsmenge an, skizziere den Graphen und gib die Wertemenge an. Wähle Definitions- und Zielmenge so, dass die Funktion bijektiv wird. (Argumentiere, warum die Funktion injektiv und warum sie surjektiv ist!) Berechne die Umkehrfunktion. Zeichne anschließend die Graphen von Funktion und Umkehrfunktion:

(a) $y = 2\ln(3x)$

(b) $y = 1,5^{-x}$

(c) $y = \ln(-x)$

(d) $y = \lg(2x+6)$

(e) $y = \frac{1}{3} \cdot 2^x$

(f) $y = e^{-x/2}$

(g) $y = \ln(4x) - 2$

(h) $y = \frac{1}{4} \cdot 3^{-x/2}$

(i) $y = e^{\sqrt{x}}$

L 11. Bestimme die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen:

(a) $2^{\lg x} = 8$

(b) $5^{\lg x} = 625$

(c) $4^{\lg x} = \frac{1}{4096}$

(d) $x^{\lg(x)-3} = 0,01$

(e) $6 \cdot (\lg x)^2 - 1 = \lg x$

(f) $x^{\lg x} = \frac{x^4}{1000}$

(g) $(\lg x)^2 + 2 \cdot \lg x = 3$

(h) $2(\lg x)^2 + 1 = 3 \cdot \lg x$

(i) $x^{\ln x} = \frac{1}{e}$

(j) $x^{\ln(x)-3} = \frac{1}{e^2}$

(k) $x^{\ln(x)-4} = \frac{1}{e^3}$

(l) $\ln(\ln x) = 1$

(m) $\ln(\ln x) = -1$

(n) $e^4 \cdot x^{\ln x} = x^4$

(o) $\ln(2 \cdot \ln x) = 0,5$

(p) $e^2 \cdot x^x = e^{x+2}$

(q) $(-1 + \ln x)^2 = \ln \frac{e}{x}$

(r) $\ln\left(\frac{2}{3} \cdot \ln x\right) = 0$

(s) $e^2 \cdot x^x = e^{2(x+1)}$

(t) $x^{\lg x - 2} = \frac{x^5}{1000000}$

L 12. Eine exponentiell wachsende Bakterienart verdoppelt sich innerhalb von 3 Stunden. Zur Zeit sind 100 Bakterien vorhanden.

(a) Gib das Wachstumsgesetz in der Form **(i)**$N(t) = N_0 \cdot 2^{\frac{t}{V}}$, **(ii)**$N(t) = N_0 \cdot e^{k \cdot t}$, **(iii)**$N(t) = N_0 \cdot a^t$, **(iv)**$N(t) = N_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$ an!

(b) Wieviele Bakterien sind nach einem Tag vorhanden?

(c) Wie lange dauert es, bis 1 Million Bakterien vorhanden sind?

(d) Um wieviel Prozent wächst die Bakterienkultur pro Stunde?

L 13. Von m_0 Gramm Radium sind infolge radioaktiven Zerfalls t Jahre später nur mehr $m(t) = m_0 \cdot e^{-0{,}000428 \cdot t}$ Gramm vorhanden.

(a) Wieviel Gramm Radium sind von $m_0 = 0{,}003$ g nach
(i) 100 Jahren, **(ii)** 1000 Jahren **(iii)** 10 000 Jahren noch vorhanden?

(b) Berechne die Halbwertszeit des Zerfallsprozesses!

(c) Wie groß war eine Radiummenge von derzeit $1{,}5 \cdot 10^{-6}$ kg vor
(i) 1000 Jahren, **(ii)** 2000 Jahren, **(iii)** 5000 Jahren, **(iv)** 12000 Jahren?

(d) Wieviel Prozent der Substanz zerfallen pro Jahr?

L 14. Bei Atombombenversuchen wird radioaktives Kobalt freigesetzt, das krebserregend ist. Seine Halbwertszeit beträgt 5,3 Jahre.

(a) Berechne, nach wieviel Jahren nur mehr **(i)** 10%, **(ii)** 1%, **(iii)** 1‰ vorhanden ist!

(b) Wieviel Prozent des Kobalts zerfallen pro Jahr?

L 15. Der Luftdruck nimmt mit zunehmender Höhe exponentiell ab. Er beträgt bei 5500 m Seehöhe nur noch 50% des Wertes auf Meeresniveau (= ca. 1000 mbar)

(a) Gib eine Formel an, die es ermöglicht, den Luftdruck in Abhängigkeit von der Höhe zu bestimmen. Berechne damit den Luftdruck auf dem Großglockner (3797 m) und auf dem Mount Everest (8848 m)!
Zeichne den Graphen für $h \in [0;\ 10\,000]$!

(b) Umgekehrt kann man aus dem Luftdruck die Höhe berechnen (barometrischer Höhenmesser). Gib auch dafür eine Formel an! In welchem Zusammenhang stehen diese und die vorige Formel?

(c) Die „kritische Schwelle“ (= jene Höhe, wo der menschliche Körper nicht mehr mit genügend Sauerstoff versorgt werden kann) liegt dort, wo der Luftdruck nur noch 40% des Wertes auf Meeresniveau beträgt. Berechne diese Höhe!

