Zweidimensionale Koordinatengeometrie:

1. Gib jeweils den Vektor $\overrightarrow{AB}$ und seine Länge an!

   (a) $A(3|2),\ B(6|5)$
   (b) $A(-1|2),\ B(3|-4)$
   (c) $A(-1|-3),\ B(-1|0)$
   (d) $A(0|0),\ B(4|3)$
   (e) $A(0|-2),\ B(-2|0)$
   (f) $A(-1|-1),\ B(-1|-1)$

2. Ermittle **(i)** die Koordinaten des Endpunktes E der Wanderung, **(ii)** die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{AE}$ für die Rückkehr von E zum Ausgangspunkt A der Wanderung, **(iii)** die Gesamtlänge der Wanderung (von A nach A)!

   (a) $A(0|0),\ \overrightarrow{AB}=\binom{-4}{2}, \overrightarrow{BC}=\binom{2}{4},\ \overrightarrow{CD}=\binom{5}{1},\ \overrightarrow{DE}=\binom{0}{-4}$
   (b) $A(1|-2),\ \overrightarrow{AB}=\binom{2}{3}, \overrightarrow{BC}=\binom{-4}{1},\ \overrightarrow{CD}=\binom{2}{-4},\ \overrightarrow{DE}=\binom{-3}{0}$
   (c) $A(-2|1),\ \overrightarrow{AB}=\binom{3}{-2}, \overrightarrow{BC}=\binom{-4}{-2},\ \overrightarrow{CD}=\binom{4}{6},\ \overrightarrow{DE}=\binom{-4}{-2}$
   (d) $A(-2|1),\ \overrightarrow{AB}=\binom{1}{-3}, \overrightarrow{BC}=\binom{2}{1},\ \overrightarrow{CD}=\binom{1}{2},\ \overrightarrow{DE}=\binom{-1}{2}$
   (e) $A(-3|1),\ \overrightarrow{AB}=\binom{0}{-3}, \overrightarrow{BC}=\binom{3}{2},\ \overrightarrow{CD}=\binom{2}{-1},\ \overrightarrow{DE}=\binom{1}{3}$

3. Berechne den Umfang der gegebenen Vielecke!

   (a) $A(3|3),\ B(-2|2),\ C(-3|-3),\ D(3|-1)$
   (b) $A(4|0),\ B(0|3),\ C(-5|0)$
   (c) $A(5|2),\ B(1|-2),\ C(-5|-3),\ D(-1|-1)$
   (d) $A(4|0),\ B(2|4),\ C(-1|6),\ D(-3|-2),\ E(0|-4)$
   (e) $A(4|1),\ B(2|6),\ C(-4|1),\ D(0|-4)$
   (f) $A(2|3),\ B(0|4),\ C(-2|3)$
   (g) $A(-3|-1),\ B(-2|2),\ C(-1|-3),\ D(1|-2)$
   (h) $A(3|1),\ B(0|4),\ C(-2|4),\ D(-4|2), E(0|-3)$

4. Die folgenden Vielecke sollen durch den angegebenen Vektor $\overrightarrow{s}$ einer Schiebung unterworfen werden. Gib die neuen Koordinaten des jeweiligen Vielecks an!

   (a) $A(4|0),\ B(2|2),\ C(-2|2),\ D(-4|0),\ \overrightarrow{s}=\binom{2}{-3}$
   (b) $A(1|2),\ B(3|6),\ C(7|8),\ D(5|4),\ \overrightarrow{s}=\binom{1}{-1}$
   (c) $A(0|0),\ B(3|4),\ C(-3|4),\ \overrightarrow{s}=\binom{0}{-2}$
   (d) $A(0|0),\ B(4|-3),\ C(4|3),\ \overrightarrow{s}=\binom{2}{0}$
   (e) $A(1|2),\ B(3|6),\ C(7|8),\ D(5|4),\ \overrightarrow{s}=\binom{-6}{-6}$

5. Ermittle die Koordinaten des fehlenden Eckpunktes und den Umfang des Parallelogramms!

   (a) $A(1|-3),\ B(5|1),\ C(1|3)$
   (b) $C(-1|-5),\ D(7|1),\ A(3|4)$
   (c) $A(-4|1),\ B(5|-2),\ C(8|2)$
   (d) $A(-1|-4),\ C(1|4),\ D(3|-2)$
   (e) $B(2|-3),\ C(-10|2),\ D(-7|6)$
   (f) $A(4|4),\ B(-8|-1),\ D(7|0)$
   (g) $C(-3|-2),\ D(1|-4),\ B(1|2)$
   (h) $A(-2|-1),\ B(2|3),\ D(0|-2)$

6. Überprüfe, ob die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ zueinander parallel sind!

