1 Einige Aufgaben zum Rechnen mit Mengen:

A 1.1. Gib die folgenden Mengen im aufzählenden Verfahren an:

(a) $A = \{x \in \mathbb{N} |\ 3 \leq x \leq 8\}$

(b) $B = \{y \in \mathbb{Z} |\ -2 < y \leq 4\}$

(c) $C = \{z \in \mathbb{N} |\ z \text{ ist Teiler von } 24\}$

(d) $K = \{k \in \mathbb{N} |\ k \geq -2\}$

(e) $L = \{k \in \mathbb{Z} |\ k \geq -2\}$

(f) $D = \{x \in \mathbb{P} |\ x \leq 20\}$

(g) $E = \{y \in \mathbb{N} |\ y \text{ ist Vielfaches von } 5\}$

(h) $F = \{z \in \mathbb{Z} |\ |z| < 5\}$

A 1.2. Gib die folgenden Mengen im beschreibenden Verfahren an!

(a) $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

(b) $B = \{5, 6, 7, 8, \ldots\}$

(c) $C = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$

(d) $D = \{5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

(e) $E = \{4, 5\}$

(f) $F = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

A 1.3. Berechne $A \cup B$, $B \cap L$, $K \setminus D$, $D \setminus C$, $D \cup E$ und $E \cap F$

(a) mit den Mengen von Aufgabe A 1.1!

(b) mit den Mengen von Aufgabe A 1.2!

A 1.4. Skizziere die Zahlenmengen von (a) bis (d) auf der Zahlengeraden und gib die Mengen mit Intervallschreibweise an!

(a) $I_1 = \{x \in \mathbb{R} |\ -1 < x < 4\}$

(b) $I_2 = \{x \in \mathbb{R} |\ 0 \leq x < 1\}$

(c) $I_3 = \{x \in \mathbb{R} |\ -2 \leq x \leq -1{,}5\}$

(d) $I_4 = \{x \in \mathbb{R} |\ \pi < x \leq 2\pi\}$

A 1.5. Gib die folgenden Intervalle im beschreibenden Verfahren an!
Skizziere die Zahlenmengen auf der Zahlengeraden!
Erkläre welcher Unterschied besteht, wenn die angegebenen Klammern durch geschwungene Klammern ersetzt werden. (Z.B. Was ist der Unterschied zwischen den Mengen $A = [5{,}2;\ 6)$ und $B = \{5{,}2;\ 6\}$)

(a) $J_1 = [2;\ 3]$

(b) $J_2 =]-1;\ -0{,}5[$

(c) $J_3 = (0;\ 3{,}4]$

(d) $J_4 = [-1{,}3;\ 1)$

A 1.6. Gegeben sind die folgenden Zahlenmengen:

(a) Alle reellen Zahlen außer die Zahl -3 und die Zahl 2,5

(b) Alle reellen Zahlen größer oder gleich -1 aber ohne die Zahl 5.

(c) Alle reellen Zahlen kleiner als 3,5 aber ohne die Zahl -2

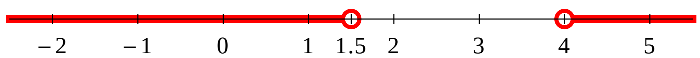
i. Skizziere jede Menge auf der Zahlengeraden!
ii. Stelle jede Menge als Vereinigunggsmenge dar!
iii. Stelle jede Menge als als Differenzmenge dar!

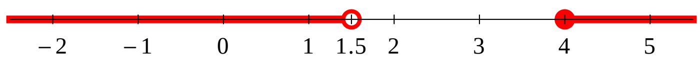
A 1.7. Die auf der Zahlengeraden markierten roten Bereiche repräsentieren Teilmengen von reellen Zahlen. Stelle jede dieser Mengen

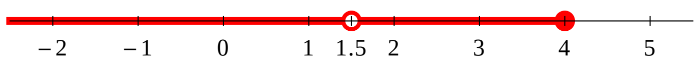
i. als Vereinigungsmenge

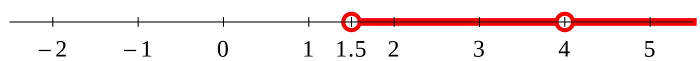
ii. als Differenzmenge dar!

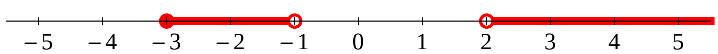
(a) 

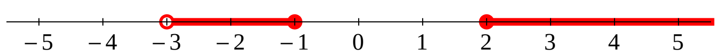
(b) 

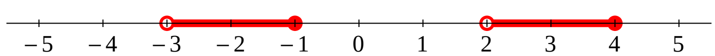
(c) 

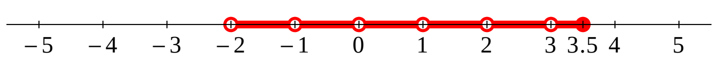
(d) 

(e) 

(f) 

(g) 

(h) 

(i) 

A 1.8. Gib die Teilermengen der folgenden Zahlen an: 5, 12, 25, 33, 36

A 1.9. Gib an, welche der folgenden Aussagen richtig bzw. falsch sind!

(a) Beim Addieren von natürlichen Zahlen entsteht stets wieder eine natürliche Zahl.

(b) Beim Subtrahieren von natürlichen Zahlen entsteht immer eine rationale Zahl.

(c) Beim Dividieren ganzer Zahlen entsteht stets eine ganze Zahl.

(d) Jede reelle Zahl ist eine rationale Zahl.

(e) Jede rationale Zahl ist eine reelle Zahl.

(f) Jede ganze Zahl ist eine natürliche Zahl.

(g) Beim Dividieren von natürlichen Zahlen entsteht immer eine reelle Zahl.

2 Rechnen mit ganzen Zahlen:

A 2.1. Berechne:

(a) $(-4)-(+3)-(-12)+(-5)=$

(b) $(+1)+(-5)-(+4)-|-3|=$

(c) $(-22)-|-19|+|+15|-(-1)=$

(d) $-6+[|5|-(-6+9)]=$

(e) $-4-[-6+(4-20)]-(4+6)=$

(f) $-11-[16+(-4+17)-|-11+8|]=$

A 2.2. Berechne:

(a) $(+3)\cdot(-4)=$

(b) $(-4)\cdot(-6)=$

(c) $(+3)\cdot 4=$

(d) $-3\cdot 7=$

(e) $(-3)\cdot[-3+|+5|\cdot(-1)]=$

(f) $8\cdot(-4)\cdot(9-|-7|)=$

(g) $(-1)\cdot[-3+(-4)]\cdot 2=$

(h) $4\cdot(-9)\cdot(-2)=$

A 2.3. Berechne:

(a) $28:(-7)=$

(b) $(-33):(-11)=$

(c) $-16:(+1)=$

(d) $12:(-4)+(-8)-(-20):(-5)=$

(e) $1-(-8):2+|+9|:(-3)-1=$

(f) $23-18:2+2-(+10):|-10|=$

A 2.4. Berechne:

(a) $[(-4)\cdot 3-(+6)\cdot(-2)]\cdot(-8)=$

(b) $[(-2)\cdot 5+(-6)\cdot(-3)]\cdot[(-1)\cdot|-7|-4\cdot(-8)]=$

(c) $3\cdot(-2)-(+4)\cdot(-3)\cdot|-2|-[24:(-3)-(-36):|9|]=$

(d) $(-3)\cdot(-2)\cdot(-1)-[(-1)\cdot(-4)-28:7-25:(-5)-3]=$

(e) $2\cdot(-7)-[-8+12:(-3)-16:(-8)]-(-27):9=$

3 Berechnung des größten gemeinsamen Teilers und des kleinsten gemeinsamen Vielfachen:

Definition: Unter dem *größten gemeinsamen Teiler der Zahlen* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ versteht man die größte Zahl d, die alle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ teilt. Man schreibt:

$$ggT(a_1, a_2, \ldots, a_n) = d$$

Berechnung des ggT$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ **mittels Primfaktorenzerlegung:**

1. Bestimme die Primfaktorenzerlegung von jeder Zahl a_i!
2. Bilde das Produkt derjenigen Primfaktoren, die in jeder Zerlegung vorkommen!
3. Potenziere jeden Primfaktor dieses Produkts mit dem kleinsten zugehörigen Exponenten aus den Zerlegungen!

Beispiel: Berechne den ggT$(360, 24, 792)$!

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 792 & 2 \\ 396 & 2 \\ 198 & 2 \\ 99 & 3 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ 24 = 2^3 \cdot 3^1 \\ 792 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11 \end{array}$$

Zur Berechnung des ggT nehmen wir nun aus den drei Primfaktorenzerlegungen alle Primzahlen, die in jeder Zerlegung vorkommen und zwar mit der kleinsten vorkommenden Potenz und bilden das Produkt:

$$\text{ggT}(360, 24, 792) = 2^3 \cdot 3^1 = 24$$

Definition: Unter dem *kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ versteht man die kleinste Zahl v, welche Vielfaches von jeder Zahl $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist. Man schreibt:

$$\text{kgV}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = v$$

Berechnung des kgV$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ **mittels Primfaktorenzerlegung:**

1. Bestimme die Primfaktorenzerlegung von jeder Zahl a_i!
2. Bilde das Produkt aller in den Zerlegungen vorkommenden Primfaktoren!
3. Potenziere jeden Primfaktor dieses Produkts mit dem höchsten zugehörigen Exponenten aus den Zerlegungen!