L 16. Aspirin ist ein häufig verwendetes schmerzstillendes Medikament. Der darin enthaltene Wirkstoff Acetylsalicylsäure wird mit einer Halbwertszeit von 3 Stunden exponentiell ausgeschieden. Ein Patient nimmt um 8 Uhr, um 12 Uhr und um 18 Uhr je eine Tablette mit 500 mg. Wieviel mg wirksame Substanz befindet sich um **(a)** 14 Uhr und um **(b)** 24 Uhr im Körper?

L 17. Die Wirksubstanz eines bestimmten Medikaments wird vom menschlichen Organismus mit einer Halbwertszeit von 5,5 Stunden abgebaut. Eine Person nimmt um 8 und um 10 Uhr eine Tablette, die jeweils 120 mg dieser Wirksubstanz enthält.

(a) Wieviel mg Wirksubstanz befinden sich um 13 Uhr im Körper dieser Person?

(b) Wann muss die Person spätestens die nächste Tablette einnehmen, damit die Menge der Wirksubstanz im Körper nicht unter 100 mg fällt?

L 18. Um das Alter von Tierskeletten zu bestimmen, verwendet man die sogenannte ^{14}C-Datierung (oder auch Radiokarbon-Methode). ^{14}C ist die Bezeichnung für ein readioaktives Kohlenstoffisotop, das sich in äußerst geringer Menge im Kohlendioxyd der Luft befindet. Durch die Photosynthese wird ^{14}C in die Pflanzen aufgenommen und gelangt über die Nahrungskette in den Tierkörper. Die Halbwertszeit τ von ^{14}C liegt zwischen $\tau_1 = 5690$ Jahren und $\tau_2 = 5770$ Jahren. Wie alt ist ein Tierskelett, wenn sein gemessener ^{14}C-Anteil nur noch 7,9 Promille beträgt? Führe die Berechnung für τ_1 und τ_2 durch!

L 19. Wenn das Licht eines Autoscheinwerfers eine Nebelschicht durchdringt, nimmt seine Helligkeit mit zunehmender Entfernung vom Scheinwerfer exponentiell ab. Es sei I_0 die Helligkeit des Lichts beim Austritt aus dem Scheinwerfer und $I(d)$ die Helligkeit des Lichts in der Entfernung d vom Scheinwerfer (d in Metern). Nach 2 Metern hat das Licht nur mehr 64% der Ausgangsintensität.

(a) Wieviel Prozent an Helligkeit verliert das Licht auf einer Länge von 1 m ?

(b) In welcher Entfernung vom Scheinwerfer beträgt die Intensität des Lichts nur mehr 10% der Ausgangsintensität?

(c) Gib das Gesetz, welches die Lichtintensität in Abhängigkeit von der Scheinwerferentfernung beschreibt in der Form $I(d) = I_0 \cdot e^{\lambda \cdot d}$ an!

L 20. Statt Strom in Metalldrähten wird zur Informationsübertragung immer häufiger Licht in Glasfaserkabeln verwendet. Beim Durchgang durch einen Lichtleiter wird die Intensität des Lichts exponentiell geschwächt. Eine extrem klare Glasfaser absorbiert auf 100 m Länge etwa 0,2% des eingestrahlten Lichts.

(a) Stelle die Abnahme der Lichtintensität $I(d)$ bei einem Durchgang durch eine d Meter lange Glasfaser in der Form $I(d) = I_0 \cdot e^{\lambda \cdot d}$ dar!

(b) Wie viel Prozent des eingestrahlten Lichts verlassen eine 12 km lange Glasfaser?

(c) Wie weit dürfen Lichtverstärker höchstens voneinander entfernt sein, wenn die Intensität des zu verstärkenden Lichts noch mindestens 20% der Intensität des eingestrahlten Lichts aufweisen muss?

L 21. Erfahrungsgemäß wächst der Holzbestand eines bestimmten Waldstücks um 3,8% pro Jahr.

(a) Nach wie vielen Jahren wird er sich verdoppelt, nach wievielen Jahren verdreifacht haben?

(b) Heute beträgt der Holzbestand 7200 m^3. Man hat vor, in 3 Jahren 2000 m^3 zu schlägern. Wann wird dieser Wald den heutigen Holzbestand wieder erreichen?

(c) Ein anderer Nutzungsplan sieht vor, nach einem Jahr 1000 m^3, nach einem weiteren Jahr noch einmal 1000 m^3 und nach weiteren zwei Jahren 2000 m^3 zu schlägern. Wie groß wird der Holzbestand in 10 Jahren sein, wenn er heute 7200 m^3 groß ist?

L 22. Die Wirksubstanz eines bestimmten Medikaments wird vom menschlichen Organismus exponentiell abgebaut. Der Körper baut pro Stunde 16,5% der Wirksubstanz ab. Eine Person nimmt um 10 Uhr abends 2 Tabletten mit jeweils 300 mg Wirksubstanz ein. Die nächste Tablette nimmt sie Tags darauf um 8 Uhr in der Früh. 6 Stunden später nimmt sie eine weitere Tablette.

(a) Wie groß ist die Menge der Wirksubstanz dieses Medikaments im Körper um 10 Uhr am Vormittag?

(b) Wie groß ist die Menge der Wirksubstanz dieses Medikaments im Körper um 16 Uhr am Nachmittag?

(c) Zu welcher Uhrzeit muss die Person die nächste Tablette einnehmen, wenn die Menge der Wirksubstanz im Körper nicht unter 100 mg sinken soll?