Kapitel 4

Komplexe Zahlen

Wenn wir uns auf die reellen Zahlen beschränken, ist die Operation des Wurzelziehens (also die Umkehrung der Potenzierung) nicht immer möglich. Zum Beispiel können wir nicht die Quadratwurzel einer negativen Zahl ziehen. Für die quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten beispielsweise

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{4.1}$$

existieren die reellen Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{4.2}$$

nur dann, wenn das Argument der Wurzel nicht negativ ist, das heißt wenn gilt $b^2 \geq 4ac$. Wir können den Zahlenraum jedoch so erweitern, dass algebraische Gleichungen wie die quadratische Gleichung (**??**) immer eine Lösung haben. Diesen erweiterten Raum nennen wir die komplexen Zahlen und werden sehen, dass dieser Übergang von den reellen zu den komplexen Zahlen dem Übergang von der Zahlengerade $\mathbb{R}$ zu der Zahlenebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ entspricht. Für komplexe Zahlen lassen sich Rechenoperationen so definieren, dass alle für die Operationen mit reellen Zahlen geltenden Gesetze in Kraft bleiben. Die reellen Zahlen sind dann als Spezialfall in den komplexen Zahlen enthalten. Komplexe Zahlen spielen in der gesamten Physik eine äußerst wichtige Rolle und wir werden uns im Folgenden mit der Definition und den Rechenregeln für komplexe Zahlen beschäftigen.

4.1 Definition und Darstellung

Zur Erweiterung der reellen Zahlen führen wir **imaginäre Zahlen** ein. Dazu definieren wir die **imaginäre Einheit** als die Zahl i, deren Quadrat -1 ergibt:

$$i^2 = -1 \qquad \text{(oder, mathematisch etwas salopp ausgedrückt, } i = \sqrt{-1}\text{).} \tag{4.3}$$

(Die Wurzel aus einer negativen Zahl können wir eigentlich nicht ziehen. Wir tun jetzt aber "so als ob" und wir werden sehen, dass wir damit sehr weit kommen.) Wir können jetzt formal die Wurzel aus einer negativen Zahl ziehen, z.B.

$$\sqrt{-5} = \sqrt{5 \cdot (-1)} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{5}i. \tag{4.4}$$

Die Wurzel aus einer negativen reellen Zahl ist eine imaginäre Zahl. Eine **imaginäre Zahl** setzt sich aus der imaginären Einheit i und einer reellen Zahl y zusammen:

$$yi. \tag{4.5}$$

Wie die reellen Zahlen lassen sich auch die imaginären Zahlen auf einem Zahlenstrahl darstellen (siehe Abb. **??**).

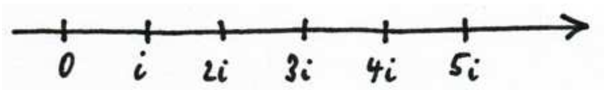

Abbildung 4.1: Zahlenstrahl für die imaginären Zahlen.

Höhere Potenzen der imaginären Einheit ergeben imaginäre oder reelle Zahlen:

$$i^2 = -1, \tag{4.6}$$
$$i^3 = i^2 i = -1i = -i, \tag{4.7}$$
$$i^4 = i^2 i^2 = -1 \cdot -1 = 1, \tag{4.8}$$
$$i^5 = i^4 \cdot i = i, \tag{4.9}$$

usw.

Die Zusammensetzung einer reellen Zahl x und einer imaginären Zahl iy (y reell) nennt man eine **komplexe Zahl**:

$$z = x + iy. \tag{4.10}$$

Solche komplexen Zahlen ergeben sich bei der Lösung quadratischer Gleichungen. Zum Beispiel hat die Gleichung

$$x^2 - 4x + 29 = 0 \tag{4.11}$$

die komplexen Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{+4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 29}}{2} = 2 \pm \sqrt{-25} = 2 \pm 5\sqrt{-1} = 2 \pm 5i. \tag{4.12}$$

Die Darstellungsform $z = x + iy$ bezeichnet man auch als **Normalform** oder **kartesische Darstellung** einer komplexen Zahl. In dieser Darstellungsform nennt man

$x = \Re(z)$ den **Realteil** der komplexen Zahl z und

$y = \Im(z)$ den **Imaginärteil**.