Beispiel: Berechne das kgV(24,45,22)

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 22 & 2 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 24 = 2^3 \cdot 3 \\ 45 = 3^2 \cdot 5 \\ 22 = 2 \cdot 11 \end{array}$$

Zur Berechnung des kgV nehmen wir nun aus den drei Zerlegungen jeden vorkommenden Primfaktor und zwar mit der höchsten vorkommenden Hochzahl:

$$\text{kgV}(24, 45, 22) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 = 3960$$

Aufgaben:

A 3.1. Berechne kgV und ggT der angegebenen Zahlen:

(a) $4, 10$	(b) $12, 36$	(c) $17, 23$	(d) $1539, 1472$	(e) $21250, 12393$	(f) $16, 18$
(g) $15, 60$	(h) $18, 25$	(i) $15, 16, 20$	(j) $96, 144, 240$	(k) $6, 8, 12$	(l) $10, 15, 20$
(m) $2200, 484$	(n) $21250, 34200$	(o) $8, 12, 16$	(p) $35, 45, 75$	(q) $6, 9, 12, 18$	(r) $5589, 1392$

4 Bruchrechnen:

A 4.1. Multiplizieren von Brüchen:

(a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{9} =$

(b) $-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} =$

(c) $2\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{3} =$

(d) $3\frac{1}{2} \cdot (-5) =$

(e) $-4\frac{1}{2} \cdot \left(-1\frac{2}{3}\right) =$

(f) $-4\frac{1}{6} \cdot \frac{0}{25} =$

A 4.2. Dividieren von Brüchen:

(a) $\frac{3}{7} : \frac{6}{11} =$

(b) $6 : \frac{5}{7} =$

(c) $\frac{9}{11} : \left(-\frac{6}{7}\right) =$

(d) $-1\frac{5}{7} : \frac{4}{7} =$

(e) $-\frac{4}{5} : 5 =$

(f) $-12\frac{2}{3} : \left(-2\frac{1}{9}\right) =$

A 4.3. Addieren und Subtrahieren von Brüchen:

(a) $\frac{3}{4} + \frac{7}{4} =$

(b) $\frac{7}{8} - \frac{3}{4} =$

(c) $-\frac{2}{3} - \left(-\frac{7}{9}\right) =$

(d) $-\frac{4}{15} + \frac{5}{12} =$

(e) $\frac{7}{12} - \frac{11}{14} =$

(f) $-1\frac{7}{8} + \frac{5}{4} =$

(g) $\left(-\frac{7}{12} - 1\frac{1}{4}\right) - \left(-2\frac{1}{3}\right) =$

(h) $-\frac{5}{14} - \left(-\frac{8}{3} - \frac{3}{70}\right) =$

(i) $-\frac{9}{10} - \left[\frac{3}{5} - \left(-1\frac{3}{4}\right)\right] =$

A 4.4. Komplexere Aufgaben:

(a) $-2 : \left(4\frac{3}{5} - 2\frac{1}{3}\right) =$

(b) $\left[-4\frac{2}{3} \cdot \left(-1\frac{1}{2}\right)\right] : 4\frac{1}{6} =$

(c) $\left(1\frac{1}{6} - \frac{5}{9}\right) \cdot \left(1\frac{1}{11} - \frac{5}{33} : \frac{5}{6}\right) =$

(d) $\left(1\frac{1}{17} - \frac{5}{34} : \frac{5}{6}\right) \cdot \left(2\frac{1}{4} - \frac{5}{6}\right) =$

(e) $\left[3\frac{3}{4} - \left(-7\frac{1}{8}\right)\right] \cdot \left(-5\frac{2}{3} + 2\frac{1}{2}\right) =$

(f) $\left(-2\frac{1}{6} + \frac{3}{4} \cdot 5\right) \cdot \left(-2\frac{19}{10}\right) + \frac{1}{2} =$

(g) $1\frac{2}{3} - 4 \cdot \left(2\frac{1}{5} - 3 : 2\frac{6}{7}\right) =$

(h) $2 + 1\frac{1}{2} : \left(7\frac{5}{9} - 2\frac{1}{6} \cdot \frac{7}{2}\right) =$

A 4.5. Vereinfache die folgenden Doppelbrüche:

(a) $\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}} =$

(b) $\frac{5}{-2\frac{1}{2}} =$

(c) $\frac{-3\frac{3}{4}}{10} =$

(d) $\frac{1}{\frac{1}{12}} =$

(e) $\frac{2\frac{5}{6} \cdot (-3)}{2 + \left(-1\frac{3}{4}\right)} =$

(f) $\frac{-8\frac{1}{4} \cdot \left(1\frac{2}{3}\right)}{\left|-7\frac{1}{3} - \left(-1\frac{5}{6}\right)\right|} =$

A 4.6. Gib jeweils den Bruch als Dezimalzahl oder die Dezimalzahl als Bruch an:

(a) $2,5 =$

(b) $\frac{2}{5} =$

(c) $7,25 =$

(d) $3\frac{2}{7} =$

(e) $\frac{1}{3} =$

(f) $3,00125 =$

5 Potenzen:

A 5.1. Vereinfache:

(a) $a^3 \cdot a^5 x \cdot a^2 x =$

(b) $(-b)^8 : b^7 =$

(c) $\dfrac{x^4}{x^7} =$

(d) $\dfrac{6a^4y^5}{-3a^3y^2} =$

(e) $\dfrac{-8a^2b^2c^4}{4a^5b^2c^5} =$

(f) $\left(\dfrac{2a}{b}\right)^3 =$

(g) $\left(-\dfrac{3x}{y}\right)^4 =$

(h) $\left(\dfrac{2r^2}{5sz^2}\right)^4 =$

(i) $\left(\dfrac{-5xy^3}{a^2b}\right)^2 =$

(j) $\left(\dfrac{3rs^2}{6r^3s^2}\right)^2 =$

(k) $\left(\dfrac{4a^2b}{12ab^3}\right)^2 =$

(l) $\dfrac{x^6}{y^2} \cdot \left(\dfrac{1}{x^3}\right)^3 =$

(m) $\left(\dfrac{3x}{y^2}\right)^3 : \left(\dfrac{3x^2}{y^4}\right)^4 =$

(n) $\left(\dfrac{6x^2}{y^6}\right)^2 : \left(\dfrac{9x^3}{y^4}\right)^3 =$

(o) $\left[\left(\dfrac{-2x^2}{y}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{3y^2}{4x}\right)^4\right] : \dfrac{9y^5}{8x} =$

(p) $\left[\left(\dfrac{-5ax}{3b^2y}\right)^4 : \left(\dfrac{5ax}{12b^3y^2}\right)^3\right] \cdot \left(\dfrac{by}{2ax}\right)^4 =$

(q) $\left[\dfrac{4x^4}{3y^2} \cdot \left(\dfrac{2x^3}{5y}\right)^3\right] : \left[-\left(\dfrac{8x^4}{15y^2}\right)^2\right] =$

A 5.2. Vereinfache und stelle die folgenden Ausdrücke mit positiven Hochzahlen dar:

(a) $3a^{-2} =$

(b) $7y^2z^{-5} =$

(c) $3 \cdot a^{-2} \cdot b^{-3} =$

(d) $\dfrac{4^{-1}}{x^{-1}} =$

(e) $\dfrac{2}{r^{-3}} =$

(f) $x^2 \cdot x^{-4} =$

(g) $\dfrac{x^{-3}}{x^{-1}} =$

(h) $\dfrac{3x^{-2}y}{6xy^{-2}} =$

(i) $\dfrac{x \cdot y^{-2} \cdot z^5}{x^{-3} \cdot y \cdot z^{-1}} =$

(j) $\dfrac{x^{-3}y^0z^2}{x^3y^{-2}z^{-2}} =$

(k) $\dfrac{60x^0y^{-3}z^{-4}}{12x^{-2}y^3z^{-3}} =$

(l) $6x \cdot \dfrac{1}{8x^{-3}} =$

(m) $\dfrac{16x^2y^3}{x^{-1}} \cdot 2^{-4}y^{-3} =$

(n) $\dfrac{x^3y^{-2}}{3y} : \dfrac{x^{-2}}{3^{-1}y^3} =$

(o) $\dfrac{5xyz}{2x^{-2}y} : \dfrac{10xy^{-1}}{5^{-2}z^{-3}} =$

(p) $25x^0 \cdot \dfrac{y^{-1}}{5x^{-1}} \cdot 5^{-1}y^1 =$

(q) $\dfrac{2^3 \cdot 3^2}{5x^2y^{-2}} : \dfrac{9x^{-2}y \cdot 5^{-1}}{8^{-1}y^{-1}} =$

(r) $\left(4x^2y^{-2}\right)^2 =$

(s) $\left(x^{-3}y\right)^3 x^3 =$

(t) $x^{-3}\left(x^{-2}y^{-3}\right)^{-1} y^{-2} =$

(u) $2\left(3^{-1}x^0y^2\right)^{-2} =$

A 5.3. Vereinfache und stelle die folgenden Ausdrücke mit positiven Hochzahlen dar:

(a) $\left(\frac{3x^{-1}}{2y}\right)^3 \cdot \left(\frac{-3x}{3y}\right)^{-1} =$

(b) $\left(\frac{-4}{3^2}\right)^{-3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} =$

(c) $\left[\left(\frac{2x}{5y}\right)^2\right]^{-3} : \left(\frac{25x^{-3}}{2y}\right)^2 =$

(d) $\frac{\left(-x^3y\right)^2}{\left(x^2y^3\right)^3} : \left(\frac{xy}{x^3y^3}\right)^{-2} =$

(e) $\left[\frac{\left(4x^{-1}y^3\right)^2}{z^4} : \left(\frac{3y^{-3}}{4x \cdot z^{-1}}\right)^{-3}\right] \cdot \frac{y \cdot z^{-1}}{9x^{-5}} =$

(f) $\left(\frac{2a^{-2}}{6x^2y}\right)^{-3} : \left(-\frac{6xy^{-1}}{a^{-1}}\right)^3 =$

(g) $-18\left(3f^3g^{-4}\right)^{-2} f^7 g^{-2} \frac{2}{9^{-1}f^{-1}g^5} =$

(h) $\left(5k^5\ell^{-1}\right)^{-3} : \left[\left(\frac{10}{2^3k^{-2}\ell^3}\right)^{-3} \cdot \frac{\left(2^{-2}k^{-1}\ell^{-1}\right)^{-1}}{20k}\right] =$

(i) $\frac{(x+y)^{-1}}{x^{-1}+y^{-1}} =$

(j) $\frac{x-y}{x^{-1}-y^{-1}} =$

A 5.4. Stelle das Ergbnis ohne negative Hochzahlen und ohne gebrochen rationale Hochzahlen dar!

(a) $\sqrt[3]{3x} \cdot \sqrt[3]{4x^5} =$

(b) $\sqrt{5a} \cdot \sqrt{5a^5b^4} =$

(c) $\sqrt[4]{2x^3} \cdot \sqrt[4]{8xy^8} =$

(d) $\sqrt[5]{\frac{x}{2}} \cdot \sqrt[5]{\frac{64}{x^6}} =$

(e) $\sqrt[5]{\frac{x^9}{y^4}} \cdot \sqrt[5]{\frac{y^9}{x^4}} =$

(f) $\frac{\sqrt[3]{a^4b^7}\sqrt{b}}{\sqrt[5]{ab^2}} =$

(g) $\sqrt[4]{x^3y} : \left(xy^4\right)^{-\frac{2}{3}} =$

(h) $a^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\sqrt[6]{2ab^5}\right)^{-4} =$

(i) $x^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{x^{-4}} =$

(j) $\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^3 : \sqrt{x^3} =$

(k) $\frac{\sqrt[4]{a^3}}{a^{-\frac{1}{3}}} =$

(l) $\left(1 : \sqrt[3]{x}\right) : \left(x^{-3}\right)^{\frac{1}{2}} =$

(m) $\sqrt[3]{xy} \cdot \sqrt[5]{x^2y^3} =$

(n) $\frac{\sqrt[7]{(xy)^3}}{\sqrt{xy^3}} =$

(o) $\sqrt[5]{a^2b} : \sqrt[4]{a^{-\frac{1}{5}}} =$

(p) $\sqrt[5]{x^2y} : x^{-\frac{2}{3}} =$

6 Rechnen mit Termen

A 6.1. Vereinfache:

