

# Strichartz-Ungleichungen und metaplektische Wirkungen auf Modulationsräumen

von  
Irina Shafkulovska

Masterarbeit in Mathematik

vorgelegt der  
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften der  
Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen

im August 2021

angefertigt am Lehrstuhl A für Mathematik  
Prof. Hartmut Führ

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>1 Einführung</b>	<b>6</b>
1.1 Die metaplektische Gruppe . . . . .	6
1.2 Funktionenräume . . . . .	8
1.3 Die Ambiguitätsfunktion . . . . .	13
<b>2 Die Strichartz-Ungleichung</b>	<b>15</b>
<b>3 Die Wirkung der metaplektischen Gruppe auf <math>L^{p,q}(\mathbb{R}^n)</math> und auf <math>M^{p,q}(\mathbb{R}^n)</math></b>	<b>22</b>
<b>4 Gewichtete Räume</b>	<b>36</b>
4.1 Die Hebung auf $L_m^{p,q}(\mathbb{R}^{2n})$ . . . . .	36
4.2 Beispiele . . . . .	40
<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>44</b>
<b>Anhang</b>	<b>46</b>
<b>A <math>Sp(2n, \mathbb{R})</math> als reductive Lie-Gruppe</b>	<b>46</b>
<b>B Die <math>TT^*</math>-Methode</b>	<b>49</b>
<b>Literatur</b>	<b>51</b>

# Einleitung

In dem Paper von R. S. Strichartz aus dem Jahr 1977 [1] handelt es sich um Ungleichungen für die Lösungen von Wellengleichungen. Betrachten wir, zum Beispiel, die homogene freie Schrödinger-Gleichung

$$\begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \Delta_x u(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}. \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

Dann gilt für die eindeutige Lösung  $u(x, t) = (e^{it\Delta} f)(x)$

$$\|u\|_{L^{r,q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k)} \lesssim \|f\|_2,$$

dabei bezeichnet

$$\|F\|_{L^{r,q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k)} = \left\| t \mapsto \|F(\cdot, t)\|_r \right\|_q$$

und  $\|\cdot\|_2$  ist die Norm auf  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Die Exponenten  $r, q$  erfüllen

$$r \geq 2, q \geq 2, \quad \frac{n}{r} + \frac{2}{q} = \frac{n}{2}, \quad (q, r, n) \neq (2, \infty, 2).$$

In diesem Fall heißt das Paar  $(r, q)$  Schrödinger-zulässig.

Für eine Funktion  $F$  mit  $\|F\|_{L^{r,q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k)} < \infty$  folgt aus der Definition der Norm

$$\omega \mapsto F(\cdot, \omega)$$

als Abbildung von  $\mathbb{R}$  nach  $L^r(\mathbb{R}^n)$  ist f. ü. wohldefiniert, d. h. wir können  $L^{r,q}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k)$  als vektorwertigen  $L^q$ -Raum sehen, nämlich  $L^q(\mathbb{R}, L^r(\mathbb{R}^n))$ . Dies motiviert die Suche nach Relationen von dem folgenden Typ

$$\|\mu(\cdot) f\|_{L^q(G, \mathcal{X}_\theta)} \lesssim \|f\|_{\mathcal{H}}$$

dabei ist  $G$  eine lokalkompakte Gruppe,  $\mu : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$  eine unitäre Darstellung von  $G$  auf dem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  und  $\mathcal{X}_\theta$  ein Banachraum, mit der Eigenschaft  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{X}_\theta$ . Genauso wie im Fall des Schrödinger-Propagators  $t \mapsto e^{it\Delta}$ , interessieren wir uns für die zulässigen Parameter  $(q, \theta)$ .

An dieser Stelle bemerken wir, dass die Suche in dem Sinne sinnvoll ist, dass jede lokalkompakte Gruppe ein, bis auf eine positive Konstante, eindeutiges Haarmaß hat. Also ist der Ausdruck auf der linken Seite der Strichartz-Ungleichung bis auf eine multiplikative Konstante eindeutig, die wegen  $\lesssim$  zu vernachlässigen ist.

Im Rahmen dieser Masterarbeit wird die Wirkung von metaplektischen Operatoren  $\hat{S} \in Mp(2n, \mathbb{R})$  auf Modulationsräumen  $M^r$  untersucht. Die Strichartz-Ungleichungen lauten wie folgt

$$\|\hat{S}f\|_{L^q(Mp(2n, \mathbb{R}), M^r)} \lesssim \|f\|_2,$$

für

$$\frac{4n}{q} + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}, \quad 2 \leq q, r \leq \infty.$$

Im ersten Kapitel werden wir dazu die metaplektische Gruppe als die doppelte Überlagerung der symplektischen Gruppe, sowie alle betrachteten Funktionenräume einführen. Wir werden auch drei Ungleichungen für die Kurzzeitfouriertransformation nachweisen.

Im zweiten Kapitel zeigen wir die Strichartz-Ungleichungen in drei Schritten. Zunächst zeigen wir eine punktweise Abschätzung.

$$|\langle \hat{S}f, g \rangle| \lesssim (\lambda_1(S), \dots, \lambda_n(S))^{-1/2} \|f\|_{M^1} \|g\|_{M^1},$$

dabei bezeichnet  $S = \pi(\hat{S}) \in Sp(2n, \mathbb{R})$  die Projektion von  $\hat{S}$  auf der symplektischen Gruppe und  $\lambda_1(S), \dots, \lambda_n(S)$  ihre ersten  $n$  Singulärwerte.

Damit zeigen wir die Ungleichung

$$\|\langle \hat{S}f, g \rangle\|_{L^p_{\mathcal{X}}(Mp(2n, \mathbb{R}))} \lesssim \|f\|_{M^1} \|g\|_{M^1},$$

dabei ist  $L^p_{\infty}(Mp(2n, \mathbb{R}))$  der schwache  $L^p$ -Raum auf  $Mp(2n, \mathbb{R})$ . Abschließend kommen wir zu der Strichartz-Ungleichung.

Ein wichtiger Baustein der Beweise im zweiten Kapitel ist die Invarianz von  $M^1$  unter metaplektischen Operatoren. Im letzten Kapitel untersuchen wir inwiefern dies erhalten bleibt, wenn wir allgemeine Modulationsräume untersuchen.

Diese Arbeit basiert auf dem Artikel *Strichartz estimates for the metaplectic representation* von A. Cauli, F. Nicola und A. Tabacco aus dem Jahr 2019 [2].

## Notation

$ \cdot $	Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$	
$e_j$	$j$ -te Einheitsvektor in $\mathbb{R}^n$	
$\mathbb{1}_n$	$\mathbb{1}_n = \sum_{j=1}^n e_j \in \mathbb{R}^n$ der Vektor mit allen Einträgen 1	
$v^T, A^T$	Transponierte des Vektors $v$ , bzw. der Matrix $A$	
$I$	Identitätsmatrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$	
$I_k$	Projektionsmatrix $\sum_{j=1}^k e_j e_j^T$ auf den Unterraum, der von den ersten $k$ Einheitsvektoren aufgespannt wird	
$GL(n, \mathbb{K})$	Generelle lineare Gruppe über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$	
$D(t),$ $\text{diag}(t_i)_{1 \leq i \leq n}$	Diagonalmatrix mit den Einträgen $t_i, 1 \leq i \leq n,$ $t = (t_1, \dots, t_n)^T \in \mathbb{R}^n$	
$\det A$	Determinante der Matrix $A$	
$O(n, \mathbb{K})$	Orthogonale Gruppe $O(n, \mathbb{K}) \leq GL(n, \mathbb{K}), \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$	
$U(n)$	Unitäre Gruppe $U(n) \leq GL(n, \mathbb{C})$	
$Sp(2n, \mathbb{R})$	Symplektische Gruppe $Sp(2n, \mathbb{R}) \leq GL(2n, \mathbb{R})$	6
$U(2n, \mathbb{R})$	Kompakte symplektische Gruppe $U(2n, \mathbb{R}) \leq Sp(2n, \mathbb{R})$	7
$Mp(2n, \mathbb{R})$	Metaplektische Gruppe, doppelte Überlagerung von $Sp(2n, \mathbb{R})$	8
$\pi^{Mp}$	Projektion von $Mp(2n, \mathbb{R})$ auf $Sp(2n, \mathbb{R})$	8
$T_x$	Translationsoperator $T_x f = f(\cdot - x), x \in \mathbb{R}^n$	10
$M_\omega$	Modulationsoperator $M_\omega f = e^{2\pi i \omega^T \cdot} f, \omega \in \mathbb{R}^n$	10
$\mathcal{F}f, \hat{f}$	Fouriertransformation der temperierten Distribution $f$	10
$V_g f$	Kurzzeitfouriertransformation von $f$ mit Fensterfunktion $g$	11
$A(f, g)$	Kreuz-Ambiguitätsfunktion von $f$ und $g$	13

$\chi_A$	Charakteristische Funktion der messbaren Menge $A$	
$L^{p,q}(\mathbb{R}^n)$	Gemischter-Norm Lebesgue-Raum	10
$\ \cdot\ _{p,q}$	Norm auf $L^{p,q}(\mathbb{R}^n)$	10
$L_m^{p,q}(\mathbb{R}^n)$	Gewichteter gemischter-Norm Lebesgue-Raum	36
$\ \cdot\ _{L_m^{p,q}(\mathbb{R}^n)}$	Norm auf $L_m^{p,q}(\mathbb{R}^n)$	36
$p'$	Hölder-Konjugierter Exponent zu $p \in [1, \infty]$	
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	Raum der Schwartz-Funktionen auf $\mathbb{R}^n$	9
$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	Raum der temperierten Distributionen auf $\mathbb{R}^n$	9
$M^{p,q}$	Modulationsraum zum Exponenten $p, q$	11
$\ \cdot\ _{M^{p,q}}$	Norm auf $M^{p,q}$	11
$M_m^{p,q}$	Gewichteter Modulationsraum zum Exponenten $p, q$	37
$\ \cdot\ _{M_m^{p,q}}$	Norm auf $M_m^{p,q}$	37
$L_\infty^p(G)$	Schwacher $L^p$ -Raum der lokalkompakten Gruppe $G$	9
$\ \cdot\ _{L_\infty^p(G)}$	Norm auf $L_\infty^p(G)$	9
$W(FL^p, L^q)$	Wiener-Amalgam Raum zum Exponenten $p, q$	12
$\ \cdot\ _{W(FL^p, L^q)}$	Norm auf $W(FL^p, L^q)$	12
$\text{supp}(f)$	Träger von $f$	
$A \lesssim B$	$A \leq \gamma B$ für ein $\gamma > 0$ , welches unabhängig von den Argumenten der Ausdrücke $A$ und $B$ ist	
$A \asymp B$	$A \lesssim B \lesssim A$	
$X'$	Dualraum des Vektorraums $X$	
$\mathcal{R}(T)$	Bild des Operators $T$	

## §1 Einführung

Ziel des ersten Abschnittes ist es, die Begriffe und Hilfsmittel zur Beantwortung der obigen Fragestellungen zu erarbeiten. Zu Details und ausführlichen Beweisen verweisen wir auf [3]. Zunächst vereinbaren wir die benutzte Terminologie.