Gebräuchlich ist auch die Notation $x = \mathrm{Re}(z)$ und $y = \mathrm{Im}(z)$. Sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil einer komplexen Zahl sind reelle Zahlen (obwohl die Bezeichnung Imaginärteil das Gegenteil suggeriert).

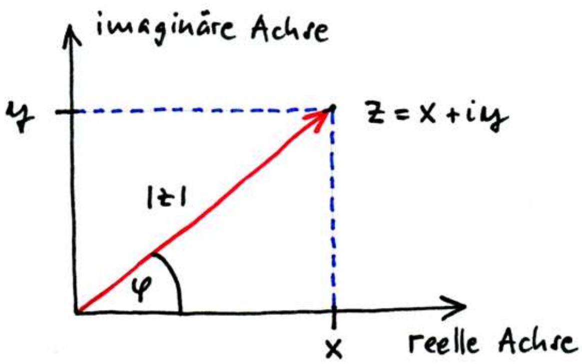

Abbildung 4.2: Graphische Darstellung einer komplexen Zahl in der Gaußschen Zahlenebene.

Graphisch kann man komplexe Zahlen in der **Gaußschen Zahlenebene** darstellen (siehe Abb. **??**). Dabei wird der Realteil $\Re(z)$ der komplexen Zahl $z = x + iy$ auf der x-Achse aufgetragen und der Imaginärteil $\Im(z)$ auf der y-Achse (genauso wie wir es für die Komponenten eines Vektors $\vec{r} = (x, y)$ getan haben). Im Fall der komplexen Zahlen bezeichnen wir die x-Achse als die **reelle**

Achse und die y-Achse als die **imaginäre Achse**. Eine komplexe Zahl z entspricht also einem Punkt $P(x, y)$ und somit einem Ortsvektor $\vec{r} = (x, y)$ in der Gaußschen Zahlenebene.
Alternativ zur kartesischen Darstellung kann man für komplexe Zahlen auch die so genannte **trigonometrische Darstellung** verwenden. In dieser Darstellung beschreiben wir die komplexe Zahl $z = x+iy$ durch den Winkel φ zwischen der reellen Achse und dem Ortsvektor $\vec{r}$ und dem Abstand des Punktes $P(x, y)$ vom Ursprung der Gaußschen Zahlenebene. Dies entspricht der Darstellung des Punktes $P(x, y)$ in Polarkoordinaten. Der Abstand von $P(x, y)$ vom Ursprung, oder **Betrag** $|z|$ der komplexen Zahl, ergibt sich durch Anwendung des Satzes von Pythagoras:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\Re^2(z) + \Im^2(z)}. \tag{4.13}$$

Für den Winkel φ, auch **Phasenwinkel** genannt, gilt:

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} = \arctan \frac{\Im(z)}{\Re(z)}. \tag{4.14}$$

Umgekehrt lauten die Transformationsgleichungen von der trigonometrischen zur kartesischen Darstellung:

$$\Re(z) = x = |z| \cos \varphi, \tag{4.15}$$

$$\Im(z) = y = |z| \sin \varphi. \tag{4.16}$$

Somit kann die komplexe Zahl z auch geschrieben werden als:

$$z = |z| \cos \varphi + i|z| \sin \varphi \quad \text{oder} \quad z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi). \tag{4.17}$$

4.2 Rechenregeln für komplexe Zahlen

Die komplexen Zahlen enthalten die reellen Zahlen als einen Spezialfall. Setzen wir nämlich in der komplexen Zahl $z = x + iy$ den Imaginärteil y gleich 0, erhalten wir die reelle Zahl x und wir beschränken uns dadurch auf die reelle Achse der Gaußschen Zahlenebene. Die Rechenregeln für komplexe Zahlen sollten also so definiert sein, dass sie für diesen Spezialfall in die üblichen Rechenregeln für die reellen Zahlen übergehen. Wie wir im Folgenden sehen werden, lässt sich dies erreichen, indem man einfach die üblichen algebraischen Rechenregeln anwendet und dabei beachtet, dass $i^2 = -1$.
Zunächst definieren wir zwei komplexe Zahlen $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ als **gleich**, wenn sie sowohl in ihrem Realteil als auch in ihrem Imaginärteil übereinstimmen. Das heißt:

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad \Re(z_1) = \Re(z_2) \quad \text{und} \quad \Im(z_1) = \Im(z_2). \tag{4.18}$$

Eine komplexe Zahl $z = x + iy$ ist **Null**, wenn sowohl ihr Realteil als auch ihr Imaginärteil verschwinden:

$$z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Re(z) = 0 \quad \text{und} \quad \Im(z) = 0. \tag{4.19}$$

4.2.1 Addition und Subtraktion

Zwei komplexe Zahlen $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ werden addiert bzw. subtrahiert, indem man ihre reellen und imaginären Anteile jeweils getrennt voneinander addiert bzw. subtrahiert:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \tag{4.20}$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \tag{4.21}$$

Dies entspricht der komponentenweisen Addition bzw. Subtraktion der zugehörigen Vektoren in der Gaußschen Zahlenebene. Wie aus Abb. **??** ersichtlich ist, können wir graphisch die Addition und Subtraktion von komplexen Zahlen durch passendes Aneinanderhängen der zugehörigen Vektoren durchführen. Addition und Subtraktion von komplexen Zahlen funktionieren analog zur Addition und Subtraktion der zugehörigen zweidimensionalen Vektoren.

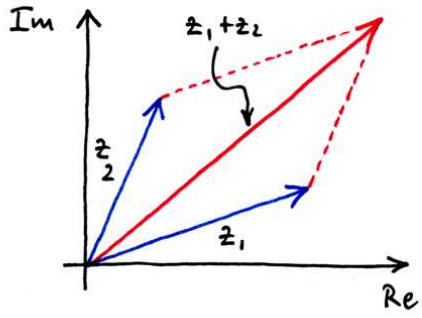

Abbildung 4.3: Addition der komplexen Zahlen z_1 und z_2.

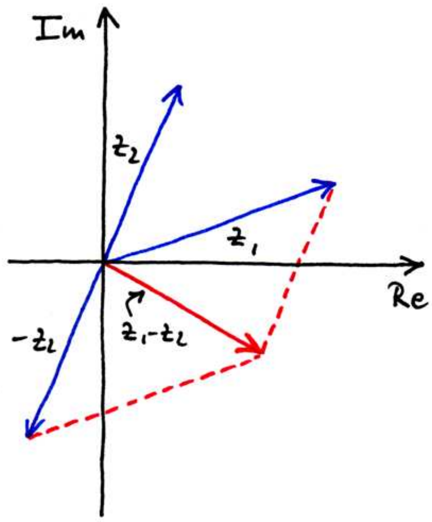

Abbildung 4.4: Subtraktion der komplexen Zahl z_2 von der komplexen Zahl z_1.

Beispiel:

$$(4+3i)+(6-2i) = (4+6)+(3+(-2))i = 10+i, \tag{4.22}$$
$$(4+3i)-(6-2i) = (4-6)+(3-(-2))i = -2+5i. \tag{4.23}$$

Die Addition von komplexen Zahlen ist **assoziativ**,

$$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3=z_1+z_2+z_3, \tag{4.24}$$

und **kommutativ**,

$$z_1+z_2=z_2+z_1. \tag{4.25}$$

Weiters existiert das **neutrale Element** 0, sodass

$$z+0=z \quad (0=0+i0), \tag{4.26}$$

und das **inverse Element** z_{inv}, sodass

$$z+z_{\text{inv}}=0. \tag{4.27}$$

Für die komplexe Zahl $z=x+iy$ ist die inverse komplexe Zahl $z_{\text{inv}}=-z=-x-iy$. Die Subtraktion $z=z_1-z_2$ kann also aufgefasst werden als die Addition von z_1 mit dem inversen Element der Zahl z_2, $z=z_1+(-z_2)$.