(a) $2x-3y+x-y=$

(b) $\frac{5e}{4}-2e=$

(c) $2m+9-3m=$

(d) $\left(\frac{4k}{9}+\frac{2k}{3}\right)\cdot 3=$

(e) $\left(\frac{8}{9}y-y\right):3=$

(f) $-\left(\frac{2u}{3}+\frac{3v}{4}\right)-\left(\frac{5u}{6}-\frac{7v}{8}\right)=$

(g) $-\left(r+\frac{3}{4}s\right)-\left(\frac{5r}{8}-2s\right)=$

(h) $x^3+5x^2+3-x^3-2x^2+4x=$

(i) $4a^2-\left[3a^2-b-\left(2a^2+ab-3b^2\right)\right]=$

(j) $5y^2-4x^2y-\left\{2xy^2-2x^3+2xy^2+\left[x^2y-\left(-3x^2y+4xy^2\right)\right]\right\}=$

A 6.2. Vereinfache:

(a) $2a\left(-4a^2+3a-2\right)-5\left(4a-a^2-2a^3\right)=$

(b) $\left(-9x^2+2\right)\cdot 4x^2+2x^2\left(5x^2-8\right)-\left(-7x^4+5x^2\right)\cdot 4=$

(c) $(5e-2f)(3g+4h)=$

(d) $(3xy+2x)(5y-2xy)=$

(e) $(5r-6s-2t)(-4x+y-3z)=$

(f) $\left(2u^2+5v^2\right)(5u-3v)=$

(g) $\left(3a^2-3a+1\right)(6y+1)=$

(h) $\left(3r^2-s^2\right)(2r+3s)-(2r+5s)\left(4r^2-2s^2\right)=$

(i) $\left(-3r^2+2rs+5s^2\right)\left(-2rs-s^2\right)=$

(j) $\left(3r^2-s^2\right)(2r+3s)-(2r-5s)\left(-4r^2+2s^2\right)=$

A 6.3. Berechne unter Anwendung der Formel $(a+b)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}b^j$

(a) $(x-y)^2=$

(b) $(-2x-z)^4=$

(c) $\left(a^2-b\right)^2=$

(d) $\left(y^2z+3z^2y\right)^5=$

(e) $\left(-6i^2k^2-4k^3m\right)^3=$

(f) $(a-b)^7=$

(g) $\left(x^2+y\right)^6=$

(h) $\left(-2c^3-1\right)^3=$

(i) $\left(3v-vw^2\right)^5=$

(j) $(d-k)^6=$

(k) $\left(2x-z^2\right)^4=$

(l) $(b-c)^8=$

A 6.4. Vereinfache:

(a) $-4+(-4+3m)^3-(-4+m)\left(2-5m^2\right)-12\left(5m+m^2\right)=$

(b) $2(x-y)^3+3(x-y)^2(x+y)-4(x-y)(x+y)^2=$

(c) $40y^3-20z\left(8y^2-8yz-z\right)-2(5y+1)(2y-4z)^2+3(y-2z)^2=$

A 6.5. Zerlege in ein Produkt:

(a) $3e+3f-3h=$

(b) $6x^2y^3+18xy^5=$

(c) $25v^4w^2+15v^3w=$

(d) $v(e+f)+w(e+f)=$

(e) $rv-rw+sv-sw=$

(f) $a^4-a^3=$

A 6.6. Hebe (-1) heraus:

(a) $-a+b-c-d=$

(b) $x-y+3z^2=$

(c) $a-b-c+d=$

(d) $-v^2+b=$

A 6.7. Zerlege in ein Produkt:

(a) $ef-eg+fh-gh=$

(b) $km-mp-kn+np=$

(c) $(e+f)(g-h)-(2e-3f)(h-g)=$

(d) $(7r-3s)(2x-3y)+(2s-3r)(3y-2x)=$

(e) $(r-2)^2(r+3)+(r-2)(2r+1)(3r-2)=$

(f) $(x+y)^3-(2s-3)(s+2)^2(x+y)-4(x-y)(x+y)^2=$

(g) $2(x-y)^3+3(x-y)^2(x+y)-4(x-y)(x+y)^2=$

(h) $4(y-2z)^2-2(2y-4z)^2(5y+z)+(y+4z)^2(-3y+6z)=$

A 6.8. Zerlege in ein Produkt:

(a) $x^2-v^2w^2=$

(b) $36v^2-64w^2=$

(c) $\frac{1}{4}y^2-4z^2=$

(d) $100e^2-81f^2=$

(e) $8x^2-2y^2=$

(f) $81a^4b^2-36a^2b^4=$

(g) $20a^2-45b^2=$

(h) $40k^2-90m^2=$

(i) $6a^2(x+5)+2x+10=$

(j) $x^2(x-y)-y^2(x-y)=$

(k) $2(x-2)^2+3(x^2-4)-4(2-x)(3x+1)=$

(l) $3\left(4x^2-9\right)-2(3-2x)(4x-1)+4(2x-3)^2=$

7 Rechnen mit Bruchtermen:

A 7.1. Vereinfache durch Herausheben und Kürzen:

(a) $\frac{2x^3-3x}{2x}=$

(b) $\frac{4x^3+3x^2}{2x^2}=$

(c) $\frac{3y+5y^2}{y}=$

(d) $\frac{6z^3-5z}{2z}=$

(e) $\frac{9y-3y^3}{3y}=$

(f) $\frac{8z^4-3z^3}{5z^2}=$

(g) $\frac{4a^2-4a}{8a^2}=$

(h) $\frac{12a^3+8a^2}{4a^3}=$

(i) $\frac{5r^2+10rs}{2r}=$

(j) $\frac{16g^3-14g^2h^3}{2g^2}=$

(k) $\frac{5x-10y}{15x+5y}=$

(l) $\frac{6-3z}{6+12z}=$

(m) $\frac{8a+4ab}{6ab-2a}=$

(n) $\frac{7ab+14a}{14a^2+7ab}=$

(o) $\frac{6a^2+2ab}{12ab+4b^2}=$

(p) $\frac{3rs+6r^2}{9r-3rs}=$

(q) $\frac{5x^3+10x^2y}{5x^2-15xy}=$

(r) $\frac{6z^5-3z^2}{9z^2+6z^3}=$

(s) $\frac{5a^2b-10a^2}{3ab-6a}=$

(t) $\frac{2a^2+3ab}{2ab+3b^2}=$

A 7.2. Vereinfache:

(a) $\frac{\left(4x^2-4\right)(x+3)}{(2x-2)(2x+4)}=$

(b) $\frac{8y-8}{(2y-2)(4y+8)}=$

(c) $\frac{y^2-9}{3y+y^2}=$

(d) $\frac{5x^2-5}{(x+1)^2}=$

(e) $\frac{10z-10}{(5z-5)(2z+4)}=$

(f) $\frac{7x^2-28}{(8-4x)(x+3)}=$

(g) $\frac{6x^2-6}{15x+15x^2}=$

(h) $\frac{6x+12}{(3x+6)(2x-4)}=$

(i) $\frac{3x^2+3x}{4x^2-4}=$

(j) $\frac{18x^2-18x}{27x^2}=$

(k) $\frac{75-3x^2}{(2x-10)(3x+6)}=$

(l) $\frac{16x^2-16}{12-12x^2}=$

A 7.3. Finde das kleinste gemeinsame Vielfache und vereinfache:

(a) $\frac{2r}{5st}+\frac{s}{6rt}+\frac{t}{10rs}=$

(b) $\frac{3x}{(x+5)(x-1)}+\frac{2x}{(x-1)(x-2)}=$

(c) $\frac{1}{2x+5}+\frac{6}{3-x}=$

(d) $\frac{10}{x^2-1}+\frac{5}{x+1}=$

(e) $\frac{4y-1}{3y+3}-\frac{1-2y}{y^2-1}=$

(f) $\frac{3z^2+8}{9z^2-16}-\frac{3z-1}{12+9z}=$

(g) $\frac{2r}{rs-s^2}-\frac{2s}{r^2-rs}-\frac{r+s}{rs}=$

(h) $\frac{2s}{s-3}-\frac{7s^2}{s^2-9}-\frac{5s}{3-s}=$

(i) $\frac{1}{a^2}+\frac{b}{a^3-ab^2}-\frac{b}{a^3+a^2b}=$

(j) $\frac{d}{de-e^2}-\frac{e}{d^2+de}-\frac{1}{d+e}+\frac{1}{d}=$

(k) $\frac{d}{de-e^2}-\frac{e}{d^2+de}-\frac{1}{d+e}+\frac{1}{d-e}=$

(l) $\frac{r+s}{6(r-s)^2}-\frac{r-s}{6(r+s)^2}-\frac{4s^3}{3\left(r^2-s^2\right)^2}=$

(m) $\frac{1}{3a-2ab}+\frac{3b-2}{9b-4b^3}-\frac{5}{15b^2+10b^3}=$

A 7.4. Vereinfache:

(a) $\frac{7(x-1)}{4x+12}\cdot\frac{2x-6}{3x-3}=$

(b) $\frac{9x-3}{3x+12}\cdot\frac{3x+6}{2-6x}=$

(c) $\frac{(x+2)^2}{x^2-6x}\cdot\frac{3x-18}{4+2x}=$

(d) $\frac{3(x+7)}{8x-16}\cdot\frac{5x-10}{28+4x}=$

(e) $\frac{5x+10}{6x-9}\cdot\frac{2x^2-3x}{x^2+2x}=$

(f) $\frac{4x^2-9}{16x^2-25}\cdot\frac{16x+20}{9-6x}=$

(g) $\frac{5x+2}{3x^2-9x}\cdot(18-6x)=$

(h) $\frac{2x-1}{(x-2)(x+3)}\cdot(x^3+3x^2)=$

(i) $\frac{1}{25x^2-9}\cdot(5x+3)^2=$

(j) $\frac{5-x}{(6x-6)(5x^2-10x)}\cdot(4x^2-4)=$

(k) $\frac{x}{y^2-xy}\cdot(x-y)=$

(l) $\frac{6x^2y}{4x^2-6xy}\cdot(2x-3y)=$

(m) $\frac{2x+y}{4x^2-9y^2}\cdot(2x+3y)=$

(n) $(2x-7y)\cdot\frac{3x+y}{4x^2-49y^2}=$

A 7.5. Vereinfache:

(a) $\frac{a-2b}{2a-b}:\frac{2b-a}{b-2a}=$

(b) $\frac{4a+8b}{20a-30b}:\frac{3a+6b}{10a-15b}=$

(c) $\frac{2x-y}{x+3y}:\frac{4x^2-y^2}{x^2-9y^2}=$

(d) $\frac{9x^2-y^2}{x^2-y^2}:\frac{6x-2y}{3x+3y}=$

(e) $\frac{5r^2}{3r+2s}:\frac{10r}{3rs+2s^2}=$

(f) $\frac{pq+3q^2}{7q^2}:\frac{2p+6q}{21q}=$

8 Gleichungen

A 8.1. Löse die folgenden Gleichungen!
Gib jede Äquivalenzumformung an!