### — DIE METAPLEKTISCHE GRUPPE —

#### (1.1) Definition

(a) Die standardsymplektische Matrix  $J \in Sp(2n, \mathbb{R})$  ist gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Eine Matrix  $S \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  gehört zu  $Sp(2n, \mathbb{R})$  genau dann, wenn  $S^T J S = J$  gilt. Wegen der Blockstruktur von  $J$  ist es oft übersichtlicher, die Blöcke von  $S$  zu betrachten

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

(c) Die ersten  $n$  elementaren symplektischen quasi-Permutationsmatrizen  $\Pi_i \in Sp(2n, \mathbb{R})$ ,  $1 \leq i \leq n$ , sind gegeben durch

$$\Pi_i e_j = \begin{cases} e_j, & 1 \leq j \leq 2n, j \neq i, j \neq i+n \\ e_{i+n}, & j = i \\ -e_i, & j = i+n. \end{cases}$$

(d) Seien  $P, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch und  $L \in GL(n, \mathbb{R})$ , dann sind die folgende Matrizen in  $Sp(2n, \mathbb{R})$ :

$$U_P = \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad V_Q = \begin{pmatrix} I & 0 \\ Q & I \end{pmatrix}, \quad D_L = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L^{-T} \end{pmatrix}.$$

#### (1.2) Bemerkungen

(a) Es lässt sich zeigen, dass  $Sp(2n, \mathbb{R})$  eine Untergruppe von  $GL(2n, \mathbb{R})$  ist.

(b) Für alle  $1 \leq i \leq n$  gilt

$$\Pi_{i+n} := \Pi_i^T = \Pi_i^{-1}, \quad \Pi_{i+n} e_j = \begin{cases} e_j, & 1 \leq j \leq 2n, j \neq i, j \neq i+n \\ -e_{i+n}, & j = i \\ e_i, & j = i+n. \end{cases}$$

Weiterhin vertauschen alle  $\Pi_i$  miteinander, d. h.  $\Pi_i \Pi_j = \Pi_j \Pi_i$  für alle  $1 \leq i, j \leq 2n$ .

(c) Für alle  $S \in Sp(2n, \mathbb{R})$  gibt es eine Indexmenge  $J \subseteq \{1, \dots, 2n\}$ , symmetrische Matrizen  $P, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und eine invertierbare Matrix  $L \in GL(n, \mathbb{R})$  mit

$$S = \prod_{i \in J} \Pi_i V_Q D_L U_P.$$

Den Beweis dazu findet man in [4].

**(1.3) Definition**

Die kompakte symplektische Gruppe ist die kompakte Untergruppe

$$U(2n, \mathbb{R}) := Sp(2n, \mathbb{R}) \cap O(2n, \mathbb{R}) \simeq U(n).$$

Ein Isomorphismus ist gegeben durch

$$U(n) \longrightarrow U(2n, \mathbb{R}), \quad A + iB \mapsto \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}, \quad A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Wir werden zwei Zerlegungen der symplektischen Gruppe benötigen.

**(1.4) Satz (Polarzerlegung)**

Für jede symplektische Matrix  $S \in Sp(2n, \mathbb{R})$  gibt es eindeutige symplektische Matrizen  $K \in O(2n, \mathbb{R})$  und  $P = P^T \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ , wobei  $P$  positiv definit ist, mit  $S = KP$ .

Den Beweis dazu findet man in [5], Proposition 34.

**(1.5) Satz (KAK-Zerlegung)**

Für jede symplektische Matrix  $S \in Sp(2n, \mathbb{R})$  gibt es zwei Matrizen  $K_1, K_2 \in O(2n, \mathbb{R})$  und eine positiv definite Diagonalmatrix  $A = \text{diag}(d_1, \dots, d_n, d_1^{-1}, \dots, d_n^{-1}) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  mit  $d_i \geq d_{i+1} > 0$  für alle  $1 \leq i \leq n-1$ , die  $S = K_1 A K_2$  erfüllen.

Mehr dazu findet man im Anhang (A.1). Diese Zerlegung vereinfacht das Integrieren von einer speziellen Klasse von Funktionen auf  $Sp(2n, \mathbb{R})$  deutlich.

Wir betrachten zunächst eine Menge von Diagonalmatrizen, parametrisiert durch

$$\mathcal{D}_n := \{t \in (0, +\infty)^n : t_i \geq t_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1\}.$$

Die Matrizen von Interesse sind  $D(t) := \text{diag}(t, -t)$  mit  $t \in \mathcal{D}_n$ .



**(1.6) Satz**

Sei  $\mu$  Haarmaß auf  $Sp(2n, \mathbb{R})$ . Sei  $f : Sp(2n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  biinvariant unter  $U(2n, \mathbb{R})$ , d. h.  $f(S) = f(KS) = f(SK)$  für alle  $S \in Sp(2n, \mathbb{R})$  und alle  $K \in U(2n, \mathbb{R})$ . Dann gibt es eine Konstante  $C$  unabhängig von  $f$  mit

$$\int_{Sp(2n, \mathbb{R})} f d\mu = C \int_{D_n} f(e^{D(t/2)}) \prod_{i < j} \sinh\left(\frac{t_i - t_j}{2}\right) \cdot \prod_{i \leq j} \sinh\left(\frac{t_i + t_j}{2}\right) dt. \quad (1.1)$$

Mehr dazu findet man im Anhang (A.2).

Einer der zentralen Begriffe dieser Masterarbeit ist die metaplektische Gruppe.

**(1.7) Definition (Metaplektische Gruppe)**

Die metaplektische Gruppe  $Mp(2n, \mathbb{R})$  ist die doppelte Überlagerung der symplektischen Gruppe  $Sp(2n, \mathbb{R})$ .

Man kann die Gruppe konstruktiv mit quadratischen Fouriertransformationen  $\hat{S}_{W,m}$  für Matrizen  $S = V_P D_L J V_Q$  definieren, indem man sie als die Generatoren der Gruppe wählt. Detaillierte Einführungen findet man in [3], Kapitel 9, [6], Kapitel 4 und [5], Kapitel 7.

**(1.8) Satz**

Die Abbildung definiert durch  $\hat{S}_{W,m} \mapsto S$  lässt sich zu einem surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\pi^{Mp} : Mp(2n, \mathbb{R}) \rightarrow Sp(2n, \mathbb{R})$$

fortsetzen. Der Kern von  $\pi^{Mp}$  ist  $\ker(\pi^{Mp}) = \{I, -I\}$ . Folglich ist  $\pi^{Mp}$  eine doppelte Überlagerung von  $Sp(2n, \mathbb{R})$ .

— FUNKTIONENRÄUME —

In diesem Abschnitt handelt es sich um die betrachteten Funktionenräume. Über die einzelnen Räume findet man mehr in [3] und [7].

**(1.9) Definition (Bochnerräume)**

Seien  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher vollständiger Messraum,  $Y = (Y, \|\cdot\|_Y)$  einen Banachraum und  $p \in [1, \infty]$  gegeben. Die  $L^p$ -Norm für messbare Funktionen  $f : X \rightarrow Y$  ist gegeben durch

$$\|f\|_{L^p(X,Y)} := \left( \int_X \|f(x)\|_Y^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}},$$

mit der üblichen Anpassung für  $p = \infty$  und

$$L^p(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y \mid \|f\|_{L^p(X, Y)} < \infty\}.$$

Funktionen, die fast überall (f. ü.) übereinstimmen, werden in  $L^p(X, Y)$  miteinander identifiziert.

Es lassen sich auf dem üblichen Weg die Verallgemeinerungen der Minkowski- und Hölder-Ungleichung zeigen, sowie den Satz von Riesz-Fischer.

Diese Räume sind eine Verallgemeinerung der bekannten Lebesgue-Räume. Für bessere Lesbarkeit, setzen wir  $\|\cdot\|_p := \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ ,  $p \in [1, \infty]$ .

Wir widmen uns dem zweiten Typ von Funktionenräumen.

**(1.10) Definition**

Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Messraum,  $p \in [1, \infty)$ . Der Raum  $L_\infty^p(X)$  ist der Raum messbarer Funktionen  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\|f\|_{L_\infty^p(X)} := \sup_{\lambda > 0} \{\lambda (\mu(\{x \in X : |f(x)| \geq \lambda\})^{1/p})\} < \infty.$$

In unseren Fall wird  $X$  die symplektische, bzw. die metaplektische Gruppe sein und  $\mu$  ihr Haarmaß. Es gilt die folgende Version der Youngschen Ungleichung (siehe [7], Satz 1.2.13).

**(1.11) Satz (Youngsche Ungleichung)**

Sei  $G$  eine unimodulare, lokalkompakte Hausdorff Gruppe. Seien  $p, q, r \in (1, \infty)$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$ . Dann gibt es eine Konstante  $C = C(p, q, r) > 0$ , sodass für alle  $f \in L^p(G)$  und  $g \in L_\infty^q(G)$

$$\|f * g\|_{L^r(G)} \leq C \|g\|_{L_\infty^q(G)} \|f\|_{L^p(G)}$$

gilt.

Es bleibt noch, die Modulationsräume zu definieren.

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  bezeichnet den Schwartz-Raum (Raum der rapid-abfallenden Funktionen) auf  $\mathbb{R}^n$ . Man beachte, dass der Raum ein vollständiger, aber kein normierter Vektorraum ist. Der Dualraum von  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  wird mit  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  bezeichnet. Seine Elemente heißen temperierte Distribution und  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  heißt entsprechend der Raum der temperierten Distributionen. Dieser Raum enthält Funktionale, die durch Integrieren mit einer geeigneten messbaren Funktion  $f$  zu erhalten sind. Es gibt aber auch temperierte Distributionen, die in diesem Sinn nicht mit einer Funktion identifizierbar sind, wie

zum Beispiel die Delta-Distribution.