(a) $A(4|2),\ B(-2|1),\ C(0|5),\ D(2|-2)$
(b) $A(1|2),\ B(3|4),\ C(0|0),\ D(1|2)$
(c) $A(0|1),\ B(1|0),\ C(0|0),\ D(1|2)$
(d) $A(-1|2),\ B(3|0),\ C(1|5),\ D(-5|2)$
(e) $A(1|-2),\ B(-3|4),\ C(3|2),\ D(-1|8)$
(f) $A(3|4),\ B(1|2),\ C(2|3),\ D(3|5)$
(g) $A(1|2),\ B(2|1),\ C(5|7),\ D(7|5)$
(h) $A(a|b),\ B(b|a),\ C(c|d),\ D(d|c)$

7. Ergänze die fehlende Koordinate so, dass die beiden Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ zueinander parallel sind!

(a) $\overrightarrow{a}=\binom{1}{3},\ \overrightarrow{b}=\binom{3}{.}$
(b) $\overrightarrow{a}=\binom{0}{2},\ \overrightarrow{b}=\binom{0}{.}$
(c) $\overrightarrow{a}=\binom{2}{4},\ \overrightarrow{b}=\binom{.}{3}$
(d) $\overrightarrow{a}=\binom{5}{4},\ \overrightarrow{b}=\binom{.}{6}$
(e) $\overrightarrow{a}=\binom{3}{1},\ \overrightarrow{b}=\binom{1}{.}$
(f) $\overrightarrow{a}=\binom{0}{2},\ \overrightarrow{b}=\binom{.}{0}$

8. Gib jeweils den Einheitsvektor $\overrightarrow{a_0}$ zum gegebenen Vektor $\overrightarrow{a}$ an!

(a) $\overrightarrow{a}=\binom{6{,}3}{1{,}6}$
(b) $\overrightarrow{a}=\binom{-7}{2{,}4}$
(c) $\overrightarrow{a}=\binom{9{,}9}{2}$
(d) $\overrightarrow{a}=\binom{1{,}2}{-3{,}5}$
(e) $\overrightarrow{a}=\binom{-1}{1}$
(f) $\overrightarrow{a}=\binom{3a}{-4a}$

9. Gib zum Vektor $\overrightarrow{a}$ den **(i)** nach links, **(ii)** nach rechts gekippten Normalvektor an!

(a) $\overrightarrow{a}=\binom{2}{3}$
(b) $\overrightarrow{a}=\binom{-2}{3}$
(c) $\overrightarrow{a}=\binom{1}{-4}$
(d) $\overrightarrow{a}=\binom{1}{4}$
(e) $\overrightarrow{a}=\binom{0}{2}$
(f) $\overrightarrow{a}=\binom{2}{0}$
(g) $\overrightarrow{a}=\binom{1}{-2}$
(h) $\overrightarrow{a}=\binom{-1}{2}$

10. Ergänze die fehlende Koordinate des Vektors $\overrightarrow{b}$ so, dass der Vektor $\overrightarrow{b}$ auf $\overrightarrow{a}$ normal steht!

(a) $\overrightarrow{a}=\binom{2}{3},\ \overrightarrow{b}=\binom{-6}{.}$
(b) $\overrightarrow{a}=\binom{4}{-3},\ \overrightarrow{b}=\binom{.}{8}$
(c) $\overrightarrow{a}=\binom{-1}{3},\ \overrightarrow{b}=\binom{-9}{.}$
(d) $\overrightarrow{a}=\binom{2}{0},\ \overrightarrow{b}=\binom{.}{3}$
(e) $\overrightarrow{a}=\binom{3}{2},\ \overrightarrow{b}=\binom{-6}{.}$
(f) $\overrightarrow{a}=\binom{-3}{2},\ \overrightarrow{b}=\binom{.}{-6}$

11. Von einem im positiven Umlaufsinn beschrifteten Quadrat kennt man die Endpunkte einer Seite. Ermittle die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte! (Fertige eine Skizze an!)

(a) $A(-1|-1),\ B(3|-2)$
(b) $A(-4|2),\ B(0|-1)$
(c) $A(-3|-3),\ B(3|3)$
(d) $A(-2|0),\ B(3|0)$
(e) $A(3|0),\ B(0|2)$
(f) $A(0|0),\ B(3|-2)$

12. Von einem im positiven Umlaufsinn beschrifteten Quadrat kennt man einen Eckpunkt und den Mittelpunkt. Ermittle die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte! (Fertige eine Skizze an!)