(a) $x+6=1$

(b) $10v=2v+2$

(c) $\frac{9}{2}v=1$

(d) $2+\frac{z}{5}=\frac{1}{2}$

(e) $5-\frac{w}{3}=w$

(f) $3c=2c$

(g) $5m-(3+2m)=m-(4-2m)$

(h) $3y+4(y-3)=5y-3(y-1)$

(i) $(2-4x)\cdot 5+6x=(5-7x)\cdot 2$

(j) $(x+2)^2=x^2+4$

(k) $z-3=3z-2(z+1)$

(l) $5(3u-2)=(5u-1)\cdot 3-7$

(m) $(2y-3)^2=(2y+4)(2y-4)-(12y-15)$

A 8.2. Stelle jede Variable explizit dar!
Gib bei den Umformungen jede Äquivalenzumformung an!

(a) $v=\frac{s}{t}$

(b) $Q=m\cdot c\cdot \Delta T$

(c) $W=\frac{1}{2}CU^2$

(d) $c=\lambda\cdot f$

(e) $F_1\cdot l_1=F_2\cdot l_2$

(f) $\omega^2=\frac{1}{LC}$

(g) $P=U\cdot I$

(h) $p\cdot V=N\cdot k\cdot T$

(i) $P=\frac{1}{2}F(v+v_0)$

A 8.3. (a) 420 Euro sind im Verhältnis 4:9 aufzuteilen. Berechne die Teilbeträge!

(b) 8 280 Euro sind im Verhältnis 7:11 aufzuteilen. Berechne die Teilbeträge!

(c) 3 770 Euro sind im Verhältnis 12:17 aufzuteilen. Berechne die Teilbeträge!

(d) Eine Strecke von 12 cm ist im Verhältnis 5:3 zu teilen. Berechne die Länge der Teilstrecken!

(e) Kupferoxid besteht aus Kupfer und Sauerstoff im Massenverhältnis 4:1. Berechne, wieviel Gramm Kupfer und wieviel Gramm Sauerstoff in 630 g Kupferoxid enthalten sind!

(f) In einer Versammlung von 36 Personen war das Verhältnis der Anzahl der Damen zu der Anzahl der Herren 7:11. Berechne, wieviele Damen bzw. Herren anwesend waren!

A 8.4. Gib die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen über der Grundmenge $\mathbb{Q}$ an!

(a) $\frac{x-3}{2}=3-\frac{2x}{5}$

(b) $10x-10=\frac{10x+3}{3}-\frac{6x-7}{2}$

(c) $\frac{7x-13}{6}+2=\frac{5x-11}{12}-\frac{9-3x}{8}$

(d) $2x-\frac{18x+1}{10}=1\frac{5}{6}-\frac{3-2x}{3}$

(e) $\frac{5x-1}{6}+\frac{7x-9}{10}+\frac{11x-7}{15}=3$

(f) $x+\frac{3x-9}{5}=4-\frac{5x-12}{3}$

A 8.5. Bestimme in den folgenden Aufgaben jeweils die Definitionsmenge D für die Grundmenge $G=\mathbb{Q}$ und gib die Lösungsmenge L an!

(a) $\frac{2}{x-3}=1$

(b) $\frac{x}{3x+4}=2$

(c) $\frac{5}{3x-3}=\frac{1}{x}$

(d) $\frac{7x}{2-3x}=-3$

(e) $\frac{2}{3x}-\frac{4}{x}=1\frac{2}{3}$

(f) $\frac{2}{x-1}=\frac{3}{1-x}$

(g) $\frac{3}{x+2}=\frac{1}{x}+\frac{5}{4x}$

(h) $\frac{3}{x+3}+\frac{2}{x-2}=\frac{5}{x}$

(i) $\frac{4}{6x-9}-\frac{7}{24x}=\frac{3}{8x-16}$

(j) $\frac{3}{6x-4}-\frac{5}{18x}=\frac{2}{9x-9}$

(k) $\frac{2(x-1)}{x-3}=\frac{5(x-4)}{x-3}$

(l) $\frac{x+1}{x-2}-\frac{x-3}{2x-4}=1$

(m) $\frac{-x+9}{6x-18}-\frac{3x-5}{6-2x}=\frac{4x-3}{3x-9}$

(n) $\frac{x}{x-3}-\frac{x}{x+3}=\frac{12}{x^2-9}$

(o) $\frac{x+5}{(x-5)^2}=\frac{2}{x+5}-\frac{x}{x^2-25}$

(p) $\frac{3x-1}{3x-6}-\frac{10x+3}{6x^2+12x}=\frac{3x^2+7}{3x^2-12}$

(q) $\frac{x-2}{2x+6}-\frac{x-2}{3x+9}=1$

(r) $\frac{4x-5}{6x-15}-\frac{3x+1}{8x-20}=\frac{3}{4}$

(s) $\frac{x+6}{(x-3)^2}=\frac{2}{x+3}-\frac{x}{x^2-9}$

(t) $\frac{x-1}{2x-6}-\frac{x^2-1}{2x^2-18}=\frac{6x+11}{6x^2+18x}$

A 8.6. Gib die Lösungsmenge L der folgenden quadratischen Gleichungen für die Grundmenge $G=\mathbb{R}$ an!

(a) $3x^2-12x-63=0$

(b) $x^2+10x+24=0$

(c) $3x^2+12x=0$

(d) $\frac{5}{6}x^2-\frac{3}{11}=0$

(e) $0,5x^2-2x-6=0$

(f) $64x^2-25=0$

(g) $x^2-2x+1=0$

(h) $\frac{1}{2}x^2+x-4=0$

(i) $4x^2+16=0$

(j) $x^2-x+\frac{1}{4}=0$

(k) $2,8x^2-14x=0$

(l) $2\sqrt{3}x^2-8x+\sqrt{3}=0$

(m) $x^2-3,5x-15=0$

(n) $x^2+4x+13=0$

A 8.7. Zerlege die folgenden quadratischen Polynome in ein Produkt von Linearfaktoren:

(a)	$x^2-4x-21=$	(e)	$x^2-3x-4=$
(b)	$6x^2+x-15=$	(f)	$2x^2+x-6=$
(c)	$42x^2+11x-3=$	(g)	$15x^2+45x-150=$
(d)	$4x^2-24x+9=$	(h)	$6x^2+x-35=$

A 8.8. Gib für die folgenden Gleichungen
(1) die Definitionsmenge D_1 und die Lösungsmenge L_1 für die Grundmenge $G_1=\mathbb{R}$
(2) die Definitionsmenge D_2 und die Lösungsmenge L_2 für die Grundmenge $G_2=\mathbb{Z}$
an!

(a) $(2x-4)(2x+4)-(3x-5)^2=(2x-7)^2-(2x+5)(2x-3)-217$

(b) $\frac{24}{x^2}-\frac{5x-7}{x}=2+\frac{7-x}{x}$

(c) $\frac{1,5x+2}{x}=\frac{4+6x}{2x}$

(d) $\frac{x}{2x-1}+\frac{x}{1+2x}=\frac{4}{3}$

(e) $\frac{3x-10}{x-2}-\frac{x-4}{x+1}=1$

(f) $\frac{21}{x+2}-\frac{10}{x}=\frac{4}{x-1}$

(g) $\frac{x}{x+3}-\frac{x}{3-x}=2\frac{1}{4}$

(h) $\frac{x+9}{x}-\frac{4}{x-1}=\frac{x+5}{x+1}$

(i) $\frac{2}{x^2-3x-4}=\frac{-3}{x^2+2x+1}$

(j) $\frac{x+4}{x-1}-\frac{2-3x}{x+3}=\frac{4x^2+2x+14}{x^2+2x-3}$

(k) $\frac{59}{x^2}-\frac{4x-2}{x}=\frac{10}{x^2}-\frac{3x-2}{x}$

(l) $\frac{2x+3}{2x+5}-\frac{2x-5}{2x-3}=\frac{9x^2-12x+20}{4x^2+4x-15}$

(m) $\frac{4x-7}{x-3}-\frac{2x-1}{x+1}=-2$

(n) $\frac{3x-8}{x-3}-\frac{4x+15}{x+2}=\frac{2x+29}{x^2-x-6}$

(o) $\frac{7x+2}{7x+3}-\frac{3-7x}{7x-2}=\frac{49x^2+28x+8}{49x^2+7x-6}$

(p) $\frac{x+2}{2x-1}-\frac{1-3x}{2x+3}=\frac{8x^2+2x+7}{4x^2+4x-3}$

(q) $\frac{3x}{8x^2-18}-\frac{x-2}{2x^2-7x-15}=\frac{-7x}{10x^2-65x+75}$

(r) $\frac{1}{k^2-4k+4}+\frac{5}{k^2+k-6}-\frac{9}{3k^2-6k}=\frac{8k+3}{4k^3-16k^2+16k}$

(s) $\frac{4}{x^2-3x+2}=\frac{4x+4}{3x-6}+\frac{x+1}{1-x}$

(t) $\frac{x+1}{2x^2-11x+5}=\frac{9}{3x-15}-\frac{3x-6}{8x^2-2}$

A 8.9. Textaufgaben:

(a) In einem Rechteck ist die Länge um 4cm größer als die Breite. Wenn man die Breite um 4 cm verkürzt und die Länge unverändert lässt, so erhält man ein Rechteck mit dem Flächeninhalt 768 cm^2. Berechne die Seitenlängen des ursprünglichen Rechtecks!

(b) Verlängert man eine Seite eines Quadrats um 3 cm und verkürzt die andere um 4 cm,so entsteht ein Rechteck mit 90 cm^2 Flächeninhalt. Berechne die Seitenlänge des Quadrats!

(c) Der Flächeninhalt eines gleichschenkeligen Dreiecks beträgt $518\,\text{cm}^2$. Die Basis des Dreiecks ist um 9 cm kürzer als die Höhe des Dreiecks. Berechne die Länge der Höhe und die Länge der Basis des Dreiecks!

(d) Der Flächeninhalt eines gleichschenkeligen Dreiecks beträgt $4806\,\text{cm}^2$. Die Basis des Dreiecks ist um 19 cm länger als die Höhe des Dreiecks. Berechne die Länge der Höhe und die Länge der Basis des Dreiecks!

A 8.10. Textaufgaben zu fortlaufenden Proportionen:

(a) Die Seitenlängen eines Dreiecks verhalten sich wie 2:3:4, der Umfang beträgt 153 m. Berechne die Länge der Seiten eines solchen Dreiecks!

(b) Schwefelsäure enthält Wasserstoff, Sauerstoff und Schwefel im Massenverhältnis 1:32:16. Berechne, wieviel Gramm Sauerstoff und wieviel Gramm Schwefel in 7350 Gramm Schwefelsäure enthalten sind!