Für alle  $p \in [1, \infty]$  gelten die Inklusionen

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

### (1.12) Definition

Seien  $p, q \in [1, \infty]$ . Wir definieren eine neue Norm für messbare Funktionen

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\|F\|_{p,q} := \|F\|_{L^{p,q}} := \left\| \omega \mapsto \|F(\cdot, \omega)\|_p \right\|_q.$$

Wir setzen

$$L^{p,q}(\mathbb{R}^{2n}) := \left\{ F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} \text{ messbar} \mid \|F\|_{p,q} < \infty \right\}.$$

Es lässt sich zeigen, dass  $L^{p,q}(\mathbb{R}^{2n})$  vollständig ist. Entscheidend ist, natürlich, die Vollständigkeit der klassischen  $L^s(\mathbb{R}^n)$ .

Es gilt die Youngsche Ungleichung.

### (1.13) Satz (Youngsche Ungleichung)

Seien  $p, q, r \in [1, \infty]^2$  mit  $\frac{1}{p_j} + \frac{1}{r_j} = \frac{1}{q_j} + 1$ ,  $j = 1, 2$ . Dann gibt es eine Konstante  $C = C(p, q, r) > 0$ , sodass für alle  $f \in L^p(G)$  und  $g \in L^q(G)$

$$\|f * g\|_{L^r(G)} \leq C \|f\|_p \|g\|_q$$

gilt.

Den Beweis dazu findet man in [8]. Um die Verbindung zwischen  $L^{p,q}(\mathbb{R}^{2n})$  und den sogenannten Modulationsräumen zu erstellen, machen wir einen kleinen Exkurs in die Zeit-Frequenz Analyse. Dafür definieren wir die grundlegenden Operatoren.

### (1.14) Definition

Seien  $x, \omega \in \mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ .

Der Translationsoperator  $T_x$  ist definiert durch  $T_x f = f(\cdot - x)$ .

Der Modulationsoperator  $M_\omega$  ist definiert durch  $M_\omega f = e^{2\pi i \omega^T \cdot} f$ .

Die Fouriertransformation auf  $L^1(\mathbb{R}^n)$  ist definiert durch

$$\mathcal{F}f(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \omega^T x} dx, \quad \omega \in \mathbb{R}^n.$$

Diesen Operator kann man auf  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  stetig fortsetzen.

Diese Operatoren sind normerhaltend auf  $L^2(\mathbb{R}^n)$  und es gibt einen starken Zusammenhang zwischen  $T_x$  und  $M_\omega$ . Es gilt nämlich

$$M_\omega T_x = e^{2\pi i \omega^T x} T_x M_\omega.$$

Da der Translations- und der Modulationsoperator i. A. nicht vertauschen, sind Abbildungen, die beide Operatoren verkoppeln, von besonderem Interesse. In dieser Masterarbeit beschäftigen wir uns mit der Kurzzeit-Fourier-Transformation.

**(1.15) Definition (Kurzzeit-Fourier-Transformation)**

Sei  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), g \neq 0$ . Die Kurzzeit-Fourier-Transformation (englisch: short-time Fourier transform, kurz STFT) einer temperierten Distribution  $\varphi$  bezüglich des Fensters  $g$  ist gegeben durch

$$V_g \varphi(x, \omega) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t) \overline{g(t-x)} e^{-2\pi i \omega^T t} dt = \langle \varphi, M_\omega T_x g \rangle, \quad (x, \omega) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

In diesem Zusammenhang heißt  $g$  Fensterfunktion.

Manchmal wird  $M_\omega T_x$  als  $\pi(\lambda)$ ,  $\lambda = (x, \omega)$  bezeichnet.  $\pi(\lambda)$  und  $\pi(\lambda')$  vertauschen bis auf einen Phasenfaktor. Dieses "Vertauschen" kann man auch als Motivation für die symplektische Gruppe sehen. Es gilt  $S \in Sp(2n, \mathbb{R})$  genau dann, wenn

$$\pi(\lambda)\pi(S\lambda) = \pi(S\lambda)\pi(\lambda)$$

für alle  $\lambda \in \mathbb{R}^{2n}$  gilt.

**(1.16) Definition (Modulationsraum)**

Seien  $p, q \in [1, \infty]$  und  $g_0$  die normierte Gauß-Funktion auf  $\mathbb{R}^n$ . Der Modulationsraum ist definiert durch

$$M^{p,q}(\mathbb{R}^{2n}) := \left\{ \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n}) \mid V_{g_0} \varphi \in L^{p,q} \right\}.$$

Eine Norm auf  $M^{p,q}$  ist gegeben durch

$$\|\cdot\|_{M^{p,q}} = \|V_{g_0} \cdot\|_{L^{p,q}}.$$

Die Definition von  $M^{p,q}(\mathbb{R}^{2n})$  hängt auf dem ersten Blick von  $g_0$  ab. Man kann aber zeigen, dass  $g_0$  durch eine beliebige Schwartz-Funktion ersetzbar ist, und dass die Normen bezüglich verschiedenen Fensterfunktionen äquivalent sind. Damit ist  $V_\gamma \cdot$  ein beschränkter Operator auf  $M^{p,q}$  für alle  $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Bezeichnen wir mit  $V_\gamma^*$  den Operator mit  $\langle V_\gamma^* \varphi, f \rangle = \langle \varphi, V_\gamma f \rangle$ . Dann gilt die Inversionsformel

$$I_{M^{p,q}} = \langle \gamma, g \rangle^{-1} V_\gamma^* V_g,$$

für alle  $\gamma, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Deshalb wird es in den Beweisen hinreichend sein, nur den Fall mit einigen speziellen Fensterfunktionen zu betrachten.

**(1.17) Definition**

Seien  $p, q \in [1, \infty]$ . Es bezeichne  $g_0$  die normierte Gauß-Funktion auf  $\mathbb{R}^n$ . Der Wiener-Amalgam-Raum ist definiert durch

$$W(FL^p, L^q) := W(FL^p(\mathbb{R}^n), L^q(\mathbb{R}^n)) := \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{W(FL^p, L^q)} < \infty \right\},$$

dabei ist

$$\|f\|_{W(FL^p, L^q)} = \|x \mapsto \|V_{g_0} f(x, \cdot)\|_p\|_q.$$

**(1.18) Bemerkung**

Der Unterschied zwischen den Modulationsräumen und den Wiener-Amalgam-Räumen ist nur die Integrationsreihenfolge. Bezeichne

$$R := \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{R}F := F \circ R,$$

dann gilt

$$\|f\|_{W(FL^p, L^q)} = \|\tilde{R} V_{g_0} f\|_{p, q}.$$

Analog wie bei den Modulationsräumen sieht man die Unabhängigkeit der Definition des Raumes von der gewählten Fensterfunktion.

**(1.19) Proposition**

Seien  $p_j, q_j \in [1, \infty]$ ,  $j = 1, 2$ . Es gelten die folgenden Relationen:

- (a)  $M^{p_1, q_1} \subseteq M_m^{p_2, q_2}$  genau dann, wenn  $p_1 \leq p_2$  und  $q_1 \leq q_2$ .
- (b)  $W(FL^{p_1}, L^{q_1}) \subseteq W(FL^{p_2}, L^{q_2})$  genau dann, wenn  $p_1 \leq p_2$  und  $q_1 \leq q_2$ .
- (c)  $(M^{p, q})' = M^{p', q'}$ , falls  $1 \leq p, q < \infty$ , mit

$$|\langle f, g \rangle| \lesssim \|f\|_{M^p} \|g\|_{M^{p'}}.$$

- (d)  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq M^1 \subseteq M^2 = L^2(\mathbb{R}^n) \subseteq M^\infty$ .

- (e) *(Komplexe Interpolationstheorie für Modulationsräume)*

Seien  $p, q, p_j, q_j \in [1, \infty]$ ,  $i = 0, 1$  und  $\theta \in [0, 1]$  mit

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1},$$

dann gilt

$$(M^{p_0, q_0}, M^{p_1, q_1})_\theta = M^{p, q}.$$

Den Beweis dazu findet man in [9], Satz 6.1 (D).

— DIE AMBIGUITÄTSFUNKTION —

Die STFT als quadratische Form  $\langle f, M_\bullet T_\bullet g \rangle$  auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  kann auf  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  fortgesetzt werden (siehe [3], Kap 3). Sie ist i. A. nicht überall punktweise wohldefiniert. Beschränken wir uns jedoch auf Funktionen  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , dann ist  $V_g f(x, \omega) = \langle f, M_\omega T_x g \rangle$  überall definiert. Aus der Hilbertraumstruktur und der Unitarität des Translations- und des Modulationsoperators ergeben sich ein paar Besonderheiten dieser quadratischen Form.

**(1.20) Satz (Orthogonalitätsrelationen der STFT)**

Seien  $f_1, f_2, g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , dann ist  $V_{g_j} f_j \in L^2(\mathbb{R}^n)$  für  $j = 1, 2$  und es gilt

$$\langle V_{g_1} f_1, V_{g_2} f_2 \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle \overline{\langle g_1, g_2 \rangle}.$$

**(1.21) Proposition**

Seien  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$  sowie  $S \in Sp(2n, \mathbb{R})$  gegeben. Bezeichnen wir zu  $(x, \omega) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  das Bild unter  $S$  mit  $(x', \omega') = S(x, \omega)^T$ . Dann gilt

$$(V_g f) \circ S(x, \omega) = e^{\pi i(x^T \omega - x'^T \omega')} (V_{\hat{S}^{-1}g} \hat{S}^{-1} f)(x, \omega).$$

Den Beweis dazu findet man in [3], Lemma 9.4.3.

Wenn es um Normabschätzungen geht, ist diese Relation besonders nützlich, denn der Faktor  $e^{\pi i(x'^T \omega' - x^T \omega)}$  verschwindet. Es ist jedoch problematisch in Skalarprodukten, wo der Faktor nicht zu ignorieren ist. Aus diesem Grund führen wir eine neue quadratische Zeit-Frequenz Darstellung ein.

**(1.22) Definition (Ambiguitätsfunktion)**

Seien  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$  gegeben. Die Ambiguitätsfunktion von  $f$  und  $g$  ist gegeben durch

$$A(f, g)(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}^n} f\left(t + \frac{x}{2}\right) \overline{g\left(t - \frac{x}{2}\right)} e^{-2\pi i \omega^T t} dt = e^{\pi i x^T \omega} V_g f(x, \omega).$$

Aus der zweiten Gleichung ist klar, dass  $A(f, g)$  die Orthogonalitätsrelationen und alle Normabschätzungen von der STFT erbt. Im Hinblick auf (1.21) ist die Beziehung verbessert

$$\begin{aligned} A(f, g) \circ S(x, \omega) &= (e^{\pi i x^T \omega} V_g f) \circ S(x, \omega) = e^{\pi i x'^T \omega'} (V_g f) \circ S(x, \omega) \\ &\stackrel{(1.21)}{=} e^{\pi i x'^T \omega'} e^{\pi i(x^T \omega - x'^T \omega')} (V_{\hat{S}^{-1}g} \hat{S}^{-1} f)(x, \omega) \\ &= e^{\pi i x^T \omega} (V_{\hat{S}^{-1}g} \hat{S}^{-1} f)(x, \omega) = A(\hat{S}^{-1} f, \hat{S}^{-1} g). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Wir benötigen die folgenden Abschätzungen.