(a) $A(-2|0),\ M(2|2)$
(b) $B(2|-1),\ M(2|3)$
(c) $C(-3|-3),\ M(0|0)$
(d) $D(-3|0),\ M(0|0)$
(e) $A(3|0),\ M(0|2)$
(f) $A(4|7),\ M(4|4)$

13. Berechne die Winkel in den gegebenen Dreiecken:

(a) $A(1|2),\ B(0|5),\ C(-2|-6)$
(b) $A(0|0),\ B(-1|2),\ C(-5|0)$
(c) $A(-1|8),\ B(-3|-1),\ C(2|0)$
(d) $A(2|-1),\ B(2|2),\ C(-3|-1)$

14. Überprüfe, um welches Viereck es sich handelt! (Quadrat, Rechteck, Parallelogramm, Raute, Trapez, Deltoid, allgemeines Viereck)

(a) $A(-2|-2),\ B(2|-3),\ C(3|1),\ D(-1|2)$
(b) $A(3|-1),\ B(4|2),\ C(0|5),\ D(0|0)$
(c) $A(-3|-1),\ B(1|-2),\ C(4|2),\ D(0|3)$
(d) $A(-2|3),\ B(-2|-2),\ C(2|-5),\ D(2|0)$
(e) $A(4|3),\ B(-3|4),\ C(-4|-3),\ D(3|-4)$
(f) $A(0|-2),\ B(4|-3),\ C(5|1),\ D(1|2)$
(g) $A(3|3),\ B(1|4),\ C(-3|0),\ D(1|-2)$
(h) $A(2|-1),\ B(3|2),\ C(-1|5),\ D(-1|0)$
(i) $A(-2|-1,\ B(-1|2),\ C(5|0),\ D(4|-3)$
(j) $A(-3|0),\ B(1|-1),\ C(4|3),\ D(0|4)$
(k) $A(-3|-2),\ B(-1|-3),\ C(2|1),\ D(1|3)$
(l) $A(-2|2),\ B(-2|-3),\ C(2|-6),\ D(2|0)$

15. Trage die angegebene Strecke ℓ von A aus in Richtung des Vektors $\overrightarrow{a}$ ab!

(a) $A(3|2),\ \overrightarrow{a}=\binom{3}{4},\ \ell=10$
(b) $A(1|2),\ \overrightarrow{a}=\binom{-1}{1},\ \ell=1$
(c) $A(-2|-2),\ \overrightarrow{a}=\binom{-11{,}7}{-4{,}4},\ \ell=5$
(d) $A(3|-2),\ \overrightarrow{a}=\binom{3a}{-4a},\ \ell=10$
(e) $A(-1|3),\ \overrightarrow{a}=\binom{6{,}3}{-1{,}6},\ \ell=13$
(f) $A(1|-4),\ \overrightarrow{a}=\binom{9{,}9}{-2},\ \ell=10,1$

16. Berechne die Koordinaten des Halbierungspunktes der Strecke AB!

(a) $A(1|2),\ B(5|6)$
(b) $A(-3|5),\ B(3|3)$
(c) $A(0|0),\ B(-4|4)$

17. Von einem in positivem Umlaufsinn beschrifteten Rechteck kennt man die Endpunkte einer Seite und die Länge der anderen Seite. Ermittle die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte und des Mittelpunktes des Rechtecks!

(a) $A(-1|3),\ B(-1|5),\ b=1$
(b) $B(2|3),\ C(5|-1),\ a=10$
(c) $C(-3|2),\ D(2|-10),\ b=13$
(d) $D(0|1),\ A(1|1),\ a=3$
(e) $A(-2|1),\ B(4|-7),\ b=5$
(f) $B(2|0),\ C(4,4|-1),\ a=5,2$
(g) $C(-1|4),\ D(5,3|2,4),\ b=13$
(h) $D(5|1),\ A(-6,7|-3,4),\ a=10$

18. Von einem in negativem Umflaufsinn beschriftetetn Quadrat kennt man die Koordinaten zweier diagonal gegenüberliegender Eckpunkte. Gib die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte an!

(a) $A(-3|-7),\ C(5|3)$
(b) $A(5|-2),\ C(-3|4)$
(c) $A(-1|4),\ C(7|-2)$
(d) $B(4|-6),\ D(-2|2)$
(e) $B(-1|-1),\ D(1|1)$
(f) $B(-4|0),\ D(4|-2)$

19. Berechne bei den folgenden Rauten mit Diagonalenschnittpunkt M die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte!