(c) In einem Testament wird den vier Erben ein Betrag von 5 400 Euro vermacht. Die Erbschaft ist im Verhältnis 2:3:2:5 zu teilen. Wieviel Euro erhält jeder der Erben?

(d) Wie groß ist der Gewinn eines Loses, wenn nach der Aufteilung an vier Personen im Verhältnis 1:2:2:3 der größte Anteil 375 Euro beträgt?

(e) Drei Erben teilen einen Betrag von 8 400 Euro im Verhältnis 3:4:7. Berechne die einzelnen Anteile!

A 8.11. Bestimme die Definitionsmenge D und die Lösungsmenge L für die Grundmenge $G = \mathbb{R}$!

(a) $3+\sqrt{\frac{x}{2}} = 5$

(b) $3\sqrt{x}+2 = \frac{8}{\sqrt{x}}$

(c) $8+\frac{\sqrt{3x}}{4} = 5$

(d) $\frac{2x-3}{\sqrt{6x-6}} = 1$

(e) $1+\sqrt{3x+1} = 4$

(f) $9+\sqrt{7-x} = 7$

(g) $2x-\sqrt{5x-9} = 6$

(h) $\sqrt{x-1}-\sqrt{x-3} = 1$

(i) $x = 1-\sqrt{7-3x}$

(j) $\sqrt{1-2x}+\sqrt{2x-2} = 5\sqrt{2}$

(k) $\sqrt{4x+50}+2\sqrt{x+6} = 13\sqrt{2}$

(x) $\sqrt{1-5x}-3x = 13$

(y) $\sqrt{3-2x}+\sqrt{x-2} = 1$

(l) $\sqrt{x-5} = 1+\sqrt{10-2x}$

(m) $\frac{\sqrt{3-2x}}{2}+\frac{x+2}{6} = 1$

(n) $\sqrt{4x-7}+x+3 = 0$

(o) $\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}$

(p) $\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+4} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+8}$

(q) $\frac{x}{4} = \sqrt{-2-x}-\frac{1}{2}$

(r) $\sqrt{x+1}-\sqrt{4x-7} = \sqrt{x+8}$

(s) $\sqrt{x+13}+4\sqrt{x-2} = \sqrt{49x+109}$

(t) $\sqrt{4-2x}+\sqrt{2x-3} = \sqrt{3x-5}$

(u) $2\sqrt{2-x}+5\sqrt{x+3} = \sqrt{x-5}$

(v) $\sqrt{6x+1}-\sqrt{4x-7} = \sqrt{x+8}$

(z) $\sqrt{1+2x}+\sqrt{7-4x} = \sqrt{6x-8}$

(z1) $\sqrt{1+2x}-\sqrt{7-4x} = \sqrt{6x-8}$

A 8.12. Gib die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen für die Grundmenge $G = \mathbb{R}$ an!

(a)	$x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$	(j)	$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$
(b)	$x^3 - 2x^2 + 10x = 0$	(k)	$x^4 - 4x^2 - 5 = 0$
(c)	$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$	(l)	$x^4 - 13x^3 + 60x^2 - 116x + 80 = 0$
(d)	$x^5 + 2x^3 - 15x = 0$	(m)	$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$
(e)	$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$	(n)	$x^4 - 3x^2 - 2x = 0$
(f)	$x^3 - 2x^2 - 9 = 0$	(o)	$x^3 + 4x - 5 = 0$
(g)	$x^3 - 2x^2 + x = 0$	(p)	$x^5 - 5x^3 - 36x = 0$
(h)	$x^3 + 5x^2 - 4x - 20 = 0$	(q)	$4x^3 + 34x^2 - 60x = 0$
(i)	$x^3 + 11x^2 + 25x + 3 = 0$	(r)	$x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 8 = 0$

9 Lineare Gleichungssysteme

9.1 Lineare Gleichungssysteme in 2 Variablen

A 9.1. Löse die folgenden Gleichungssysteme **(i)** mit dem Substitutionsverfahren, **(ii)** mit dem Gleichsetzungsverfahren und **(iii)** mit dem Eliminationsverfahren!

(a) I: $x - y = 3$
II: $-4x + y = -18$

(b) I: $2x + 9y = 3$
II: $7x + 6y = 19$

(c) I: $4x + 9y = -19$
II: $7x - 2y = 20$

(d) I: $x - 8y = 85$
II: $x - 3y = 37$

A 9.2. Löse die folgenden linearen Gleichungssysteme:

(a) I: $y = 7x + 23$
II: $y = -3x + 7$

(b) I: $\frac{x}{2} - \frac{y}{5} = 1$
II: $-5x + 2y = 10$

(c) I: $4x - 5y = 21$
II: $4x = -20y + 6$

(d) I: $0,1x - 0,4y = 3$
II: $0,3x + 1,2y = -3$

(e) I: $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$
II: $5x + 6y = -4$

(f) I: $x = 5y + 39$
II: $x = -3y - 17$

(g) I: $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 4$
II: $\frac{x}{4} + y = 9$

(h) I: $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$
II: $4x + 6y = 2$

(i) I: $\frac{2x}{3} - \frac{y}{5} = 6$
II: $\frac{x}{5} + \frac{3y}{4} = 18$

A 9.3. Vereinfache die Gleichungen zunächst und löse dann die angegebenen Gleichungssysteme!

(a) I: $\frac{3x+2}{5} = \frac{5y+4}{6}$
II: $\frac{5y-2x}{4} = \frac{5x-2y}{11}$

(b) I: $\frac{3x-1}{5} = \frac{5y+1}{4}$
II: $\frac{7x-9y}{2} = \frac{24x-23y}{9}$

(c) I: $15x - 3 = 12(x-1) - 5y$
II: $9(x-2y) = 3(x-y) + 57$

(d) I: $\frac{3x-4y-2}{5} - \frac{4x+2y+7}{3} = y$
II: $\frac{7x-2y+2}{9} + \frac{5x+7y-1}{6} = x$

(e) I: $\frac{2x-3}{6} + 1\frac{1}{2} = y - \frac{3y-3x-5}{4}$
II: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = -\frac{1}{6}$

(f) I: $(2x-3)(3y+4) - (6x-2)y = 26$
II: $(4-3x)(y+5) - 3x(1-y) + 42 = 0$

A 9.4. Formuliere aus den folgenden Texten Gleichungen und löse die Gleichungssysteme!

(a) Die Summe zweier Zahlen ist 148, ihr Quotient 3. Berechne die Zahlen!

(b) Die Summe zweier Zahlen ist $\frac{1}{2}$. Vermehrt man die erste Zahl um das Doppelte der zweiten, so erhält man $-\frac{1}{2}$. Berechne die beiden Zahlen!

(c) Addiert man zur zweiten Zahl das Siebenfache der ersten, so erhält man 108. Addiert man zur ersten Zahl das Fünffache der zweiten Zahl, so erhält man 98. Berechne die beiden Zahlen.

(d) Die Summe aus einer Zahl und dem Doppelten einer anderen Zahl ist 27. Die Summe aus dem Doppelten der ersten Zahl und dem Dreifachen der zweiten Zahl beträgt 49. Wie lauten die Zahlen?

(e) Die Summe aus dem Doppelten einer Zahl und dem Dreifachen einer anderen Zahl ist 396. Die Summe aus dem Fünftel der ersten und der Hälfte der zweiten Zahl beträgt 56. Wie lauten die Zahlen?

(f) Ein Gastwirt kauft 300 Liter Weißwein sowie 400 Liter Rotwein und zahlt dafür 2 080,–€. Einen Monat später kauft er 300 Liter Weißwein und 500 Liter Rotwein und zahlt 2 390,–€. Wieviel kostet 1 Liter Weißwein bzw. 1 Liter Rotwein?

(g) Ein Kaufmann kauft im Großhandel um 901 Euro Reis und Zucker, insgesamt 1200 kg ein. Er bezahlt 1,40 Euro für 1 kg Reis und 45 Cent für 1 kg Zucker. Berechne, wieviel kg Reis und wieviel kg Zucker der Kaufmann gekauft hat!

(h) Ein Kaufmann kauft im Großhandel um 198,5 Euro Kaffee und Tee, insgesamt 100 kg ein. Er bezahlt 1,98 Euro für 1 kg Kaffee und 2 Euro für 1 kg Tee. Berechne, wieviel kg Kaffee und wieviel kg Tee der Kaufmann gekauft hat!

9.2 Lineare Gleichungssysteme in drei Variablen

A 9.5. Löse die folgenden Gleichungssysteme mit dem Eliminationsverfahren:

(a)
$$\begin{aligned} \text{I:}&\quad 3x-2y-3z=16\\ \text{II:}&\quad x+y+z=7\\ \text{III:}&\quad 4x-3y+2z=13 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \text{I:}&\quad 5a+3b-2c=5\\ \text{II:}&\quad 9a-7b+8c=19\\ \text{III:}&\quad 5a+6b+6c=35 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} \text{I:}&\quad 2x_1+2x_2-3x_3=1\\ \text{II:}&\quad 5x_1+3x_2-4x_3=4\\ \text{III:}&\quad 7x_1-3x_2+2x_3=6 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} \text{I:}&\quad x-2y+3z=10\\ \text{II:}&\quad 7x-5y+6z=25\\ \text{III:}&\quad 3x-3y+4z=15 \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} \text{I:}&\quad x-2y+3z=10\\ \text{II:}&\quad 3x-5y+6z=25\\ \text{III:}&\quad -x+3z=0 \end{aligned}$$

(f)
$$\begin{aligned} \text{I:}&\quad -3x-y+4z=1\\ \text{II:}&\quad -2y+6z=7\\ \text{III:}&\quad 6x-4y+10z=19 \end{aligned}$$

(g)
$$\begin{aligned} \text{I:}&\quad 12x+9y-7z=28\\ \text{II:}&\quad 5x+4y-4z=20\\ \text{III:}&\quad 7x+5y-3z=18 \end{aligned}$$

(h)
$$\begin{aligned} \text{I:}&\quad 5u-2v=3\\ \text{II:}&\quad 3u+7w=17\\ \text{III:}&\quad 8v-9w=10 \end{aligned}$$

(i)
$$\begin{aligned} \text{I:}&\quad x-y=-1\\ \text{II:}&\quad x+z=6\\ \text{III:}&\quad y+z=7 \end{aligned}$$

(j)
$$\begin{aligned} \text{I:}&\quad a+b=c\\ \text{II:}&\quad a-b=1\\ \text{III:}&\quad 2b-c=1 \end{aligned}$$

(k)
$$\begin{aligned} \text{I:}&\quad 4x+3z=2\\ \text{II:}&\quad 7x-y+z=5\\ \text{III:}&\quad -x+3y+12z=-5 \end{aligned}$$

(l)
$$\begin{aligned} \text{I:}&\quad -6x-2y+z=1\\ \text{II:}&\quad 4x-5y+z=2\\ \text{III:}&\quad -19y+5z=3 \end{aligned}$$

10 Vektorrechnung:

10.1 Zweidimensionale Vektorrechnung:

A 10.1. Gib jeweils den Vektor $\overrightarrow{AB}$ und seine Länge an!