4.2.2 Multiplikation einer komplexen Zahl mit einer reellen Zahl

Die **Multiplikation** einer komplexen Zahl z mit einer **reellen Zahl** a kann als eine wiederholte Addition aufgefasst werden:

$$az=a(x+iy)=ax+iay. \tag{4.28}$$

Beispiel:

$$2z=2(x+iy)=2x+2iy. \tag{4.29}$$

Diese Operation entspricht also der Multiplikation des entsprechenden Vektors in der Gaußschen Zahlenebene mit einem Skalar (siehe Abb. **??**).

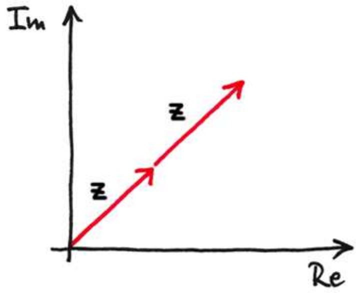

Abbildung 4.5: Multiplikation einer komplexen Zahl mit einer reellen Zahl.

4.2.3 Komplex konjugierte Zahl

Für eine komplexe Zahl $z = x + iy$ lässt sich durch Umkehrung des Vorzeichens des Imaginärteils die **komplex konjugierte** Zahl z^* definieren:

$$z^* = x - iy. \tag{4.30}$$

Wir verwenden auch oft die Notation $\overline{z}$ für die komplex konjugierte Zahl. Graphisch erhält man die komplex konjugierte Zahl durch Spiegelung des zugehörigen Vektors an der reellen Achse.

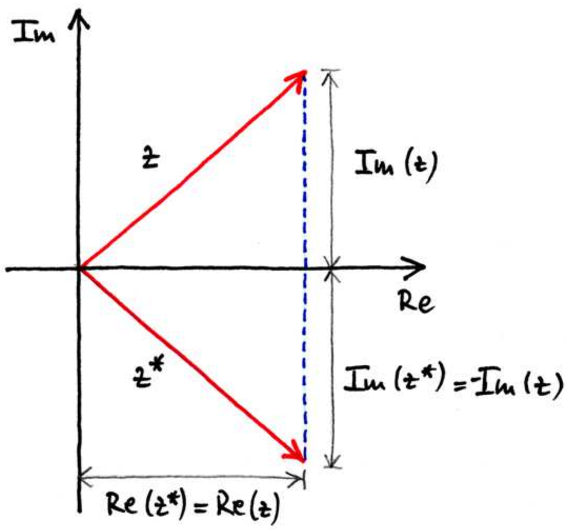

Abbildung 4.6: Die komplex konjugierte Zahl z^* der komplexen Zahl z erhält man durch Spiegelung von z an der reellen Achse.

Beispiel:

$$z = 4 + 3i, \tag{4.31}$$
$$z^* = 4 - 3i. \tag{4.32}$$

Multipliziert man eine komplexe Zahl z mit ihrer komplex konjugierten Zahl z^*, erhält man:

$$zz^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2. \tag{4.33}$$

Der Betrag $|z|$ lässt sich also ausdrücken als

$$|z| = \sqrt{zz^*}. \tag{4.34}$$

Wir können auch den Realteil und den Imaginärteil einer komplexen Zahl mit Hilfe der komplex konjugierten Zahl ausdrücken. Indem wir z^* zu z addieren, erhalten wir

$$z + z^* = (x + iy) + (x - iy) = 2x, \tag{4.35}$$

woraus folgt

$$x = \frac{1}{2}(z + z^*). \tag{4.36}$$

Um den Imaginärteil zu bestimmen, subtrahieren wir z^* von z,

$$z - z^* = (x + iy) - (x - iy) = 2iy, \tag{4.37}$$

und finden dadurch

$$y = \frac{1}{2i}(z - z^*). \tag{4.38}$$

Ferner folgt aus den Rechenregeln für die Addition komplexer Zahlen:

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*. \tag{4.39}$$

4.2.4 Multiplikation

Zwei komplexe Zahlen $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ werden miteinander multipliziert, indem man die Rechenregeln der Algebra anwendet und dabei beachtet, dass $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned} \tag{4.40}$$

Beispiel:

$$(4 + 3i)(6 - 2i) = 24 - 8i + 18i - 6i^2 = 24 + 6 + (18 - 8)i = 30 + 10i. \tag{4.41}$$

Wir kommen auf die Multiplikation bei der Polardarstellung erneut zurück.