(a) $A(-2|-1),\ M(2|1),\ f=\sqrt{20}$

(b) $A(-1|3),\ C(7|-1),\ f=\sqrt{20}$

20. Gib die Koordinaten jenes Punktes an, der die Strecke AB im angegebenen Verhältnis δ teilt!

(a) $A(-5|9),\ B(9|2),\ \delta=2:5$

(b) $A(-3|5),\ B(9|11),\ \delta=2:1$

(c) $A(-18|3),\ B(6|-9),\ \delta=7:5$

(d) $A(3|-4),\ B(8|6),\ \delta=2:3$

(e) $A(-5|9),\ B(9|2),\ \delta=3:4$

(f) $A(-3|5),\ B(9|11),\ \delta=3:1$

21. Gib eine Gleichung jener Geraden an, auf der die beiden Punkte P und Q liegen. **(i)** in Parameterform, **(ii)** in Normalvektorform, **(iii)** in allgemeiner Form **(iv)** in Hauptform (falls möglich)

(a) $P(1|2),\ Q(5|7)$

(b) $P(0|-4),\ Q(4|1)$

(c) $P(3|2),\ Q(3|1)$

(d) $P(-4|5),\ Q(1|5)$

(e) $P(0|0),\ Q(-3|-4)$

(f) $P(9|-1),\ Q(3|-1)$

22. Untersuche, ob der gegebene Punkt auf der Geraden g liegt!

$$g:\ \overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$$

(a) $P(1|0)$

(b) $Q(-2|1)$

(c) $R(-5|9)$

(d) $S(2|-1{,}5)$

(e) $T(-3|-6)$

(f) $U(0|-1)$

(g) $V(-6|4)$

(h) $W(-3|6)$

23. Überprüfe, ob die drei Punkte P, Q und R auf einer Geraden liegen!

(a) $P(3|1),\ Q(2|-1),\ R(-1|-4)$

(b) $P(-1|1),\ Q(5|-3),\ R(-7|5)$

(c) $P(-4|0),\ Q(4|0),\ R(1|2)$

(d) $P(-5|7),\ Q(-3|1),\ R(0|-8)$

(e) $P(0|4),\ Q(4|0),\ R(2|1)$

(f) $P(3|1),\ Q(1|2),\ R(-5|5)$

24. Untersuche, wie die beiden Gerade g und h zueinander liegen. Berechne gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes S und den Schnittwinkel φ der beden Geraden!

(a) $g:\ x+y=6,\qquad h:\ \overrightarrow{X}=\binom{1}{0}+s\cdot\binom{1}{-1}$

(b) $g:\ \overrightarrow{X}=\binom{3}{5}+t\cdot\binom{1}{2},\qquad h:\ y=\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$

(c) $g:\overrightarrow{X}=\binom{-2}{-2}+r\cdot\binom{1}{1},\qquad h:\ \overrightarrow{X}=\binom{-2}{1}+s\cdot\binom{-1}{1}$

(d) $g:\ -3x+2y=-5,\qquad h:\ x+4y-17=0$

(e) $g:\ \overrightarrow{X}=\binom{3}{3}+d\cdot\binom{3}{-3},\qquad h:\ y=-x+2$

(f) $g:y=-2x+9,\qquad h:\ 4x+2y-18=0$

(g) $g:\ y=2x+4,\qquad h:\ \overrightarrow{X}=\binom{0}{4}+s\cdot\binom{-4}{-8}$

(h) $g:\ \overrightarrow{X}=\binom{1}{3}+t\cdot\binom{-2}{3}$, $\qquad h:\ \overrightarrow{X}=\binom{2}{4}+k\cdot\binom{3}{2}$

25. Ermittle die Hauptform jener Geraden,
    (i) die parallel zu g und durch den Punkt P verläuft.
    (ii) die auf g normal steht und durch den Punkt P geht.
    (iii) Ermittle den Normalabstand des Punktes P von der Geraden g mit der Hesseschen Normalform!

    (a) $g:\ \overrightarrow{X}=\binom{2}{-2}+t\cdot\binom{-1}{2},\ P(3|2)$
    (b) $g:\ x+6y=-17,\ P(0|0)$
    (c) $g:\ y=2x-9,\ P(1|-1)$
    (d) $g:\ \binom{2}{-3}\cdot\binom{x}{y}=-3,\ P(2|-4)$
    (e) $g:\ \overrightarrow{X}=\binom{1}{-1}+t\cdot\binom{3}{-1},\ P(5|1)$
    (f) $g:\ \overrightarrow{X}\cdot\binom{1}{-2}=1,\ P(3|0)$