(a) $A(3|2),\ B(6|5)$
(b) $A(-1|2),\ B(3|-4)$
(c) $A(-1|-3),\ B(-1|0)$
(d) $A(0|0),\ B(4|3)$
(e) $A(0|-2),\ B(-2|0)$
(f) $A(-1|-1),\ B(-1|-1)$

A 10.2. Gib jeweils die Summe $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ und die Differenz $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ der beiden Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ an! Ermittle die Lösung durch Rechnung und durch eine Zeichnung!

(a) $\overrightarrow{a}=\binom{3}{-1},\ \overrightarrow{b}=\binom{2}{5}$
(b) $\overrightarrow{a}=\binom{0}{-2},\ \overrightarrow{b}=\binom{2}{2}$
(c) $\overrightarrow{a}=\binom{-2}{-2},\ \overrightarrow{b}=\binom{2}{2}$

A 10.3. Ermittle **(i)** die Koordinaten des Endpunktes E der Wanderung, **(ii)** die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{EA}$ für die Rückkehr von E zum Ausgangspunkt A der Wanderung, **(iii)** die Gesamtlänge der Wanderung (von A nach A)!

(a) $A(-2|1),\ \overrightarrow{AB}=\binom{1}{-3}, \overrightarrow{BC}=\binom{2}{1},\ \overrightarrow{CD}=\binom{1}{2},\ \overrightarrow{DE}=\binom{-1}{2}$
(b) $A(-3|1),\ \overrightarrow{AB}=\binom{0}{-4}, \overrightarrow{BC}=\binom{3}{2},\ \overrightarrow{CD}=\binom{2}{-1},\ \overrightarrow{DE}=\binom{1}{3}$

A 10.4. Berechne den Umfang der gegebenen Vielecke!

(a) $A(3|3),\ B(-2|2),\ C(-3|-3),\ D(3|-1)$
(b) $A(4|0),\ B(0|3),\ C(-5|0)$
(c) $A(4|0),\ B(2|4),\ C(-1|6),\ D(-3|-2),\ E(0|-4)$

A 10.5. Die folgenden Vielecke sollen durch den angegebenen Vektor $\overrightarrow{s}$ einer Schiebung unterworfen werden. Gib die neuen Koordinaten des jeweiligen Vielecks an!

(a) $A(4|0),\ B(2|2),\ C(-2|2),\ D(-4|0),\ \overrightarrow{s}=\binom{2}{-3}$
(b) $A(1|2),\ B(3|6),\ C(7|8),\ D(5|4),\ \overrightarrow{s}=\binom{1}{-1}$
(c) $A(0|0),\ B(3|4),\ C(-3|4),\ \overrightarrow{s}=\binom{0}{-2}$
(d) $A(0|0),\ B(4|-3),\ C(4|3),\ \overrightarrow{s}=\binom{2}{0}$
(e) $A(1|2),\ B(3|6),\ C(7|8),\ D(5|4),\ \overrightarrow{s}=\binom{-6}{-6}$

A 10.6. Ermittle die Koordinaten des fehlenden Eckpunktes und den Umfang des Parallelogramms $ABCD$! Verwende die Methode der Ortsvektoren!

(a) $A(1|-3),\ B(5|1),\ C(1|3)$
(b) $C(-1|-5),\ D(7|1),\ A(3|4)$
(c) $A(-4|1),\ B(5|-2),\ C(8|2)$
(d) $A(-1|-4),\ C(1|4),\ D(3|-2)$
(e) $B(2|-3),\ C(-10|2),\ D(-7|6)$
(f) $A(4|4),\ B(-8|-1),\ D(7|0)$
(g) $C(-3|-2),\ D(1|-4),\ B(1|2)$
(h) $A(-2|-1),\ B(2|3),\ D(0|-2)$

A 10.7. Überprüfe, ob die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ zueinander parallel sind!

(a) $A(4|2),\ B(-2|1),\ C(0|5),\ D(2|-2)$

(b) $A(1|2),\ B(3|4),\ C(0|0),\ D(1|2)$

(c) $A(0|1),\ B(1|0),\ C(0|0),\ D(1|2)$

(d) $A(-1|2),\ B(3|0),\ C(1|5),\ D(-5|2)$

(e) $A(1|-2),\ B(-3|4),\ C(3|2),\ D(-1|8)$

(f) $A(3|4),\ B(1|2),\ C(2|3),\ D(3|5)$

(g) $A(1|2),\ B(2|1),\ C(5|7),\ D(7|5)$

(h) $A(a|b),\ B(b|a),\ C(c|d),\ D(d|c)$

A 10.8. Ergänze die fehlende Koordinate so, dass die beiden Vektoren $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ zueinander parallel sind!

(a) $\overrightarrow{a} = \binom{1}{3},\ \overrightarrow{b} = \binom{3}{y_b}$

(b) $\overrightarrow{a} = \binom{0}{2},\ \overrightarrow{b} = \binom{0}{y_b}$

(c) $\overrightarrow{a} = \binom{2}{4},\ \overrightarrow{b} = \binom{x_b}{3}$

(d) $\overrightarrow{a} = \binom{5}{4},\ \overrightarrow{b} = \binom{x_b}{6}$

(e) $\overrightarrow{a} = \binom{3}{1},\ \overrightarrow{b} = \binom{1}{y_b}$

(f) $\overrightarrow{a} = \binom{0}{2},\ \overrightarrow{b} = \binom{x_b}{0}$

A 10.9. Gib jeweils den normierten Vektor $\overrightarrow{a_0}$ zum gegebenen Vektor $\overrightarrow{a}$ an!

(a) $\overrightarrow{a} = \binom{6{,}3}{1{,}6}$

(b) $\overrightarrow{a} = \binom{-7}{2{,}4}$

(c) $\overrightarrow{a} = \binom{9{,}9}{2}$

(d) $\overrightarrow{a} = \binom{1{,}2}{-3{,}5}$

(e) $\overrightarrow{a} = \binom{-1}{1}$

(f) $\overrightarrow{a} = \binom{3a}{-4a}$

A 10.10. Gib jeweils einen Vektor $\overrightarrow{b}$ an, der zum gegebenen Vektor $\overrightarrow{a}$ parallel ist, dieselbe Orientierung wie $\overrightarrow{a}$ und die Länge ℓ hat

(a) $\overrightarrow{a} = \binom{5}{-12},\ \ell = 26$

(b) $\overrightarrow{a} = \binom{-4}{-1},\ \ell = \sqrt{153}$

(c) $\overrightarrow{a} = \binom{2}{3},\ \ell = 10$

A 10.11. Gib zum Vektor $\overrightarrow{a}$ den **(i)** nach links, **(ii)** nach rechts gekippten Normalvektor an!

(a) $\overrightarrow{a} = \binom{2}{3}$

(b) $\overrightarrow{a} = \binom{-2}{3}$

(c) $\overrightarrow{a} = \binom{1}{-4}$

(d) $\overrightarrow{a} = \binom{1}{4}$

(e) $\overrightarrow{a} = \binom{0}{2}$

(f) $\overrightarrow{a} = \binom{2}{0}$

(g) $\overrightarrow{a} = \binom{1}{-2}$

(h) $\overrightarrow{a} = \binom{-1}{2}$

A 10.12. Ergänze die fehlende Koordinate des Vektors $\overrightarrow{b}$ so, dass der Vektor $\overrightarrow{b}$ auf $\overrightarrow{a}$ normal steht!

(a) $\overrightarrow{a} = \binom{2}{3},\ \overrightarrow{b} = \binom{-6}{y_b}$

(b) $\overrightarrow{a} = \binom{4}{-3},\ \overrightarrow{b} = \binom{x_b}{8}$

(c) $\overrightarrow{a} = \binom{-1}{3},\ \overrightarrow{b} = \binom{-9}{y_b}$

(d) $\overrightarrow{a} = \binom{2}{0},\ \overrightarrow{b} = \binom{x_b}{3}$

(e) $\overrightarrow{a} = \binom{3}{2},\ \overrightarrow{b} = \binom{-6}{y_b}$

(f) $\overrightarrow{a} = \binom{-3}{2},\ \overrightarrow{b} = \binom{x_b}{-6}$

A 10.13. Gib jeweils **(i)** einen linksgekippten **(ii)** einen rechtsgekippten Normalvektor zum Vektor $\overrightarrow{a}$ an, der die Länge ℓ hat

(a) $\overrightarrow{a} = \binom{5}{-12},\ \ell = 26$

(b) $\overrightarrow{a} = \binom{-4}{-1},\ \ell = \sqrt{153}$

(c) $\overrightarrow{a} = \binom{2}{3},\ \ell = 10$

A 10.14. Von einem in positivem Umlaufsinn beschrifteten Quadrat *ABCD* kennt man die Endpunkte einer Seite. Ermittle die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte unter Verwendung von Ortsvektoren! (Fertige eine Skizze an!)

(a) $A(-1|-1),\ B(3|-2)$
(b) $B(-4|2),\ C(0|-1)$
(c) $C(-3|-1),\ D(3|3)$
(d) $A(-2|0),\ D(3|0)$
(e) $A(3|0),\ B(0|2)$
(f) $C(0|0),\ B(3|-2)$

A 10.15. Von einem in positivem Umlaufsinn beschrifteten Quadrat *ABCD* kennt man einen Eckpunkt und den Mittelpunkt.
Fertige eine Strategieskizze an und berechne die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte mit der Methode der Ortsvektoren!

(a) $A(-2|0),\ M(2|2)$
(b) $B(0|-1),\ M(2|3)$
(c) $C(-3|-3),\ M(0|0)$
(d) $D(-3|0),\ M(0|0)$
(e) $A(3|0),\ M(0|2)$
(f) $A(4|7),\ M(4|4)$

A 10.16. Berechne die Winkel in den gegebenen Dreiecken:

(a) $A(1|2),\ B(0|5),\ C(-2|-4)$
(b) $A(0|0),\ B(-1|2),\ C(-5|0)$
(c) $A(-1|8),\ B(-3|-1),\ C(2|0)$
(d) $A(2|-1),\ B(2|2),\ C(-3|-1)$

A 10.17. Trage die angegebene Strecke ℓ von A aus in Richtung des Vektors $\overrightarrow{v}$ ab und gib die Koordinaten des entstehenden Punktes B an!

(a) $A(3|2),\ \overrightarrow{v}=\binom{3}{4},\ \ell=10$
(b) $A(1|2),\ \overrightarrow{v}=\binom{-1}{1},\ \ell=3$
(c) $A(-2|-2),\ \overrightarrow{v}=\binom{-11{,}7}{-4{,}4},\ \ell=5$
(d) $A(3|-2),\ \overrightarrow{v}=\binom{3a}{-4a},\ \ell=10$
(e) $A(-1|3),\ \overrightarrow{v}=\binom{6{,}3}{-1{,}6},\ \ell=13$
(f) $A(1|-4),\ \overrightarrow{v}=\binom{9{,}9}{-2},\ \ell=10{,}1$

A 10.18. Berechne die Koordinaten des Halbierungspunktes der gegebenen Strecke!