4.2.5 Division

Zur Division einer komplexen Zahl $z_1 = x_1 + iy_1$ durch eine komplexe Zahl $z_2 = x_2 + iy_2$ erweitern wir zunächst den Bruch mit der komplex konjugierten Zahl des Nenners:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}. \tag{4.42}$$

Der Nenner ist jetzt reell und nur der Zähler bleibt komplex. Daher können wir einfach die Regeln für die Multiplikation einer komplexen Zahl mit einer reellen Zahl anwenden.

Beispiel:

$$z = 4 + 3i, \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned} z_{inv} &= \frac{1}{z} = \frac{1}{4 + 3i} = \frac{(4 - 3i)}{(4 + 3i)(4 - 3i)} = \frac{4 - 3i}{16 + 9} \\ &= \frac{4}{25} - \frac{3}{25}i. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Wir testen jetzt, ob z_{inv} wirklich die zu z inverse komplexe Zahl ist:

$$\begin{aligned} z \cdot z_{inv} &= (4 + 3i)\left(\frac{4}{25} - \frac{3}{25}i\right) = \frac{1}{25}(4 + 3i)(4 - 3i) = \frac{1}{25}(4^2 + 3^2) \\ &= \frac{16 + 9}{25} = 1. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Wir kommen auf die Division bei der Polardarstellung erneut zurück.

4.3 Die Exponentialform komplexer Zahlen

4.3.1 Eulersche Formel

Wir haben bis jetzt nur die Grundrechnungsarten für komplexe Zahlen besprochen. Aus diesen Grundoperationen können wir auch komplexe Funktionen $f(z)$ von komplexen Zahlen konstruieren. Eine solche Funktion $f(z)$ bildet eine komplexe Zahl z in die komplexe Zahl $u = f(z)$ ab:

$$z \xrightarrow{f} u. \tag{4.46}$$

Zum Beispiel können wir durch Hintereinanderausführen der Multiplikation ganzzahlige Potenzen einer komplexen Zahl bilden:

$$\begin{aligned} z^2 &= z \cdot z, && (4.47)\\ z^3 &= z \cdot z \cdot z, && (4.48)\\ &\vdots && (4.49)\\ z^n &= \underbrace{z \cdot \cdots \cdot z}_{n\text{-mal}}. && (4.50) \end{aligned}$$

Betrachtet man die komplexe Zahl

$$z = \cos\varphi + i \sin\varphi, \tag{4.51}$$

welche einen Betrag von 1 besitzt, $|z| = 1$ und bildet das Differenzial dieser Zahl, so erhält man:

$$\begin{aligned} dz &= (-\sin\varphi d\varphi + i\cos\varphi d\varphi) = (-\sin\varphi + i\cos\varphi)d\varphi \\ &= i(\cos\varphi + i\sin\varphi)d\varphi = izd\varphi, \end{aligned} \tag{4.52}$$

sodass wir erhalten:

$$\frac{dz}{z} = id\varphi. \tag{4.53}$$

Integration auf beiden Seiten liefert (wir lösen hier eigentlich eine Differenzialgleichung):

$$\ln z = i\varphi \tag{4.54}$$

und somit

$$z = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{4.55}$$

Das ist die berühmte **Eulersche Formel**. Für den Spezialfall $\varphi = \pi$ erhalten wir die schöne Formel

$$e^{i\pi} + 1 = 0, \tag{4.56}$$

welche die wichtigen Zahlen $e, i, \pi, 1$ und 0 miteinander verknüpft. Eine weitere interessante Beziehung ist:

$$i^i = (0+i)^i = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^i = (e^{i\pi/2})^i = e^{i^2\pi/2} = e^{-\pi/2}. \tag{4.57}$$

4.3.2 Polardarstellung komplexer Zahlen

Die Eulersche Formel ermöglicht die so genannte **Polardarstellung** der komplexen Zahlen. Wie wir weiter oben gesehen haben (siehe Gleichung (**??**)), kann eine komplexe Zahl dargestellt werden als