26. Ermittle die Streckensymmetrale auf die Punkte A und B!

    (a) $A(1|4), B(3|-2)$
    (b) $A(2|4), B(2|7)$
    (c) $A(-1|0), B(0|0)$
    (d) $A(-3|-2), B(5|-2)$
    (e) $A(0|0), B(3|2)$
    (f) $A(1|1), B(-1|-1)$

27. Ermittle die Koordinaten des Inkreismittelpunkts des Dreiecks ABC!

    (a) $A(1|1), B(25|1), C(13|10)$
    (b) $A(-1|-1), B(23|-1), C(11|47)$
    (c) $A(-11|-4), B(14|-4), C(-4|-16)$
    (d) $A(0|-2), B(12|7), C(0|12)$
    (e) $A(1|1), B(9|9), C(-5|43)$
    (f) $A(0|0), B(11|11), C(4|28)$

28. Ermittle
    (i) den Schwerpunkt des Dreiecks ABC als Schnittpunkt der Schwerlinien
    (ii) den Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC!
    (iii) den Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC!
    (iV) die Eulersche Gerade des Dreiecks ABC!

    (a) $A(-9|6), B(18|15), C(15|-16)$
    (b) $A(1|2), B(13|14), C(-11|8)$
    (c) $A(-2|-5), B(10|4), C(-2|9)$
    (d) $A(5|5), B(5|-9), C(-7|-4)$
    (e) $A(4|1), B(5|0), C(5|-2)$
    (f) $A(4|-9), B(6|-1), C(6|-3)$

29. Ermittle die Höhen der Dreiecke ABC aus Aufgabe 28 mit der Hesseschen Normalform!

30. Ermittle den Flächeninhalt der Dreiecke ABC aus Aufgabe 28!

Dreidimensionale Koordinatengeometrie:

31. Untersuche, ob die drei Punkte A, B und C auf einer Geraden liegen!

(a) $A(4|5|-1),\ B(0|-2|6),\ C(-4|-9|12)$

(b) $A(0|5|1),\ B(0|0|-3),\ C(0|10|5)$

(c) $A(1|2|-6),\ B(2|2|1),\ C(0|2|-13)$

(d) $A(7|5|2),\ B(10|9|7),\ C(16|17|17)$

32. Untersuche, welche Lage die beiden Geraden g und h zueinander haben und ermittle gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunkts und den Schnittwinkel der beiden Geraden!

(a) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$ h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

(b) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -11 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(c) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 18 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix}$

(d) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix}$ h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

(e) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$ h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 19 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \\ -5 \end{pmatrix}$

(f) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$

(g) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$

(h) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$ h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix}$

33. **(i)** Ermittle, ob das Dreieck ABC rechtwinkelig ist! **(ii)** Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC auf zwei Arten! **(iii)** Berechne die Höhen des Dreiecks ABC **(iv)** Ermittle die Koordinaten des Schwerpunkts!

(a) $A(-2|-1|1),\ B(-5|2|4),\ C(-1|1|3)$

(b) $A(2|1|0),\ B(2|-3|-4),\ C(1|-1|-2)$

(c) $A(4|2|1),\ B(13|6|5),\ C(7|8|2)$

(d) $A(1|2|3),\ B(4|5|3),\ C(3|3|5)$

34. Gib die Gleichung jener Ebene an, auf der das Dreieck $\triangle ABC$ liegt! Gib die Ebenengleichung **(i)** in Parameterdarstellung **(ii)** in Normalvektorform **(iii)** als allgemeine Ebenengleichung an!

(a) $A(2|1|4),\ B(1|0|0),\ C(5|2|1)$

(b) $a(0|0|0),\ B(2|3|4),\ C(-2|4|1)$

(c) $A(0|2|3),\ B(4|4|3),\ C(6|2|5)$

(d) $A(3|2|-1),\ B(0|0|0),\ C(4|2|5)$

35. Gib die allgemeine Gleichung und die Normalvektorform der Ebene

$$\varepsilon:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

an und überprüfe, ob die folgenden Punkte auf der Ebene ε liegen:

(a) $P(3|-1|3)$ (b) $P(2|1|4)$ (c) $P(4|0|3)$ (d) $P(0|0|0)$

36. Der Punkt P liegt auf der Ebene ε. Ergänze die fehlende Koordinate!

$$\varepsilon:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) $P(5|18|z_p)$ (b) $P(5|14|z_p)$ (c) $P(x_p|10|15)$ (d) $P(x_p|10|6)$

37. **(i)** Gib eine Gleichung jener Ebene an, auf der die Gerade g und der Punkt P liegen!
(ii) Berechne den Abstand des Punktes P von der Geraden g!