(a) $A(1|2),\ B(5|6)$
(b) $P(-3|5),\ Q(3|3)$
(c) $R(0|0),\ S(-4|4)$

A 10.19. Von einem in positivem Umlaufsinn beschrifteten Rechteck *ABCD* kennt man die Endpunkte einer Seite und die Länge der anderen Seite. Ermittle die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte und des Mittelpunktes des Rechtecks unter Verwendung von Ortsvektoren!

(a) $A(-1|3),\ B(-1|5),\ b=1$
(b) $B(2|3),\ C(5|-1),\ a=10$
(c) $C(-3|2),\ D(2|-10),\ b=13$
(d) $D(0|1),\ A(1|1),\ a=3$
(e) $A(-2|1),\ B(4|-7),\ b=5$
(f) $B(2|0),\ C(4{,}4|-1),\ a=5{,}2$
(g) $C(-1|4),\ D(5{,}3|2{,}4),\ b=13$
(h) $D(5|1),\ A(-6{,}7|-3{,}4),\ a=10$

A 10.20. Von einem Quadrat $ABCD$ kennt man die Koordinaten zweier diagonal gegenüberliegender Eckpunkte. Fertige eine Strategieskizze an und berechne die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte mit der Methode der Ortsvektoren!

(a) $A(-3|-7),\ C(5|3)$
(b) $D(5|-2),\ B(-3|4)$
(c) $A(-1|4),\ C(7|-2)$
(d) $B(4|-6),\ D(-2|2)$
(e) $B(-1|-1),\ D(1|1)$
(f) $B(-4|0),\ D(4|-2)$

A 10.21. Berechne bei den folgenden Rauten ABCD mit Diagonalenschnittpunkt M die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte unter Verwendung von Ortsvektoren!

(a) $B(3|-3),\ M(-1|0),\ e=\overline{AC}=12{,}5$
(b) $A(-1|3),\ C(7|-1),\ f=\overline{BD}=\sqrt{20}$

A 10.22. Gib die Koordinaten jenes Punktes T an, der die Strecke AB im angegebenen Verhältnis δ teilt!

(a) $A(-5|9),\ B(9|2),\ \delta=2:5$
(b) $A(-3|5),\ B(9|11),\ \delta=2:1$
(c) $A(-18|3),\ B(6|-9),\ \delta=7:5$
(d) $A(3|-4),\ B(8|6),\ \delta=2:3$
(e) $A(-5|9),\ B(9|2),\ \delta=3:4$
(f) $A(-3|5),\ B(9|11),\ \delta=3:1$

A 10.23. Gib eine Gleichung jener Geraden an, auf der die beiden Punkte P und Q liegen. **(i)** in Parameterform, **(ii)** in Normalvektorform, **(iii)** in allgemeiner Form **(iv)** in Hauptform (falls möglich)

(a) $P(1|2),\ Q(5|7)$
(b) $P(0|-4),\ Q(4|1)$
(c) $P(3|2),\ Q(3|1)$
(d) $P(-4|5),\ Q(1|5)$
(e) $P(0|0),\ Q(-3|-4)$
(f) $P(9|-1),\ Q(3|-1)$

A 10.24. Untersuche, ob der gegebene Punkt auf der Geraden g liegt!

$$g:\ \overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$$

(a) $P(1|0)$
(b) $Q(-2|1)$
(c) $R(-5|9)$
(d) $S(2|-1{,}5)$
(e) $T(-3|-6)$
(f) $U(0|-1)$
(g) $V(-6|4)$
(h) $W(-3|6)$

A 10.25. Überprüfe, ob die drei Punkte P, Q und R auf einer Geraden liegen!

(a) $P(3|1),\ Q(2|-1),\ R(-1|-4)$
(b) $P(-1|1),\ Q(5|-3),\ R(-7|5)$
(c) $P(-5|7),\ Q(-3|1),\ R(0|-8)$
(d) $P(0|4),\ Q(4|0),\ R(2|1)$

A 10.26. Untersuche, wie die beiden Gerade g und h zueinander liegen. Berechne gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes S und den Schnittwinkel φ der beiden Geraden!

(a) $g:\ x+y=6,\qquad h:\ \overrightarrow{X}=\binom{1}{0}+s\cdot\binom{1}{-1}$

(b) $g: \overrightarrow{X} = \binom{3}{5} + t \cdot \binom{1}{2}$, $\quad h: y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$
(c) $g: \overrightarrow{X} = \binom{-2}{-2} + r \cdot \binom{1}{1}$, $\quad h: \overrightarrow{X} = \binom{-2}{1} + s \cdot \binom{-1}{1}$
(d) $g: -3x + 2y = -5$, $\quad h: x + 4y - 17 = 0$
(e) $g: \overrightarrow{X} = \binom{3}{3} + d \cdot \binom{3}{-3}$, $\quad h: y = -x + 2$
(f) $g: y = -2x + 9$, $\quad h: 4x + 2y - 18 = 0$
(g) $g: y = 2x + 4$, $\quad h: \overrightarrow{X} = \binom{0}{4} + s \cdot \binom{-4}{-8}$
(h) $g: \overrightarrow{X} = \binom{1}{3} + t \cdot \binom{-2}{3}$, $\quad h: \overrightarrow{X} = \binom{2}{4} + k \cdot \binom{3}{2}$

A 10.27. Ermittle die Hauptform jener Geraden

i. h_1 die parallel zur Geraden g und durch den Punkt Q verläuft.
ii. h_2 die normal auf die Gerade g steht den Punkt Q enthält.
iii. Ermittle den Normalabstand des Punktes Q von der Geraden g!

(a) $g: \overrightarrow{X} = \binom{2}{-2} + t \cdot \binom{-1}{2}$, $Q(3|2)$
(b) $g: x + 6y = -17$, $Q(0|0)$
(c) $g: y = 2x - 9$, $Q(1|-1)$
(d) $g: \binom{2}{-3} \cdot \binom{x}{y} = -3$, $Q(2|-4)$
(e) $g: \overrightarrow{X} = \binom{1}{-1} + t \cdot \binom{3}{-1}$, $Q(5|1)$
(f) $g: \overrightarrow{X} \cdot \binom{1}{-2} = 1$, $Q(3|0)$

A 10.28. Ermittle die Streckensymmetrale auf die Punkte A und B!

(a) $A(1|4), B(3|-2)$
(b) $A(2|4), B(2|7)$
(c) $A(-1|0), B(0|0)$
(d) $A(-3|-2), B(5|-2)$
(e) $A(0|0), B(3|2)$
(f) $A(1|1), B(-1|-1)$

A 10.29. Ermittle die Koordinaten des Inkreismittelpunkts des Dreiecks ABC!

(a) $A(1|1), B(25|1), C(13|10)$
(b) $A(-1|-1), B(23|-1), C(11|47)$
(c) $A(-11|-4), B(14|-4), C(-4|-16)$
(d) $A(0|-2), B(12|7), C(0|12)$
(e) $A(1|1), B(9|9), C(-5|43)$
(f) $A(0|0), B(11|11), C(4|28)$

A 10.30. Ermittle
(i) den Schwerpunkt des Dreiecks ABC als Schnittpunkt der Schwerlinien
(ii) den Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC!
(iii) den Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC!
(iV) die Eulersche Gerade des Dreiecks ABC!

(a) $A(-9|6), B(18|15), C(15|-16)$
(b) $A(1|2), B(13|14), C(-11|8)$
(c) $A(-2|-5), B(10|4), C(-2|9)$
(d) $A(5|5), B(5|-9), C(-7|-4)$
(e) $A(4|1), B(5|0), C(5|-2)$
(f) $A(4|-9), B(6|-1), C(6|-3)$

A 10.31. Ermittle die Längen der Höhen der Dreiecke ABC aus Aufgabe A 10.30 mit der Hesseschen Normalform!

A 10.32. Ermittle den Flächeninhalt der Dreiecke ABC aus Aufgabe A 10.30!

10.2 Dreidimensionale Vektorrechnung:

A 10.33. Untersuche, ob die drei Punkte A, B und C auf einer Geraden liegen!

(a) $A(4|5|-1)$, $B(0|-2|6)$, $C(-4|-9|12)$
(b) $A(0|5|1)$, $B(0|0|-3)$, $C(0|10|5)$
(c) $A(1|2|-6)$, $B(2|2|1)$, $C(0|2|-13)$
(d) $A(7|5|2)$, $B(10|9|7)$, $C(16|17|17)$

A 10.34. Untersuche, welche Lage die beiden Geraden g und h zueinander haben und ermittle gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunkts und den Schnittwinkel der beiden Geraden!

(a) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$ h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

(b) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -11 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(c) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 18 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix}$

(d) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix}$ h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

(e) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$ h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 19 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \\ -5 \end{pmatrix}$

(f) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$

(g) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$

(h) g: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$ h: $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix}$

A 10.35. **(i)** Ermittle, ob das Dreieck ABC rechtwinkelig ist! **(ii)** Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC! **(iii)** Berechne die Länge der Höhen des Dreiecks ABC **(iv)** Ermittle die Koordinaten des Schwerpunkts!

(a) $A(-2|-1|1)$, $B(-5|2|4)$, $C(-1|1|3)$
(b) $A(2|1|0)$, $B(2|-3|-4)$, $C(1|-1|-2)$
(c) $A(4|2|1)$, $B(13|6|5)$, $C(7|8|2)$
(d) $A(1|2|3)$, $B(4|5|3)$, $C(3|3|5)$

A 10.36. Gib die Gleichung jener Ebene an, auf der das Dreieck $\triangle ABC$ liegt! Gib die Ebenengleichung **(i)** in Parameterdarstellung **(ii)** in Normalvektorform **(iii)** als allgemeine Ebenengleichung an!

(a) $A(2|1|4)$, $B(1|0|0)$, $C(5|2|1)$
(b) $a(0|0|0)$, $B(2|3|4)$, $C(-2|4|1)$
(c) $A(0|2|3)$, $B(4|4|3)$, $C(6|2|5)$
(d) $A(3|2|-1)$, $B(0|0|0)$, $C(4|2|5)$

A 10.37. Gib die allgemeine Gleichung und die Normalvektorform der Ebene

$$\varepsilon:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\2\\8\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

an und überprüfe, ob die folgenden Punkte auf der Ebene ε liegen:

(a) $R_1(3|-1|3)$ (b) $R_2(2|1|4)$ (c) $R_3(4|0|3)$ (d) $R_4(0|0|0)$

A 10.38. Der Punkt P_j liegt auf der Ebene ε. Ergänze die fehlende Koordinate!

$$\varepsilon:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\2\\8\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

(a) $P_1(5|18|z_p)$ (b) $P_2(5|14|z_p)$ (c) $P_3(x_p|10|15)$ (d) $P_4(x_p|10|6)$

A 10.39. Gib eine Gleichung jener Ebene an, auf der die Gerade g und der Punkt S liegen!