**(1.23) Proposition**

Seien  $f, g \in M^1(\mathbb{R}^n)$ . Es gelten die Ungleichungen

$$\|V_g f\|_1 \lesssim \|f\|_{M^1} \|g\|_{M^1}, \quad (1.3)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |V_g f(x, \omega)| d\omega \lesssim \|f\|_{M^1} \|g\|_{M^{\infty,1}} \quad (1.4)$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{\omega \in \mathbb{R}^n} |V_g f(x, \omega)| dx \lesssim \|f\|_{M^1} \|g\|_{W(FL^\infty, L^1)}. \quad (1.5)$$

**Beweis**

Nach Lemma 11.3.3. in [3], gilt für  $g, \varphi, \gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  und  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$$|V_g f(x, \omega)| \leq \frac{1}{\langle \gamma, \varphi \rangle} (|V_\varphi f| * |V_g \gamma|)(x, \omega), \quad x, \omega \in \mathbb{R}^n. \quad (1.6)$$

Die erste Ungleichung folgt sofort aus der Relation  $L^p(\mathbb{R}^n) * L^1 \mathbb{R}^n \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$ .

Wir wählen jetzt ein festes  $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  und beobachten, dass

$$|V_\gamma g| = |\langle g, M_\omega T_x \gamma \rangle| = |\langle T_{-x} M_{-\omega} g, \gamma \rangle| = |\langle M_{-\omega} T_{-x} g, \gamma \rangle| = |V_g \gamma(-x, -\omega)|.$$

Nach der Youngschen Ungleichung (1.13) mit  $p = (1, 1)$ ,  $q = (\infty, 1)$  und  $r = (\infty, 1)$  gilt

$$\|V_g f\|_r \lesssim \|V_\gamma f\|_p \|V_g \gamma\|_q = \|V_\gamma f\|_p \|V_\gamma g\|_q.$$

Dies zeigt Gl. (1.4). Für Gl. (1.5) behalten wir die Exponenten  $p, q, r$ , wenden die Youngsche Ungleichung mit  $\tilde{R}$  an und erhalten

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{\omega \in \mathbb{R}^n} |V(f, g)(x, \omega)| dx = \|\tilde{R} V_g f\|_r \lesssim \|\tilde{R} V_\gamma f\|_p \|\tilde{R} V_g \gamma\|_q = \|V_\gamma f\|_p \|\tilde{R} V_g \gamma\|_q.$$

Die Behauptung folgt aus der alternativen Darstellung von  $\|\cdot\|_{W(FL^p, L^q)}$  in (1.18).  $\square$

## §2 Die Strichartz-Ungleichung

### (2.1) Satz (Punktweise gleichmäßige Abschätzung)

Seien  $\hat{S} \in Mp(2n, \mathbb{R})$  und  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  gegeben. Seien  $\lambda_1(S), \dots, \lambda_n(S)$  die ersten  $n$  Singulärwerte von  $S = \pi(\hat{S}) \in Sp(2n, \mathbb{R})$ . Dann gilt

$$|\langle \hat{S}f, g \rangle| \lesssim (\lambda_1(S), \dots, \lambda_n(S))^{-1/2} \|f\|_{M^1} \|g\|_{M^1}. \quad (2.1)$$

### Beweis

Wir wenden das Orthogonalitätsprinzip (1.20) und die Kovarianz Gl. (1.2) an

$$|\langle \hat{S}f, g \rangle|^2 \stackrel{(1.20)}{=} \langle A(\hat{S}f, \hat{S}f), A(g, g) \rangle \stackrel{Gl.(1.2)}{=} \langle A(f, f) \circ S^{-1}, A(g, g) \rangle.$$

Sei  $S = U_1 S_1$  die Polardarstellung von  $S$  mit  $S_1 \in Sp(2n, \mathbb{R})$  positiv definit und  $U_1 \in U(2n, \mathbb{R})$  (siehe (1.4)). Nach dem Spektralsatz kann man  $S_1$  diagonalisieren. Da  $S_1$  zusätzlich symplektisch ist, kann man die Zerlegung verbessern. Es gibt nämlich eine unitäre Matrix  $U_2 \in U(2n, \mathbb{R})$  mit  $S_1 = U_2 D U_2^T$ , dabei ist

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})$$

und  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 1 \geq \lambda_n^{-1} \geq \dots \geq \lambda_1^{-1}$  bezeichnen die Eigenwerte von  $S_1$  (siehe [5], Proposition 32). Dies ergibt die Zerlegung von  $S = U_1 U_2 D U_2^T$ . Da  $|\det U_1 U_2| = 1$  ist, folgt aus der Transformationsformel

$$|\langle \hat{S}f, g \rangle|^2 = \langle A(f, f) \circ U_2 D^{-1}, A(g, g) \circ U_1 U_2 \rangle.$$

Für eine bessere Übersichtlichkeit setzen wir

$$F_1 := A(f, f) \circ U_2 = A(\widehat{U_2^T f}, \widehat{U_2^T f}), \quad F_2 := A(g, g) \circ (U_1 U_2) = A(\widehat{U_2^T U_1^T g}, \widehat{U_2^T U_1^T g}).$$

Mit der neuen Notation erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}f, g \rangle &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} F_1(D^{-1}(x, \omega)) \overline{F_2(x, \omega)} d(x, \omega) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^{2n}} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |F_1(D^{-1}(y, \omega))| \sup_{\eta \in \mathbb{R}^n} |F_2(x, \eta)| d(x, \omega) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |F_1(y_1, \dots, y_n, \lambda_n \omega_1, \dots, \lambda_1 \omega_n)| \sup_{\eta \in \mathbb{R}^n} |F_2(x, \eta)| d(x, \omega) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |F_1(y_1, \dots, y_n, \lambda_n \omega_1, \dots, \lambda_1 \omega_n)| d\omega \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{\eta \in \mathbb{R}^n} |F_2(x, \eta)| d(x, \omega) \\ &= \left( \prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |F_1(y, \omega)| d\omega \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{\eta \in \mathbb{R}^n} |F_2(x, \eta)| dx. \end{aligned}$$



Wir wenden Proposition (1.23) auf  $F_1, F_2$  an und erhalten die Abschätzung

$$|\langle \widehat{S}f, g \rangle|^2 \lesssim \|\widehat{U}_2^T f\|_{M^1} \|\widehat{U}_2^T f\|_{M^{\infty,1}} \|\widehat{U}_2^T \widehat{U}_1^T g\|_{M^1} \|\widehat{U}_2^T \widehat{U}_1^T g\|_{W(\mathcal{FL}^\infty, L^1)}.$$

Wegen der stetigen Inklusionen

$$M^1 = M^{1,1} \hookrightarrow M^{\infty,1}, \quad M^1 = W(\mathcal{FL}^1, L^1) \hookrightarrow W(\mathcal{FL}^\infty, L^1)$$

lässt sich der Ausdruck weiter vereinfachen zu

$$|\langle \widehat{S}f, g \rangle|^2 \lesssim \|\widehat{U}_2^T f\|_{M^1}^2 \|\widehat{U}_2^T \widehat{U}_1^T g\|_{M^1}^2.$$

Für die gewünschte Aussage ist es hinreichend zu zeigen, dass es ein  $C > 0$  unabhängig von  $U_1, U_2$  mit

$$\|\widehat{U}_2^T f\|_{M^1} \leq C \|f\|_{M^1}, \quad \|\widehat{U}_2^T \widehat{U}_1^T g\|_{M^1} \leq C \|g\|_{M^1}$$

gibt. Die erste Ungleichung impliziert die Zweite. Deswegen konzentrieren wir uns auf die erste Ungleichung.

*Behauptung:* Es gibt ein  $g_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , sodass für alle  $U \in U(2n, \mathbb{R})$   $\widehat{U}$  eine Isometrie bezüglich der von  $g_0$  induzierten Norm ist.

Sei  $g_0(x) := e^{-\frac{x^T x}{\hbar}}$ ,  $\hbar > 0$ .  $\hbar$  kann so gewählt werden, dass es für alle  $U \in U(2n, \mathbb{R})$  ein  $c \in \mathbb{C}$ ,  $|c| = 1$  mit  $\widehat{U}g_0 = cg_0$  gibt (siehe [5], Proposition 252). Folglich gilt für alle  $f \in M^p$  sogar punktweise

$$|V_{g_0} \widehat{U}f(z)| = |c V_{\widehat{U}g_0} \widehat{U}f(z)| = |(V_{g_0} f)(U^{-1}z)|, \quad z \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Also ist  $\widehat{U} : M^p \rightarrow M^p$  für alle  $U \in U(2n, \mathbb{R})$  und für alle  $p \in [1, \infty]$  bezüglich der von  $g_0$  induzierten Norm isometrisch. Die Konstante  $C$  erhalten wir aus der Äquivalenz der Normen auf  $M^p$ .  $\square$

Wir werden des Öfteren dieser Ungleichung begegnen. Deshalb definieren wir zu  $\alpha > 0$

$$h_\alpha : G \rightarrow \mathbb{R}, \quad S \mapsto \left( \prod_{i=1}^n \lambda_i(S) \right)^{-\alpha},$$

dabei ist  $\lambda_i(S)$  der  $i$ -te Singulärwert von  $S$ .

Mit (2.1) können wir leicht ein Kriterium formulieren, wann die Abbildung

$$\widehat{S} \mapsto \langle \widehat{S}f, g \rangle,$$

für fest gewählte  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , in  $L_\infty^p(Mp(2n, \mathbb{R}))$  enthalten ist.

**(2.2) Proposition**

Seien  $\alpha, \beta > 0$ . Sei  $G = Sp(2n, \mathbb{R})$  mit dem Haarmaß  $\mu$ . Falls  $\alpha\beta \geq 2n$  gilt, dann ist  $h_\alpha \in L^\beta_\infty(Sp(2n, \mathbb{R}))$ .

**Beweis**

Da  $\det(S) = 1$  für alle symplektischen Matrizen gilt, sind die ersten  $n$  Singulärwerte von  $S$  größer oder gleich 1. Damit folgt  $h_\alpha \in L^\infty(G) \subseteq L^\infty_\infty(G)$ .

Für den Fall  $b < \infty$  muss das Maß von

$$\mathcal{D}_\lambda := \{S \in G : h_\alpha(S) \geq \lambda\}, \quad \lambda > 0$$

abgeschätzt werden.