(a) $g:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad P(0|9|5)$

(b) $g:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P(3|0|8)$

(c) $g:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P(0|0|7)$

38. Gib die Gleichung jener Normalebene zur Geraden h an, welche den Punkt Q enthält!

(a) $h:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q(4|0|7)$

(b) $h:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad Q(2|8|0)$

(c) $h:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q(1|2|3)$

39. Gib eine Gleichung jener Ebene an, auf der die beiden schneidenden Geraden g und h liegen!

(a) $g:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad h:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $g:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad h:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

40. Gib eine Gleichung jener Ebene an, die durch den Punkt P geht und zu den Geraden g und h parallel ist!

(a) $P(1|2|3)$, $\quad g:\ \overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\qquad h:\ \overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

(b) $P(2|1|5)$, $\quad g:\ \overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\qquad h:\ \overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$

41. Ermittle Gleichungen jener Ebenen, die zur Ebene ε parallel sind mit Abstand d!

(a) $\varepsilon:\ 4x-8y+z=2$, $\quad d=18$

(b) $\varepsilon:\ 6x-3y+2z=-4$, $\quad d=7$

(c) $\varepsilon:\ -x+2y+2z=8$, $\quad d=10$

(d) $\varepsilon:\ x+5y=8$, $\quad d=3$

42. Gib eine Gleichung jener Geraden an, die durch den Punkt P geht und auf die Ebene ε normal steht!

(a) $P(3|4|-1)$, $\quad \varepsilon:\ 3x-y+z=5$

(b) $P(5|2|-3)$, $\quad \varepsilon:\ x-3z=7$

(c) $P(3|0|0)$, $\quad \varepsilon:\ x=6$

(d) $P(0|0|0)$, $\quad \varepsilon:\ 2x-y+\frac{z}{2}=0$

(e) $P(2|8|0)$, $\quad \varepsilon:\ 4x+y-z=4$

(f) $P(4|8|3)$, $\quad \varepsilon:\ y-5z=8$

43. Gib eine Ebenengleichung der Streckensymmetralebene σ der Strecke AB an!

(a) $A(2|4|-3)$, $B(8|6|9)$

(b) $A(4|0|3)$, $B(0|4|3)$

(c) $A(1|-2|0)$, $B(0|1|-1)$

(d) $A(5|0|0)$, $B(5|4|2)$

(e) $A(-2|-3|5)$, $B(8|-1|1)$

(f) $A(0|3|-1)$, $B(0|-1|3)$

44. Gib eine Parameterdarstellung jener Geraden an, welche durch den Punkt P geht und zu der von den Geraden g und h aufgespannten Ebene normal steht!

(a) $g:\ \overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\7\end{pmatrix}$, $\quad h:\ \overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\quad P(4|9|9)$

(b) $g:\ \overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\quad h:\ \overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$, $\quad P(3|-2|3)$

(c) $g:\ \overrightarrow{X}=t\cdot\begin{pmatrix}12\\-4\\6\end{pmatrix}$, $\quad h:\ \overrightarrow{X}=s\cdot\begin{pmatrix}30\\15\\5\end{pmatrix}$, $\quad P(-1|0|2)$

45. Gib an, welche Lage die Gerade g zur Ebene ε hat und ermittle gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes und den Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene!

(a) $g:\ \overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}8\\4\\1\end{pmatrix}$ $\qquad \varepsilon:\ x+6y-18z=65$

(b) $g:\ \overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ $\qquad \varepsilon:\ x-y=4$

(c) $g:\ \overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}2\\0\\-5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}6\\2\\3\end{pmatrix}$ $\qquad \varepsilon:\ 3x+12y-4z=-4$

(d) $g:\ \overrightarrow{X}=t\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$ $\qquad \varepsilon:\ 13x+3y-2z=2$

(e) $g:\ \overrightarrow{X}=t\cdot\begin{pmatrix}14\\2\\-5\end{pmatrix}$ $\qquad \varepsilon:\ 6x-7y+6z=40$

(f) $g:\ \overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}2\\0\\7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$ $\qquad \varepsilon:\ y+z=9$

(g) $g:\ \overrightarrow{X}=t\cdot\begin{pmatrix}6\\6\\-7\end{pmatrix}$ $\qquad \varepsilon:\ 2x-15y-5z=43$

(h) $g:\ \overrightarrow{X}=t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ $\qquad \varepsilon:\ 3x+17y-z=0$

46. Wo schneidet die Ebene ε **(i)** die $x-$Achse, **(ii)** die $y-$Achse, **(iii)** die $z-$Achse?

    (a) $\varepsilon:\ 2x+y-z=7$ (b) $\varepsilon:\ 7x-4y+4z=8$

47. Wo schneidet die Gerade g **(i)** die $xy-$Ebene, **(ii)** die $xz-$Ebene, **(iii)** die $yz-$Ebene?

    (a) $g:\ \overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}6\\3\\-4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ (b) $g:\ \overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}3\\8\\12\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\6\end{pmatrix}$

48. **(i)** Spiegle den Punkt P an der Ebene ε!
    (ii) Spiegle die Ebene ε am Punkt P!
    (iii) Berechne den Normalabstand des Punktes P von der Ebene ε!