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{4.58}$$

Unter Verwendung der Eulerschen Formel ergibt sich daraus

$$z = |z|e^{i\varphi}. \tag{4.59}$$

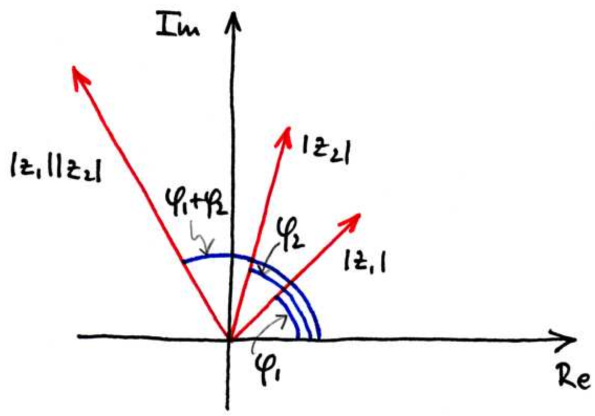

Abbildung 4.7: Multiplikation zweier komplexer Zahlen in der Polardarstellung.

Das ist die Polardarstellung der komplexen Zahl z. In dieser Darstellung ist die komplex konjugierte Zahl einfach gegeben durch:

$$z^* = |z|e^{-i\varphi}. \tag{4.60}$$

In der Polardarstellung können wir durch **Rechenregeln** für die Exponentialfunktion die **Multiplikation und Division** von komplexen Zahlen stark vereinfachen:

$$z_1 z_2 = (|z_1|e^{i\varphi_1})(|z_2|e^{i\varphi_2}) = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}. \tag{4.61}$$

Anschaulich bedeutet das, dass man zwei komplexe Zahlen miteinander **multipliziert**, indem man die zugehörigen Winkel φ_1 und φ_2 addiert und die Beträge $|z_1|$ und $|z_2|$ miteinander multipliziert (siehe Abb. **??**). Für die **Division** gilt:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}. \tag{4.62}$$

4.3.3 Umkehrung der Eulerschen Formel

Wir wollen nun die trigonometrischen Funktionen durch die Exponentialfunktion ausdrücken. Wenn wir φ durch $-\varphi$ ersetzen, erhalten wir die zu $e^{i\varphi}$ konjugierte komplexe Zahl:

$$e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi = \left(e^{i\varphi}\right)^*. \tag{4.63}$$

Durch Addition der Eulerschen Formel für $e^{i\varphi}$ und für die komplex konjugierte Zahl $e^{-i\varphi}$ erhalten wir:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{4.64}$$
$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi \tag{4.65}$$
$$\overline{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\cos\varphi,} \tag{4.66}$$

woraus folgt

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}. \tag{4.67}$$

Subtrahieren wir hingegen $e^{-i\varphi}$ von $e^{i\varphi}$ erhalten wir:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{4.68}$$
$$-e^{-i\varphi} = -\cos\varphi + i\sin\varphi \tag{4.69}$$
$$\overline{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i\sin\varphi,} \tag{4.70}$$

woraus sich

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \tag{4.71}$$

ergibt. Vergleich der Gleichungen (**??**) und (**??**) mit den Gleichungen (**??**) und (**??**) zeigt den Zusammenhang zwischen den trigonometrischen und den hyperbolischen Funktionen.

4.4 Potenzieren und komplexe Wurzeln

In der kartesischen Darstellung können wir Potenzen von komplexen Zahlen einfach durch Ausmultiplizieren berechnen:

$$z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy + (iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy, \tag{4.72}$$
$$z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3ix^2y + 3x(iy)^2 + (iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3). \tag{4.73}$$

Im Allgemeinen brauchen wir binomische Formeln (oder das Pascalsche Dreieck), um die Koeffizienten zu bestimmen.