Wir haben bereits gesehen, dass es eine Zerlegung von  $S = U\Lambda V^T$  mit  $\Lambda$  diagonal und positiv definit sowie  $U, V \in U(2n, \mathbb{R})$  gibt. Also ist  $h_\alpha$  biinvariant unter  $U(2n, \mathbb{R})$  und (1.6) ist anwendbar.

Für alle  $t \geq 0$  und alle  $\lambda > 0$  gilt

$$\lambda \leq h_\alpha(e^{D(t)}) = \exp\left(-\frac{\alpha \mathbb{1}_n^T t}{2}\right)$$

genau dann, wenn

$$\sum_{i=1}^n t_i = \mathbb{1}_n^T t \leq A_\lambda := -\frac{2 \ln \lambda}{\alpha}$$

ist. Für das Maß erhalten wir

$$\begin{aligned} C^{-1}\mu(\mathcal{D}_\lambda) &= \int_G \chi_{\mathcal{D}_\lambda} d\mu \\ &\stackrel{(1.6)}{=} \int_{\mathcal{D}} \chi_{\{\mathbb{1}_n^T \bullet \leq A_\lambda\}}(t) \prod_{i < j} \sinh\left(\frac{t_i - t_j}{2}\right) \cdot \prod_{i \leq j} \sinh\left(\frac{t_i + t_j}{2}\right) dt. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Wegen  $|\sinh| \leq e^{|\cdot|}$  und  $\int_0^b e^{kt} dt = \frac{e^{kb}-1}{k} \leq e^{kb}$  für  $k \in \mathbb{N}$  und  $b > 0$ , können wir das Produkt wie folgt abgeschätzen:

$$\begin{aligned} C^{-1}\mu(\mathcal{D}_\lambda) &\leq \int_{\mathcal{D}} \chi_{\{\mathbb{1}_n^T \bullet \leq A_\lambda\}}(t) \exp\left(\sum_{i < j} \frac{t_i - t_j}{2} + \sum_{i \leq j} \frac{t_i + t_j}{2}\right) dt \\ &= \int_{\mathcal{D}} \chi_{\{\mathbb{1}_n^T \bullet \leq A_\lambda\}}(t) \exp\left(\sum_{i=1}^n (n+1-i)t_i\right) dt \\ &= \int_{(0, A_\lambda)} \int_{(0, \min\{t_1, A_\lambda - t_1\})} \dots \int_{(0, \min\{t_{n-1}, A_\lambda - \mathbb{1}_{n-1}^T(t_1, \dots, t_{n-1})\})} \exp\left(\sum_{i=1}^n (n+1-i)t_i\right) dt_n \dots dt_2 dt_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \int_{(0, A_\lambda)} \int_{(0, A_\lambda - t_1)} \cdots \int_{(0, A_\lambda - \mathbf{1}_{n-1}^T(t_1, \dots, t_{n-1}))} \exp\left(\sum_{i=1}^n (n+1-i)t_i\right) dt_n \cdots dt_2 dt_1 \\
 &= \int_{(0, A_\lambda)} \int_{(0, A_\lambda - t_1)} \cdots \int_{(0, A_\lambda - \mathbf{1}_{n-2}^T(t_1, \dots, t_{n-2}))} \exp\left(\sum_{i=1}^{n-1} (n+1-i)t_i + A_\lambda - \sum_{i=1}^{n-1} t_i\right) dt_{n-1} \cdots dt_2 dt_1 \\
 &= \int_{(0, A_\lambda)} \int_{(0, A_\lambda - t_1)} \cdots \int_{(0, A_\lambda - \mathbf{1}_{n-2}^T(t_1, \dots, t_{n-2}))} \exp\left(\sum_{i=1}^{n-1} (n-1+1-i)t_i\right) e^{A_\lambda} dt_{n-1} \cdots dt_2 dt_1.
 \end{aligned}$$

An dieser Stelle sieht man leicht, dass die Abschätzung sich induktiv zu

$$C^{-1} \mu(\mathcal{D}_\lambda) \leq C^{-1} (e^{A_\lambda})^n = C^{-1} e^{A_\lambda n} = C^{-1} e^{-\frac{2n \ln \lambda}{\alpha}}$$

reduziert. Schließlich erhalten wir

$$\|h_\alpha\|_{L^\beta_\infty(G)} \leq \sup_{\lambda > 0} \lambda (C^{-1} e^{-\frac{2n \ln \lambda}{\alpha}})^{1/\beta} = C^{-1} \beta \sup_{\lambda > 0} \lambda^{-\frac{2n - \beta \alpha}{\beta \alpha}} < \infty,$$

wobei die letzte Ungleichung genau dann gilt, wenn  $\alpha \beta \geq 2n$  ist. □

### (2.3) Korollar

Sei  $\hat{S} \in Mp(2n, \mathbb{R})$  mit dem Haarmaß  $\mu_{Mp(2n, \mathbb{R})}$ . Dann gilt für alle  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\|\langle \hat{S}f, g \rangle\|_{L^4_\infty(Mp(2n, \mathbb{R}))} \lesssim \|f\|_{M^1} \|g\|_{M^1},$$

wobei  $\hat{S}, f, g$  nicht als Konstanten zu verstehen sind.

### Beweis

Sei

$$H : Mp(2n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi \mapsto h_{1/2}(\pi^{Mp}(\Phi)).$$

Aufgrund der punktweisen Ungleichung reicht es,  $H \in L^\beta_\infty(Mp(2n, \mathbb{R}))$  zu zeigen. Sei  $\mu_{Sp(2n, \mathbb{R})}$  das von  $\mu_{Mp(2n, \mathbb{R})}$  induzierte Bildmaß auf  $Sp(2n, \mathbb{R})$ . Da  $\pi^{Mp}$  ein Gruppenepimorphismus ist, ist dieses Bildmaß ein Haarmaß auf  $Sp(2n, \mathbb{R})$  und die Proposition (2.2) ist auf  $h_{1/2}$  anwendbar. Da  $H$  invariant unter Multiplikation mit dem Kern von  $\pi^{Mp}$  ist, reicht es zu zeigen, dass  $h_{1/2} \in L^\beta_\infty(Sp(2n, \mathbb{R}))$  gilt, was in Proposition (2.2) bewiesen wurde. □

Wir schließen den Abschnitt mit der Strichartz-Ungleichung ab.

**(2.4) Satz (Die Strichartz-Ungleichung)**

Sei  $G = Mp(2n, \mathbb{R})$  mit dem Haarmaß  $\mu_G$ . Dann gilt für alle  $\hat{S} \in G$  und alle  $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\|\hat{S}f\|_{L^q(G, M^r)} \lesssim \|f\|_2,$$

wobei  $\hat{S}$  und  $f$  nicht als Konstanten zu verstehen sind und

$$\frac{4n}{q} + \frac{1}{r} \leq \frac{1}{2}, \quad 2 \leq q, r \leq \infty.$$

**Beweis**

Einerseits sind die metaplektischen Operatoren unitär auf  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Auf der anderen Seite gilt für alle  $r \geq 2$

$$L^2(\mathbb{R}^n) = M^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M^r(\mathbb{R}^n).$$

Damit erhalten wir die Abschätzung für den Fall  $q = \infty$ .

Sei nun  $q < \infty$ . Bekanntermaßen gilt

$$M^1 \hookrightarrow M^2 = L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M^\infty,$$

also können wir (2.1) anwenden

$$|\langle \hat{S}f, g \rangle| \lesssim h_{1/2}(\pi^{Mp}\hat{S}) \|f\|_{M^1} \|g\|_{M^1} \lesssim h_{1/2}(\pi^{Mp}\hat{S}) \|f\|_{M^1} \|g\|_{M^\infty}.$$

Aus der Dualität  $(M^1)' = M^\infty$  erhalten wir nun

$$\|\hat{S}f\|_{M^\infty} \lesssim h_{1/2}(\pi^{Mp}\hat{S}) \|f\|_{M^1}.$$

Wir wenden nun den Interpolationssatz (1.19) mit  $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{\infty} = \frac{\theta}{2}$  an. Da wir bereits  $\frac{4n}{q} + \frac{1}{r} \leq \frac{1}{2}$  vorausgesetzt haben und  $q < \infty$  ist, muss  $r > 2$  gelten. Damit dürfen wir  $\theta = \frac{2}{r} \in [0, 1)$  wählen. Für die zweite Interpolationsgleichung erhalten wir

$$\frac{1}{\tilde{r}} = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{1} = \frac{2}{2r} + 1 - \frac{2}{r} = 1 - \frac{1}{r},$$

d. h.  $\tilde{r} = r'$ . Die Normabschätzung lautet

$$\|\hat{S}f\|_{M^r \rightarrow M^r} \lesssim 1^\theta \left( h_{1/2} \circ \pi^{Mp}(\hat{S}) \right)^{(1-\theta)} \|f\|_{r'} = h_{(1-\theta)/2} \circ \pi^{Mp}(\hat{S}) \|f\|_{r'}.$$

Die Beschränktheit des Operators

$$T : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^q(G, M^r), \quad f \mapsto (\hat{S} \mapsto \hat{S}f)$$

ist äquivalent zu der Beschränktheit des Operators  $T\tilde{T}$ , dabei ist

$$\tilde{T} : L^{q'}(G, M^{r'}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n), \quad f \mapsto \int_G \hat{S}^{-1} f(\hat{S}, \cdot) dS.$$

Der Beweis dazu findet man im Anhang (B.1). Wir betrachten den dichten Teilraum

$$\mathcal{D} = \{ f : G \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \mid \overline{\{(g, x) \in G \times \mathbb{R}^n : f(g, x) \neq 0\}} \text{ kompakt} \}.$$

Auf dieser Menge ist  $\tilde{T}$  wohldefiniert und es gilt

$$\tilde{T}f = \int_G \hat{S}^{-1} f(\hat{S}, \cdot) d\hat{S},$$

also

$$[T\tilde{T}f](\hat{S}_0, \cdot) = \int_G \hat{S}_0 \hat{S}^{-1} f(\hat{S}, \cdot) d\hat{S}.$$

Wir setzen alle Abschätzungen zusammen und erhalten

$$\begin{aligned} \|T\tilde{T}f\|_{L^q(G, M^r)} &\lesssim \left\| \hat{S}_0 \mapsto \int_G \|\hat{S}_0 \hat{S}^{-1} f(\hat{S}, \cdot)\|_{M^r} d\hat{S} \right\|_{L^q(G)} \\ &\lesssim \left\| \hat{S}_0 \mapsto \int_G (h_\alpha \circ \pi^{Mp})(\hat{S}_0 \hat{S}^{-1}) \|f(\hat{S}, \cdot)\|_{M^{r'}} d\hat{S} \right\|_{L^q(G)} \\ &= \left\| (h_\alpha \circ \pi^{Mp}) *_G \|x \mapsto f(\cdot, x)\|_{M^{r'}} \right\|_{L^q(G)}, \end{aligned}$$

dabei ist  $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{r}$ . Wählen wir nun  $\beta = \frac{q}{2} > 1$ . Es gilt  $q \geq 8n > 2$ , denn

$$\frac{4n}{q} + \frac{1}{r} \leq \frac{1}{2} \iff \frac{1}{q} \leq \frac{1}{4n} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{r} \right).$$

Dann gilt  $\alpha\beta \geq 2n$ , woraus  $h_\alpha \in L_\infty^\beta(Sp(2n, \mathbb{R}))$  und  $h_\alpha \circ \pi^{Mp} \in L_\infty^\beta(Mp(2n, \mathbb{R}))$  folgt. Zudem ist  $\|f(\hat{S}, \cdot)\|_{M^{r'}} \in L^{q'}(G)$ , da  $\mathcal{D} \subseteq L^{q'}(G, M^{r'})$ .