    (a) $P(2|3|4),\quad \varepsilon:\ x+2y=23$ (c) $P(1|-2|3),\quad \varepsilon:\ x+y+z=5$
    (b) $P(5|1|7),\quad \varepsilon:\ 4x+y=38$ (d) $P(3|0|5),\quad \varepsilon:\ x+y+z=5$

49. Gib den Normalabstand des Punktes P von der Geraden g an und spiegle den Punkt P an der Geraden g

    (a) $P(1|2|3),\ g:\ \overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ (c) $P(5|4|3),\ g:\ \overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}9\\1\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}$

    (b) $P(3|2|5),\ g:\ \overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}6\\6\\7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ (d) $P(-1|2|5),\ g:\ \overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}1\\5\\11\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}$

50. Bestimme, wie die beiden Ebenen liegen, gib gegebenenfalls die Schnittgerade der beiden Ebenen an und berechne den Winkel, unter dem die Ebenen schneiden!

    (a) $\varepsilon_1:\ 2x+3y+4z=0$
    $\varepsilon_2:\ 3x-y+5z=0$
    (b) $\varepsilon_1:\ 4x-3y+5z=8$
    $\varepsilon_2:\ 2x+3y+z=4$
    (c) $\varepsilon_1:\ 2x-y+z=5$
    $\varepsilon_2:\ -4x+2y-2z=-10$
    (d) $\varepsilon_1:\ 15x-8y+7z=10$
    $\varepsilon_2:\ 5x+6y-2z=14$
    (e) $\varepsilon_1:\ 4x+2y+5z=6$
    $\varepsilon_2:\ 8x+4y+5z=10$
    (f) $\varepsilon_1:\ 8y-3z=11$
    $\varepsilon_2:\ 7y+2z=9$
    (g) $\varepsilon_1:\ -x+2y-3z=6$
    $\varepsilon_2:\ 3x-6y+9z=-18$
    (h) $\varepsilon_1:\ 3x-y+2z=0$
    $\varepsilon_2:\ 5x+y-7z=0$
    (i) $\varepsilon_1:\ 4x-10y+2z=6$
    $\varepsilon_2:\ -6x+15y-3z=1$

51. Bestimme, wie die drei Ebenen ε_1, ε_2 und ε_3 liegen und gib gegebenenfalls die Schnittgerade der drei Ebenen oder den Schnittpunkt der drei Ebenen an!

(a) $\varepsilon_1:\ x-3y+z=7$
$\varepsilon_2:\ 2x-z=11$
$\varepsilon_3:\ 4y-3z=1$

(b) $\varepsilon_1:\ 4x-3y+2z=-10$
$\varepsilon_2:\ 2x+9y-4z=12$
$\varepsilon_3:\ -6x-15y+8z=-8$

(c) $\varepsilon_1:\ x-8y-14z=3$
$\varepsilon_2:\ 2x-6y-3z=1$
$\varepsilon_3:\ -3x+4y-8z=1$

(d) $\varepsilon_1:\ 3x-5y+2z=-30$
$\varepsilon_2:\ -9x+3y-8z=10$
$\varepsilon_3:\ 6x-y+4z=3$

(e) $\varepsilon_1:\ 6x-4y+5z=10$
$\varepsilon_2:\ 5x-3y+2z=8$
$\varepsilon_3:\ -6x+4y-5z=-12$

(f) $\varepsilon_1:\ 3x-y-z=4$
$\varepsilon_2:\ x+y-2z=5$
$\varepsilon_3:\ 9x+y-4z=23$

(g) $\varepsilon_1:\ x+y+z=2$
$\varepsilon_2:\ 3x-y+z=-1$
$\varepsilon_3:\ -5x+y-2z=4$

(h) $\varepsilon_1:\ 3x-y+4z=6$
$\varepsilon_2:\ 2x+3y+z=6$
$\varepsilon_3:\ 4x-5y+7z=8$

(i) $\varepsilon_1:\ -3x+y-z=2$
$\varepsilon_2:\ x-y+2z=1$
$\varepsilon_3:\ -7x+y+z=8$