Das Pascalsche Dreieck

$$\begin{array}{ccccccccccc|c}
 & & & & & 1 & & & & & & n=0 \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & & n=1 \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & n=2 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & n=3 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & n=4 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & n=5 \\
 & & & & & \vdots & & & & & & \vdots
\end{array} \tag{4.74}$$

In der polaren Darstellung ist das Potenzieren einfacher:

$$z^n = \left(|z|e^{i\varphi}\right)^n = |z|^n e^{in\varphi}, \tag{4.75}$$

oder, in trigonometrischer Schreibweise,

$$z^n = [|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = |z|^n[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)]. \tag{4.76}$$

Zur Herleitung der letzten Gleichung haben wir die Tatsache benutzt, dass

$$\left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}, \tag{4.77}$$

woraus

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) \tag{4.78}$$

folgt. Dieses Ergebnis nennt man die **Formel von Moivre**. Die n-te Potenz einer komplexen Zahl kann man also bestimmen, indem man den n-fachen Phasenwinkel φ nimmt und den Betrag z, der eine reelle Zahl ist, zur n-ten Potenz nimmt.
Auch die Umkehrung der Potenz, die **komplexe Wurzel**, lässt sich in der polaren Darstellung leicht bestimmen:

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \left(|z|e^{i\varphi}\right)^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\varphi}{n}} = \sqrt[n]{|z|}e^{\frac{i\varphi}{n}}. \tag{4.79}$$

In der trigonometrischen Darstellung haben wir also:

$$\sqrt[n]{|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = |z|^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right]. \tag{4.80}$$

Weil die komplexen Zahlen im Phasenwinkel mit einer Periode 2π periodisch sind, ergeben sich zusätzliche Wurzeln $\sqrt[n]{z}$. Es gibt insgesamt n n-te Wurzeln einer komplexen Zahl z:

$$z_k = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)} \qquad k = 0, \ldots, n-1. \tag{4.81}$$

Anschaulich liegen diese n-ten Wurzeln in der Gaußschen Zahlenebene auf einem Kreis mit Radius $|z|^{\frac{1}{n}}$ und bilden ein regelmäßiges n-Eck (siehe Abb. **??**).

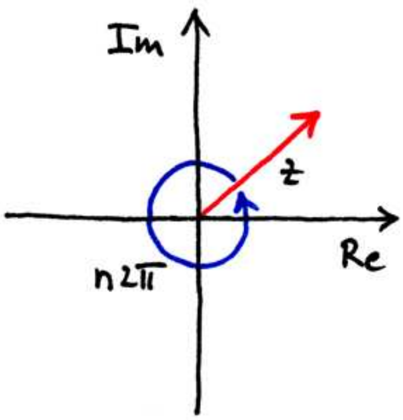

Abbildung 4.8: Wenn wir den zu z gehörigen Vektor um 2π (oder ein Vielfaches davon) drehen, kehrt der Vektor zu seinem Ausgangspunkt zurück.

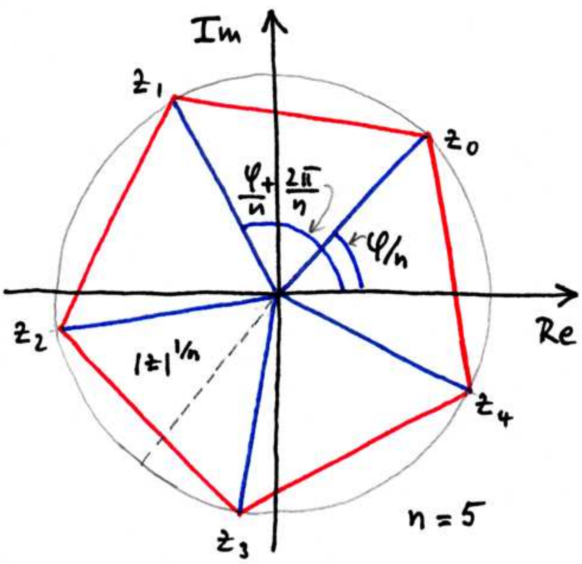

Abbildung 4.9: Die n-ten Wurzeln der komplexen Zahl z liegen auf einem Kreis mit Radius $|z|^{\frac{1}{n}}$ in der Gaußschen Zahlenebene und bilden ein regelmäßiges n-Eck.