Nach Wahl von  $\beta$  gilt

$$1 + \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{q} + \frac{2}{q} = \frac{1}{q'} + \frac{1}{\beta}.$$

Die Youngsche Ungleichung (1.11) impliziert

$$\|T\tilde{T}f\|_{L^q(G, M^r)} \lesssim \|h_\alpha \circ \pi^{Mp}\|_{L_\infty^\beta(Mp(2n, \mathbb{R}))} \|f\|_{L^{q'}(G, M^{r'})} \lesssim \|f\|_{L^{q'}(G, M^{r'})}. \quad \square$$

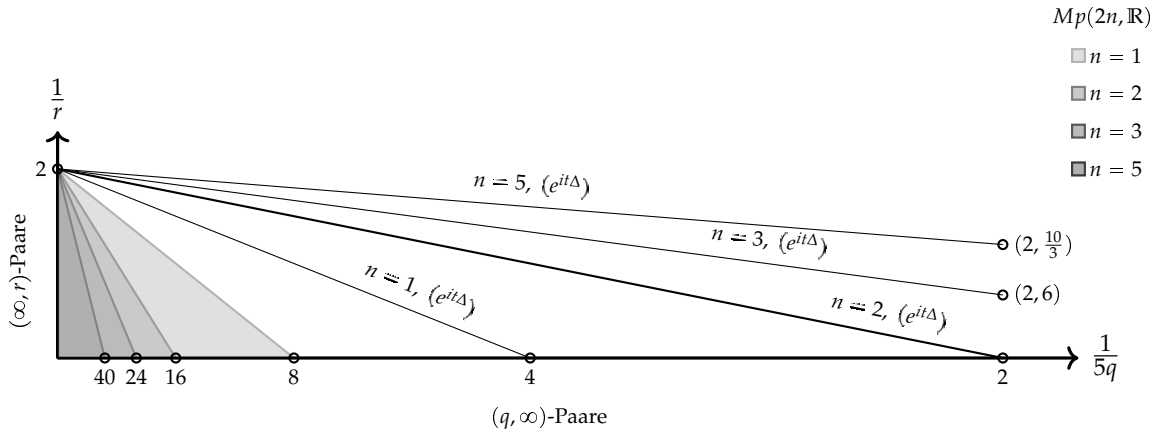


Abbildung 1: Zulässige Paare für Strichartz-Ungleichungen ( $n = 1, 2, 3, 5$ ).

Wir vergleichen die Mengen zulässiger Paare vom letzten Satz mit den Schrödingerzulässigen Paaren, siehe Abbildung 1. Die gekennzeichneten Paare, bzw. Punkte auf den Achsen, sind die kritischen  $(q, r)$  für die Dimensionen  $n = 1, 2, 3, 5$ . Hier ist es offensichtlich, dass es bei den metaplektischen Operatoren zur Verschachtelung der Mengen der zulässigen Exponenten kommt. Im starken Kontrast zu den Schrödinger-Exponenten, wo der Fall  $n = 2$ , graphisch gesprochen, am besten aussieht, sind die Mengen, bis auf  $(q, r) = (\infty, 2)$ , disjunkt. An einigen Stellen wurden ziemlich grobe Abschätzungen gemacht. Trotzdem kann man keine bessere Abschätzungen beweisen. Die Schranke  $h_{1/2}(S)$  wird tatsächlich erreicht, zum Beispiel mit  $S = \text{diag}(\lambda^{-1}\mathbb{1}, \lambda\mathbb{1}) \in Sp(2n, \mathbb{R})$ ,  $\lambda > 1$  und  $g(x) = e^{-\pi x^T x}$ . Es gilt

$$\widehat{S}g = c\lambda^{n/2}g(\text{diag}(\lambda\mathbb{1} \cdot)),$$

mit einem  $c \in \mathbb{C}$ ,  $|c| = 1$  geeignet und es gilt

$$\|\widehat{S}g\|_{M^\infty} \asymp h_{1/2}(S).$$

Mit der Berechnung von  $V_g \widehat{S}g$  werden wir uns im nächsten Abschnitt genauer beschäftigen. Da kann man die Abschätzung verifizieren.

Schließlich ist der Faktor  $4n$  ebenfalls optimal, siehe [10].

### §3 Die Wirkung der metaplektischen Gruppe auf $L^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ und auf $M^{p,q}(\mathbb{R}^n)$

In diesem Abschnitt geben wir eine Klassifikation der Modulationsräume und der metaplektischen Operatoren bezüglich symplektischer Invarianz, d. h. wir stellen uns die Frage, ob ein symplektischer Operator als Operator  $M^{p,q} \rightarrow M^{p,q}$  wohldefiniert ist und falls ja, ob er beschränkt ist. Im Gegenteil zu dem vorherigen Abschnitt, werden hier nicht nur die Exponenten  $p, q$  und die Dimension  $n$ , sondern auch der Operator und seine Projektion auf  $Sp(2n, \mathbb{R})$  als Konstanten angesehen.

Die metaplektische Gruppe, obwohl so eng an der symplektischen Gruppe, ist keine Matrix-Gruppe (siehe [11]) und, im Vergleich zu der symplektischen Gruppe, nicht einfach zu behandeln. Es ist aber bekannt, dass  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  invariant unter der Wirkung der metaplektischen Gruppe ist. Der Übergang zu den symplektischen Matrizen wird durch das Zusammenspiel zwischen der STFT und den metaplektischen Operatoren geleistet.

Wir erinnern uns an die Beziehung (1.21).

Seien  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , sowie  $S \in Sp(2n, \mathbb{R})$  gegeben. Bezeichnen wir zu  $(x, \omega) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  das Bild unter  $S$  mit  $(x', \omega') = S^{-1}(x, \omega)^T$ . Dann gilt

$$(V_g \hat{S} f)(x, \omega) = e^{\pi i(x'^T \omega' - x^T \omega)} (V_{\hat{S}^{-1}g} f \circ S^{-1})(x, \omega).$$

Dies motiviert die Definition von zwei Operatoren:

$$\begin{aligned} \tilde{S} : \{f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ messbar}\} &\longrightarrow \{f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ messbar}\}, \\ f &\mapsto f \circ S^{-1} \end{aligned} \tag{3.1}$$

und

$$\begin{aligned} \varphi_S : \{f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ messbar}\} &\longrightarrow \{f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ messbar}\}, \\ \varphi_S f(x, \omega) &:= e^{\pi i(x'^T \omega' - x^T \omega)} f(x, \omega). \end{aligned}$$

Als Operator von  $V \subseteq L^{p,q}(\mathbb{R}^n)$  nach  $V$  ist  $\varphi_S$  normerhaltend, d. h. entscheidend ist die Wirkung von  $\tilde{S}$ .

Nach der Definition der Norm auf  $M^{p,q}(\mathbb{R}^n)$  ist das Bild  $V_g(M^{p,q})$  für alle Schwartz-Funktionen ein abgeschlossener Teilraum von  $L^{p,q}(\mathbb{R}^{2n})$ .

Wir erhalten das folgende kommutative Diagramm.

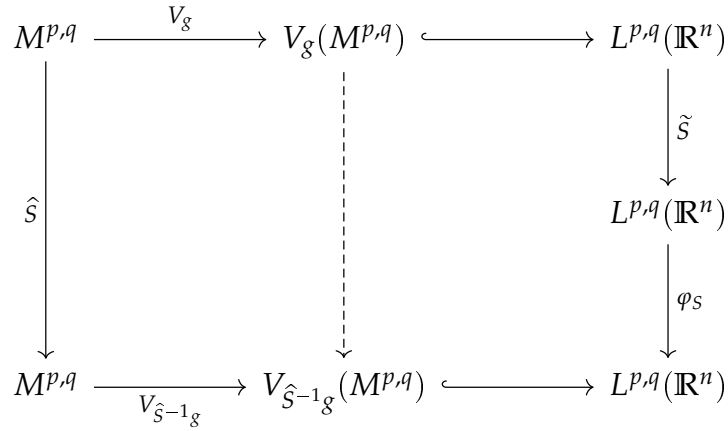


Abbildung 2: (Potentielles) kommutatives Diagramm

Es folgt der Hauptsatz des Abschnittes.

**(3.1) Satz**

Seien  $p, q \in [1, \infty]$  und  $S \in Sp(2n, \mathbb{R})$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a)  $\tilde{S} : L^{p,q}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^{p,q}(\mathbb{R}^n)$  ist wohldefiniert und beschränkt.
- (b)  $\tilde{S} : V_g(M^{p,q}) \longrightarrow L^{p,q}(\mathbb{R}^n)$  ist wohldefiniert und beschränkt.
- (c) Es gilt eine der beiden Bedingungen:
  - (i)  $p = q$ , oder
  - (ii)  $p \neq q$  und  $S$  ist eine obere Dreiecksmatrix.

Wir beweisen den Satz in mehreren Schritten. Zunächst betrachten wir Operatoren, die eine Funktion mit einer Matrix verketteten. Für diese zeigen wir, dass sie wohldefiniert sind, genau dann, wenn sie beschränkt sind. Danach unterscheiden wir zwischen den Fällen  $p = q$  und  $p \neq q$ . Wir verwenden (1.2) um die Beweise zu vereinfachen. Dies ist möglich, denn  $S \mapsto \tilde{S}$  ist ein Gruppenhomomorphismus.

**(3.2) Proposition**

Sei  $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  eine Matrix und  $V \subseteq L^{p,q}(\mathbb{R}^{2n})$  ein abgeschlossener Teilraum. Angenommen

$$\text{dom}(D_A) := \{f \in V \mid f \circ A \in L^{p,q}(\mathbb{R}^{2n})\} \subseteq V$$



liegt dicht in  $V$ , dann ist  $\text{dom}(D_A) = V$  genau dann, wenn

$$D_A : \text{dom}(D_A) \longrightarrow L^{p,q}(\mathbb{R}^{2n}), \quad f \mapsto f \circ A$$

beschränkt ist.