52. Ermittle die Länge jeder Höhe des Dreiecks ABC!

(a) $A(1|1),\ B(8|25),\ C(26|1)$

(b) $A(2|3|0),\ B(14|-3|4),\ C(10|6|5)$

(c) $A(-1|1),\ B(19|16),\ C(19|-14)$

(d) $A(1|0|-4),\ B(5|12|2),\ C(9|3|1)$

53. Ermittle den Abstand der beiden parallelen Ebenen auf zwei Arten:

(a) $\varepsilon_1:\ -2x+2y-z=-1$
$\varepsilon_2:\ 4x-4y+2z=56$

(b) $\varepsilon_1:\ x-2y+2z=3$
$\varepsilon_2:\ x-2y+2z=15$

54. Ermittle den Abstand zwischen den beiden parallelen Geraden g und h!

(a) $g:\ \overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}4\\5\\7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix},\qquad h:\ \overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$

(b) $g:\ \overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\qquad h:\ \overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$

(c) $g:\ \overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}5\\5\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-8\\10\\6\end{pmatrix},\qquad h:\ \overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}2\\5\\-3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-4\\5\\3\end{pmatrix}$

(d) $g:\ \overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}2\\5\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}12\\-9\\-3\end{pmatrix},\qquad h:\ \overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}4\\-2\\5\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix}$

55. Berechne **(i)** die Höhe, **(ii)** das Volumen, **(iii)** die Oberfläche des Tetraeders $ABCD$!

(a) $A(1|2|1), B(7|10|1), C(-3|6|3), D(2|3|9)$

(b) $A(5|-2|4), B(6|4|0), C(-2|-3|1), D(0|0|9)$

Lösungen

31 (a) nein
   (b) ja
   (c) ja
   (d) ja

32 (a) schneidend, $S(2|3|5)$, $\alpha = 144{,}57^\circ$
   (b) schneidend, $S(5|3|1)$, $\alpha = 53{,}36^\circ$
   (c) plarallel
   (d) windschief
   (e) schneidend, $S(-1,6,4)$, $\alpha = 14{,}41^\circ$
   (f) $g = h$, die beiden Geraden liegen übereinander
   (g) schneidend, $(0|0|9)$, $\alpha = 137{,}17^\circ$
   (h) windschief

33 (a) rechtwinkelig (γ), $A = 6{,}36\,\text{FE}$, $h_a = 3\,\text{LE}$, $h_b = 4{,}2\,\text{LE}$, $h_c = 2{,}45\,\text{LE}$, $S\left(-2{,}\dot{6}|0{,}\dot{6}|2{,}\dot{6}\right)$
   (b) nicht rechtwinkelig, $A = 2{,}83\,\text{FE}$, $h_a = 1{,}89\,\text{LE}$, $h_b = 1{,}89\,\text{LE}$, $h_c = 1\,\text{LE}$, $S\left(1{,}\dot{6}|-1|-2\right)$
   (c) nicht rechtwinkelig, $A = 23{,}31\,\text{FE}$, $h_a = 6{,}66\,\text{LE}$, $h_b = 6{,}87\,\text{LE}$, $h_c = 4{,}39\,\text{LE}$, $S\left(8|5{,}\dot{3}|2{,}\dot{6}\right)$
   (d) rechtwinkelig (γ), $A = 4{,}5\,\text{FE}$, $h_a = 3\,\text{LE}$, $h_b = 3\,\text{LE}$, $h_c = 2{,}12\,\text{LE}$, $S\left(2{,}\dot{6}|3{,}\dot{3}|3{,}\dot{6}\right)$

34 (a) **(i)** $$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(ii) $$\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -15 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

(iii) $7x - 15y + 2z = 7$

(b) **(i)** $$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ii) $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ -10 \\ 14 \end{pmatrix} = 0$$

(iii) $13x + 10y - 14z = 0$

(c) **(i)** $$\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(ii) $$\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -12 \end{pmatrix} = 0$$

(iii) $x - 2y - 3z = -13$

(d) **(i)** $\overrightarrow{X} = s \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 19 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

(iii) $-12x + 19y + 2z = 0$

35 allgemeine Form: $\varepsilon :\ 4x - y - 4z = -34$

Normalvektorform: $\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$

(a) $P \notin \varepsilon$

(b) $P \notin \varepsilon$

(c) $P \notin \varepsilon$

(d) $P \notin \varepsilon$

36 (a) $z_p = 9$

(b) $z_p = 10$

(c) $x_p = 9$

(d) $x_p = 0$