(a) $g:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix},\quad S(0|9|5)$

(b) $g:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}7\\8\\-1\end{pmatrix},\quad S(3|0|8)$

A 10.40. Gib die Gleichung jener Normalebene zur Geraden h an, welche den Punkt Q enthält!

(a) $h:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix},\quad Q(4|0|7)$

(b) $h:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\5\\3\end{pmatrix},\quad Q(2|8|0)$

A 10.41. Gib eine Gleichung jener Ebene an, auf der die beiden schneidenden Geraden g und h liegen!

(a) $g:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix},\qquad h:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$

(b) $g:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\9\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix},\qquad h:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\9\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}$

A 10.42. Gib eine Gleichung jener Ebene an, die durch den Punkt P geht und zu den Geraden g und h parallel ist!

(a) $P(1|2|3),\quad g:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix},\qquad h:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

(b) $P(2|1|5)$, $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$, $h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$

A 10.43. Ermittle Gleichungen jener Ebenen, die zur Ebene ε parallel sind mit Abstand d!

(a) $\varepsilon:\ 4x-8y+z=2, \quad d=18$

(b) $\varepsilon:\ 6x-3y+2z=-4, \quad d=7$

(c) $\varepsilon:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}, \quad d=10$

(d) $\varepsilon:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}8\\0\\-3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}5\\-1\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-5\\1\\0\end{pmatrix}, \quad d=3$

A 10.44. Gib eine Gleichung jener Geraden an, die durch den Punkt P geht und auf die Ebene ε normal steht!

(a) $P(3|4|-1)$, $\varepsilon:\ 3x-y+z=5$

(b) $P(5|2|-3)$, $\varepsilon:\ x-3z=7$

(c) $P(3|0|0)$, $\varepsilon:\ x=6$

(d) $P(0|0|0)$, $\varepsilon:\ 2x-y+\frac{z}{2}=0$

(e) $P(2|8|0)$, $\varepsilon:\ 4x+y-z=4$

(f) $P(4|8|3)$, $\varepsilon:\ y-5z=8$

A 10.45. Gib eine Ebenengleichung der Streckensymmetralebene σ der Strecke AB an!

(a) $A(2|4|-3)$, $B(8|6|9)$

(b) $A(4|0|3)$, $B(0|4|3)$

(c) $A(1|-2|0)$, $B(0|1|-1)$

(d) $A(5|0|0)$, $B(5|4|2)$

(e) $A(-2|-3|5)$, $B(8|-1|1)$

(f) $A(0|3|-1)$, $B(0|-1|3)$

A 10.46. Gib eine Gleichung jener Geraden f an, welche durch den Punkt P geht und zu der von den Geraden g und h aufgespannten Ebene normal steht!

(a) $g:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\7\end{pmatrix}$, $h:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$, $P(4|9|9)$

(b) $g:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$, $h:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$, $P(3|-2|3)$

(c) $g:\ \overrightarrow{X} = t \cdot \begin{pmatrix}12\\-4\\6\end{pmatrix}$, $h:\ \overrightarrow{X} = s \cdot \begin{pmatrix}30\\15\\5\end{pmatrix}$, $P(-1|0|2)$

A 10.47. Gib an, welche Lage die Gerade g zur Ebene ε hat und ermittle gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes und den Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene!

(a) $g:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}8\\4\\1\end{pmatrix}$ $\quad \varepsilon:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}5\\1\\-3\end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix}6\\2\\1\end{pmatrix} + \ell \cdot \begin{pmatrix}6\\5\\-3\end{pmatrix}$

(b) $g:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ $\quad \varepsilon:\ x-y=4$

(c) $g:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\-5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}6\\2\\3\end{pmatrix}$ $\quad \varepsilon:\ 3x+12y-4z=-4$

(d) $g:\ \overrightarrow{X} = t\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$ $\quad\varepsilon:\ 13x+3y-2z=2$

(e) $g:\ \overrightarrow{X} = t\cdot\begin{pmatrix}14\\2\\-5\end{pmatrix}$ $\quad\varepsilon:\ 6x-7y+6z=40$

(f) $g:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}$ $\quad\varepsilon:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}-2\\1\\8\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}+\ell\cdot\begin{pmatrix}5\\3\\-3\end{pmatrix}$

(g) $g:\ \overrightarrow{X} = t\cdot\begin{pmatrix}6\\6\\-7\end{pmatrix}$ $\quad\varepsilon:\ 2x-15y-5z=43$

(h) $g:\ \overrightarrow{X} = t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ $\quad\varepsilon:\ 3x+17y-z=0$

A 10.48. In welchem Punkt schneidet die Ebene ε **(i)** die $x-$Achse, **(ii)** die $y-$Achse, **(iii)** die $z-$Achse?

(a) $\varepsilon:\ 2x+y-z=7$

(b) $\varepsilon:\ 7x-4y+4z=8$

A 10.49. In welchem Punkt schneidet die Gerade g **(i)** die $xy-$Ebene, **(ii)** die $xz-$Ebene, **(iii)** die $yz-$Ebene?

(a) $g:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}6\\3\\-4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$

(b) $g:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}3\\8\\12\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\6\end{pmatrix}$

A 10.50. **(i)** Spiegle den Punkt T an der Ebene ε!
(ii) Spiegle die Ebene ε am Punkt T!
(iii) Berechne den Normalabstand des Punktes T von der Ebene ε!
Fertige eine Skizze an, die Deine Lösungsstrategie demonstriert!

(a) $T(5|5|-2),\quad \varepsilon:\ 2x+4y-z=-10$

(b) $T(5|1|7),\quad \varepsilon:\ 4x+y=38$

(c) $T(2|4|3),\quad \varepsilon:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}7\\-1\\8\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}+\ell\begin{pmatrix}-6\\5\\3\end{pmatrix}$

(d) $T(3|0|5),\quad \varepsilon:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-5\\4\end{pmatrix}$

A 10.51. **(i)** Spiegle den Punkt Q an der Geraden g
(ii) Spiegle die Gerade g am Punkt Q
(iii) Gib den Normalabstand des Punktes Q von der Geraden g an!
Fertige eine Skizze an, die Deine Lösungsstrategie demonstriert!

(a) $Q(1|2|3),\ g:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$

(b) $Q(3|2|5),\ g:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}6\\6\\7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

(c) $Q(5|4|3),\ g:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}0\\-11\\18\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}$

(d) $Q(-1|2|5),\ g:\ \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix}1\\5\\11\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix}$

A 10.52. Bestimme, wie die beiden Ebenen liegen, gib gegebenenfalls die Schnittgerade der beiden Ebenen an und berechne den Winkel, unter dem die Ebenen schneiden!

(a) $\varepsilon_1: 2x+3y+4z=0$
$\varepsilon_2: 3x-y+5z=0$

(b) $\varepsilon_1: 4x-3y+5z=8$
$\varepsilon_2: 2x+3y+z=4$

(c) $\varepsilon_1: 2x-y+z=5$
$\varepsilon_2: -4x+2y-2z=-10$

(d) $\varepsilon_1: 15x-8y+7z=10$
$\varepsilon_2: 5x+6y-2z=14$

(e) $\varepsilon_1: 4x+2y+5z=6$
$\varepsilon_2: 8x+4y+5z=10$

(f) $\varepsilon_1: 8y-3z=11$
$\varepsilon_2: 7y+2z=9$

(g) $\varepsilon_1: -x+2y-3z=6$
$\varepsilon_2: 3x-6y+9z=-18$

(h) $\varepsilon_1: 3x-y+2z=0$
$\varepsilon_2: 5x+y-7z=0$

(i) $\varepsilon_1: 4x-10y+2z=6$
$\varepsilon_2: -6x+15y-3z=1$

A 10.53. Bestimme, wie die drei Ebenen ε_1, ε_2 und ε_3 liegen und fertige eine Skizze an, die die Lage zeigt. Gegebenenfalls sind Schnittpunkt bzw. Schnittgerade zu bestimmen.

(a) $\varepsilon_1: x-3y+z=7$
$\varepsilon_2: 2x-z=11$
$\varepsilon_3: 4y-3z=1$

(b) $\varepsilon_1: 4x-3y+2z=-10$
$\varepsilon_2: 2x+9y-4z=12$
$\varepsilon_3: -6x-15y+8z=-8$

(c) $\varepsilon_1: x-8y-14z=3$
$\varepsilon_2: 2x-6y-3z=1$
$\varepsilon_3: -3x+4y-8z=1$

(d) $\varepsilon_1: 3x-5y+2z=-30$
$\varepsilon_2: -9x+3y-8z=10$
$\varepsilon_3: 6x-y+4z=3$

(e) $\varepsilon_1: 6x-4y+5z=10$
$\varepsilon_2: 5x-3y+2z=8$
$\varepsilon_3: -6x+4y-5z=-12$

(f) $\varepsilon_1: 3x-y-z=4$
$\varepsilon_2: x+y-2z=5$
$\varepsilon_3: 9x+y-4z=23$

(g) $\varepsilon_1: x+y+z=2$
$\varepsilon_2: 3x-y+z=-1$
$\varepsilon_3: -5x+y-2z=4$

(h) $\varepsilon_1: 3x-y+4z=6$
$\varepsilon_2: 2x+3y+z=6$
$\varepsilon_3: 4x-5y+7z=8$

(i) $\varepsilon_1: -3x+y-z=2$
$\varepsilon_2: x-y+2z=1$
$\varepsilon_3: -7x+y+z=8$

A 10.54. Ermittle die Länge jeder Höhe des Dreiecks ABC!

(a) $A(1|1)$, $B(8|25)$, $C(26|1)$

(b) $A(2|3|0)$, $B(14|-3|4)$, $C(10|6|5)$

(c) $A(-1|1)$, $B(19|16)$, $C(19|-14)$

(d) $A(1|0|-4)$, $B(5|12|2)$, $C(9|3|1)$

A 10.55. Ermittle den Abstand der beiden parallelen Ebenen:

(a) $\varepsilon_1: -2x+2y-z=-1$
$\varepsilon_2: 4x-4y+2z=56$

(b) $\varepsilon_1: x-2y+2z=3$
$\varepsilon_2: x-2y+2z=15$

A 10.56. Ermittle den Abstand zwischen den beiden parallelen Geraden g und h!

(a) $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(c) $g: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad h: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

A 10.57. Berechne **(i)** die Höhe, **(ii)** das Volumen, **(iii)** die Oberfläche des Tetraeders $ABCD$!

(a) $A(1|2|1), B(7|10|1), C(-3|6|3), D(2|3|9)$

(b) $A(5|-2|4), B(6|4|0), C(-2|-3|1), D(0|0|9)$