**Beweis**

Offensichtlich ist  $D_A$  ein linearer Operator.

" $\Rightarrow$ " *Behauptung:  $D_A$  ist ein abgeschlossener Operator.*

Sei  $(f_n, D_A f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq V \times L^{p,q}(\mathbb{R}^{2n})$  eine Cauchy-Folge. Die Folge hat wegen der Vollständigkeit von  $V \times L^{p,q}(\mathbb{R}^{2n})$  einen Grenzwert  $(f, g)$ . Nach der Definition der Konvergenz in dem Produktraum, gilt

$$\|f_n - f\|_{L^{p,q}} \longrightarrow 0 \quad \text{und} \quad \|D_A f_n - g\|_{L^{p,q}} \longrightarrow 0.$$

Nach dem Satz von Riesz-Fischer gibt es eine Teilfolge  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x)$  f. ü. gilt. Deshalb konvergiert  $D_A f_{n_k}(x) \longrightarrow f \circ A(x)$  f. ü.

Andererseits gilt

$$\|D_A f_{n_k} - g\|_{L^{p,q}} \longrightarrow 0$$

und wir können eine Teilfolge  $(f_{n_{k_m}})_{m \in \mathbb{N}}$  mit  $D_A f_{n_{k_m}} \longrightarrow g$  f. ü. punktweise finden. Also ist  $g = f \circ A$ , was die Behauptung zeigt.

$D_A$  ist damit nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen beschränkt.

" $\Leftarrow$ " Falls  $\|D_A\|_{op} < \infty$  ist, lässt sich  $D_A$  auf  $V$  stetig fortsetzen. Sei dazu  $f \in V$ ,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \text{dom}(D_A)$  mit  $f_n \longrightarrow f$ . Wegen der Beschränktheit von  $D_A$  ist  $(D_A f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge mit Grenzwert  $g \in L^{p,q}(\mathbb{R}^{2n})$ . Der Grenzwert ist eindeutig, da der Operator linear ist. Mit dem gleichen Argument wie oben erhalten wir  $g = f \circ A$  f. ü. □

Im Fall von  $V = L^{p,q}(\mathbb{R}^{2n})$  gilt  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}) \subseteq \text{dom}(D_A)$ , was die Dichtheit von  $\text{dom}(D_A)$  garantiert.

**(3.3) Satz**

$\tilde{S} : L^p(\mathbb{R}^{2n}) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^{2n})$  ist wohldefiniert und normerhaltend für alle  $S \in Sp(2n, \mathbb{R})$ .

**Beweis**

Die Determinante einer symplektischen Matrix ist 1, was man an der Zerlegung (1.2) ablesen kann. Es gilt

$$\|\tilde{S}f\|_p = \|f\|_p$$

- (i) nach der Transformationsformel (TF), falls  $p < \infty$ ,

(ii) da  $S(\mathbb{R}^{2n}) = \mathbb{R}^{2n}$ , falls  $p = \infty$ . □

Seien ab jetzt  $p, q \in [1, \infty]$  verschieden. In diesem Fall betrachten wir verschiedene Strukturen von  $S$  separat. Intuitiv kann man es folgendermaßen sehen. Es gibt radial symmetrische Funktionen  $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \setminus L^q(\mathbb{R}^n)$  und  $g \in L^q(\mathbb{R}^n) \setminus L^p(\mathbb{R}^n)$ . Das Tensorprodukt  $(x, \omega) \mapsto f \otimes g(x, \omega) = f(x)g(\omega)$  ist in  $L^{p,q}(\mathbb{R}^{2n})$ , aber  $g \otimes f = \tilde{J}f \otimes g \notin L^{p,q}(\mathbb{R}^{2n})$ , also die Mischung der Variablen sollte möglichst unter Kontrolle gehalten werden.

Das Beispiel zeigt, dass  $\tilde{J} : L^{p,q}(\mathbb{R}^{2n}) \longrightarrow L^{p,q}(\mathbb{R}^{2n})$  nicht wohldefiniert ist. Da  $V_g(M^{p,q}) \subsetneq L^{p,q}(\mathbb{R}^{2n})$  nur ein abgeschlossener Teilraum von  $L^{p,q}(\mathbb{R}^{2n})$  ist, ist die Äquivalenz zwischen (a) und (b) aus dem Hauptsatz (3.1) nicht trivial.

**(3.4) Satz**

(a) Seien  $A, D \in GL(n, \mathbb{R})$  und  $S = \text{diag}(A, D) := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ , dann ist  $\tilde{S}$  bis auf eine

Konstante  $C_S$  normerhaltend.

Speziell ist  $\tilde{D}_L$  bis auf eine Konstante  $C_S$  normerhaltend für alle  $L \in GL(n, \mathbb{R})$ .

(b)  $\tilde{U}_P$  ist normerhaltend für alle  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

(c) Sei  $S \in Sp(2n, \mathbb{R})$  eine obere Dreiecksmatrix. Dann ist

$$\tilde{S} : L^{p,q}(\mathbb{R}^{2n}) \longrightarrow L^{p,q}(\mathbb{R}^{2n})$$

ein, bis auf eine Konstante  $C_S$ , normerhaltender Isomorphismus mit stetiger Inverser  $\tilde{S}^{-1} = \widetilde{S^{-1}}$ .

**Beweis**

Sei  $f \in L^{p,q}(\mathbb{R}^{2n})$  gegeben.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} \|\tilde{S}f\|_{L^{p,q}} &= \left\| \omega \mapsto \|f(A \cdot, D\omega)\|_p \right\|_q \\ &\stackrel{TF}{=} \left\| \omega \mapsto |\det A|^{-\frac{1}{p}} \|f(\cdot, D\omega)\|_p \right\|_q \\ &\stackrel{TF}{=} |\det A|^{-\frac{1}{p}} |\det D|^{-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^{p,q}}, \end{aligned}$$

dabei ist  $a^{-\frac{1}{\infty}} := 1$ . Für  $S = D_L$  gilt

$$C_S = |\det L|^{-\frac{1}{p}} |\det L^{-T}|^{-\frac{1}{q}} = |\det L|^{-\frac{1}{p}} |\det L|^{\frac{1}{q}} = |\det L|^{-\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}.$$

(b) Wegen der Translationsinvarianz des Haarmaßes gilt

$$\|\tilde{S}f\|_{L^{p,q}} = \left\| \omega \mapsto \|f(\cdot + P\omega, \omega)\|_p \right\|_q \stackrel{T_{-P\omega}}{=} \left\| \omega \mapsto \|f(\cdot, \omega)\|_p \right\|_q = \|f\|_{L^{p,q}}.$$

§3 Die Wirkung der metaplektischen Gruppe auf  $L^{p,q}(\mathbb{R}^n)$  und auf  $M^{p,q}(\mathbb{R}^n)$

(c) Sei  $S = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in Sp(2n, \mathbb{R})$  eine obere Dreiecksmatrix. Es gilt  $A, D \in GL(n, \mathbb{R})$ , sonst wäre  $S$  nicht invertierbar. Aus der Bedingung  $S^T J S = J$  folgt, dass  $S = D_A U_{A^{-1}B}$  eine gültige Zerlegung ist. Die Konstante ist

$$C_S = |\det A|^{-\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}.$$

Die Inverse von  $S$  ist ebenfalls eine obere Dreiecksmatrix mit  $C_{S^{-1}} = C_S^{-1}$ . Offenkundig gilt  $\tilde{S} \widetilde{S^{-1}f} = \widetilde{S^{-1}} \tilde{S}f$ . Also ist  $\tilde{S}$  ein Isomorphismus.  $\square$

Eine Matrix ist genau dann symplektisch, wenn ihre Inverse symplektisch ist. Wir erinnern uns an die Zerlegung der symplektischen Matrizen

$$S = \prod_{i \in I} \Pi_i V_Q D_L U_P.$$

$S$  ist keine obere Dreiecksmatrix, genau dann, wenn  $S^{-1}$  keine obere Dreiecksmatrix ist, also haben beide einen nichttrivialen Faktor  $\prod_{i \in I} \Pi_i V_Q$  in der Zerlegung.

Betrachten wir genauer die quasi-Permutationen. Zunächst ist  $\Pi_i \Pi_{i+n} = I$ , also können wir annehmen, dass für kein  $i \in \{1, \dots, n\}$  sowohl  $i$  als auch  $i+n$  in  $I$  liegen. Sei  $I_< = I \cap \{1, \dots, n\}$  und  $I_> = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid i+n \in I\}$ . Nach Annahme sind  $I_<$  und  $I_>$  disjunkt. Wir definieren die Diagonalmatrix  $K_I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , die zur Korrektur des Vorzeichens dient:

$$(K_I)_{j,j} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } j \notin I_>, \\ -1 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Damit erreichen wir das Folgende

$$\prod_{i \in I} \Pi_i = \prod_{i \in I_>} \Pi_i^T \prod_{i \in I_<} \Pi_i = \text{diag}(K_I, K_I) \prod_{i \in I_> \cup I_<} \Pi_i.$$

Schließlich beobachten wir, dass

$$\prod_{i \in I} \Pi_i e_j \neq e_j \quad \text{genau dann, wenn} \quad \prod_{i \in I} \Pi_i e_{j+n} \neq e_{j+n}.$$

Um auf die Reihenfolge der Indizes nicht achten zu müssen, schreiben wir

$$\prod_{i \in I_> \cup I_<} \Pi_i = \text{diag}(R_I, R_I) \prod_{i=k+1}^n \Pi_i,$$

dabei ist  $k = n - |I|$  und  $R_I$  die Permutationsmatrix, die die Permutation der Indizes in  $I$  mit  $\{k+1, \dots, n\}$  darstellt.

Zusammengefasst haben wir die kompliziertere Darstellung

$$\begin{aligned} S &= \text{diag}(K_I, K_I) \text{diag}(R_I, R_I) \prod_{i=k+1}^n \Pi_i V_Q D_L U_P \\ &= \text{diag}(K_I R_I, K_I R_I) \prod_{i=k+1}^n \Pi_i V_Q D_L U_P. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Wir werden sehen, dass  $\prod_{i \in I} \widetilde{\Pi}_i$  und  $\widetilde{V}_Q$  unbeschränkt sind. Das reicht aber nicht, um zu schließen, dass  $\widetilde{S}$  unbeschränkt ist. Im Allgemeinen gibt es keine Regel für ein Paar von Operatoren  $(\Phi, \Psi)$ , wobei  $\Phi$  unbeschränkt ist, ob  $\Phi \circ \Psi$  beschränkt oder unbeschränkt ist. Dies ist unabhängig von der Beschränktheit von  $\Psi$ . Als Beispiel nehmen wir  $\Phi = \widetilde{J}$  in verschiedenen Kombinationen:

- (a)  $\Psi \equiv 0 \Rightarrow \Phi \circ \Psi \equiv 0,$
- (b)  $\Psi = id \Rightarrow \Phi \circ \Psi = \widetilde{J},$
- (c)  $\Psi = \widetilde{J}^T = -\widetilde{J} \Rightarrow \Phi \circ \Psi = id.$

In diesem Fall ist aber  $\widetilde{S}$  genau dann beschränkt, wenn der von  $\prod_{i=k+1}^n \Pi_i V_Q$  induzierter Operator beschränkt ist. Der Grund ist, dass die restlichen Operatoren von links und rechts alle, bis auf eine Konstante, normerhaltende Isomorphismen sind. Nach der Definition gilt  $R_I^{-1} = R_I \in O(n, \mathbb{R})$  und  $K_I^{-1} = K_I \in O(n, \mathbb{R})$ . Also induzieren  $\text{diag}(R_I K_I, R_I K_I)$  und  $U_P$  normerhaltende Operatoren. Der Operator  $\widetilde{D}_{L^{-1}}$  ist normerhaltend bis auf  $|\det L|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$ .

Wir beenden den Beweis von (3.1), indem wir den unbeschränkten Fall betrachten. Dafür benötigen wir ein technisches Lemma.

**(3.5) Lemma**

Seien  $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\beta \in \mathbb{R}^n$  gegeben. Dann gilt

$$\mathcal{I} := \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\pi x^T A x + 2\pi \beta^T x) dx = |\det A|^{-\frac{1}{2}} \exp(\pi \beta^T A^{-1} \beta), \quad (3.3)$$

dabei konvergiert das Integral genau dann, wenn  $A$  strikt positiv definit ist.

**Beweis**

Sei  $A = U^T \Lambda U$  mit  $U$  orthogonal und  $\Lambda$  diagonal. Das Lebesgue-Maß ist invariant unter affinen Transformationen. Der Integrand ist nicht-negativ, also ist  $\mathcal{I} \in [0, \infty]$  wohldefiniert.

$$\mathcal{I} = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\pi(Ux)^T \Lambda Ux + 2\pi\beta^T U^T Ux) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\pi x^T \Lambda x + 2\pi(U\beta)^T x) dx.$$

Das Integral

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-at^2+bt} dt < \infty$$

ist endlich genau dann, wenn  $a > 0$ . Deswegen gilt  $\mathcal{I} < \infty$  genau dann, wenn  $\Lambda$  strikt positiv definit ist.

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left( -\pi(\Lambda^{\frac{1}{2}}x)^T (\Lambda^{\frac{1}{2}}x) + 2\pi(\Lambda^{-\frac{1}{2}}U\beta)^T \Lambda^{\frac{1}{2}}x \right. \\ &\quad \left. - \pi(\Lambda^{-\frac{1}{2}}U\beta)^T (\Lambda^{-\frac{1}{2}}U\beta) + \pi(\Lambda^{-\frac{1}{2}}U\beta)^T (\Lambda^{-\frac{1}{2}}U\beta) \right) dx \\ &= |\det \Lambda^{\frac{1}{2}}|^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left( -\pi x^T x + \pi(\Lambda^{-\frac{1}{2}}U\beta)^T (\Lambda^{-\frac{1}{2}}U\beta) \right) dx \\ &= |\det U^T \Lambda U|^{-\frac{1}{2}} \exp(\pi\beta^T U^T \Lambda^{-\frac{1}{2}} \Lambda^{-\frac{1}{2}} U\beta) = |\det A|^{-\frac{1}{2}} \exp(\pi\beta^T A^{-1}\beta) \end{aligned}$$

□

**Beweis (von (3.1))**

Die Sätze (3.3) und (3.4) behandeln die Fälle, wenn  $\tilde{S}$  beschränkt ist. Es bleibt zu zeigen, dass  $\tilde{S}$  unbeschränkt auf  $V_g(M^{p,q})$  ist, falls  $p \neq q$  und  $S$  keine obere Dreiecksmatrix ist. Die Fensterfunktion kann jede Schwartz-Funktion sein, aber wir betrachten zunächst die Gaußfunktion  $g(x) = e^{-\pi x^T x}$  und danach machen wir die Anpassung für beliebige Schwartz-Funktionen.

Wir haben gesehen, dass wir ohne Einschränkung

$$S^{-1} = V_Q \prod_{i=k+1}^n \Pi_i = \begin{pmatrix} I & 0 \\ Q & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_k & I_k - I \\ I - I_k & I_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & I_k - I \\ QI_k + I - I_k & QI_k - Q + I_k \end{pmatrix}$$

oder

$$S^{-1} = \prod_{i=k+1}^n \Pi_i V_Q = \begin{pmatrix} I_k & I_k - I \\ I - I_k & I_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & 0 \\ Q & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k + (I_k - I)Q & I_k - I \\ I - I_k + I_k Q & I_k \end{pmatrix}$$

annehmen können. Das erste Produkt eignet sich für den Fall  $p < q$ , das Zweite für den Fall  $p > q$ . Falls  $Q = 0$  ist, sind die beiden Darstellungen identisch.

Sei nun  $\varepsilon > 1$ ,  $\Omega := \varepsilon I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und es bezeichne  $\Delta := (1 - \varepsilon^{-2})^{\frac{1}{2}} I$ . Die Matrizen  $(\varepsilon^2 - 1)^{\frac{1}{2}} I, \Omega, \Omega^{-1}$  und  $\Delta$  sind alle symmetrisch positiv definit, mit  $\Delta^2 + \Omega^{-2} = I$ .

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
 & V_g(g \circ (\varepsilon^2 - 1)^{\frac{1}{2}} I)(x, \omega) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left( -\pi t^T (\Omega^2 - I)t - \pi(t-x)^T(t-x) - 2\pi i \omega^T t \right) dt \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left( -\pi t^T \Omega^2 t + 2\pi x^T t - \pi x^T x - 2\pi i \omega^T t \right) dt \\
 &\stackrel{TF}{=} |\det \Omega|^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left( -\pi t^T t + 2\pi(\Omega^{-1}x)^T t - \pi x^T \Omega^{-2}x \right. \\
 &\quad \left. - \pi x^T (I - \Omega^{-2})x - 2\pi i (\Omega^{-1}\omega)^T (t - \Omega^{-1}x) - 2\pi i (\Omega^{-1}\omega)^T \Omega^{-1}x \right) dt \\
 &\stackrel{T_{\Omega^{-1}x}}{=} |\det \Omega|^{-1} e^{-\pi x^T (I - \Omega^{-2})x - 2\pi i (\Omega^{-1}\omega)^T \Omega^{-1}x} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left( -\pi t^T t - 2\pi i (\Omega^{-1}\omega)^T t \right) dt \\
 &\stackrel{F_{g=g}}{=} |\det \Omega|^{-1} e^{-\pi x^T (I - \Omega^{-2})x - 2\pi i (\Omega^{-1}\omega)^T \Omega^{-1}x - \pi \omega^T \Omega^{-2}\omega} \\
 &\stackrel{\Delta^2 + \Omega^{-2} = I}{=} |\det \Omega|^{-1} e^{-2\pi i \omega^T \Omega^{-2}x} e^{-\pi x^T \Delta^2 x} e^{-\pi \omega^T \Omega^{-2}\omega}.
 \end{aligned}$$

Der Term  $|\det \Omega|^{-1} e^{-2\pi i \omega^T \Omega^{-2}x}$  hat keinen Einfluss auf die Normabschätzung. Deswegen konzentrieren wir uns auf  $f(x, \omega) := e^{-\pi x^T \Delta^2 x} e^{-\pi \omega^T \Omega^{-2}\omega}$  und  $\tilde{S}f$ .

Es gilt

$$\|f\|_{p,q} = \|g \circ \Delta\|_p \|g \circ \Omega^{-1}\|_q \stackrel{(3.5)}{=} \det(\Delta^2)^{-\frac{1}{2p}} \det(\Omega^{-2})^{-\frac{1}{2q}}. \quad (3.4)$$

Wir bezeichnen die Blöcke von  $S^{-1}$  wie folgt

$$S^{-1} =: \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

und berechnen  $\tilde{S}f$ .

$$\tilde{S}f(x, \omega) = \exp \left( -\pi (Ax + B\omega)^T \Delta^2 (Ax + B\omega) - \pi (Cx + D\omega)^T \Omega^{-2} (Cx + D\omega) \right).$$

Wir gruppieren die Skalarprodukte:

$$\begin{aligned} & x^T A^T \Delta^2 A x + 2\omega^T B^T \Delta^2 A x + \omega^T B^T \Delta^2 B \omega \\ & + x^T C^T \Omega^{-2} C^T x + 2\omega^T D^T \Omega^{-2} C x + \omega^T D^T \Omega^{-2} D \omega \\ & = x^T (A^T \Delta^2 A + C^T \Omega^{-2} C) x + 2\omega^T (B^T \Delta^2 A + D^T \Omega^{-2} C) x + \omega^T (B^T \Delta^2 B + D^T \Omega^{-2} D) \omega. \end{aligned}$$

Für eine bessere Übersichtlichkeit definieren wir

$$\begin{aligned} \Sigma & := A^T \Delta^2 A + C^T \Omega^{-2} C, \\ \beta & := B^T \Delta^2 A + D^T \Omega^{-2} C \end{aligned}$$

und

$$M := B^T \Delta^2 B + D^T \Omega^{-2} D - \beta \Sigma^{-1} \beta^T.$$

Mit der neuen Notation gilt

$$\|\tilde{S}f\|_{p,q} = \left\| \omega \mapsto e^{-\pi\omega^T (M + \beta \Sigma^{-1} \beta^T) \omega} \cdot \left\| x \mapsto e^{-\pi x^T \Sigma x - 2\pi\omega^T \beta x} \right\|_p \right\|_q.$$

Nach der Definition von  $\Sigma$  ist sein Spektrum eine Teilmenge von  $[0, \infty)$ . In den Fällen, die wir betrachten werden, werden die Spektren von  $\Sigma$  und  $M$  in  $(0, \infty)$  liegen. Wir berechnen die innere Norm  $n(\omega)$  abhängig von  $p$ .

$p < \infty$ :

$$\begin{aligned} n(\omega) & = \left\| x \mapsto e^{-p\pi x^T \Sigma x - 2p\pi\omega^T \beta x} \right\|_1^{\frac{1}{p}} \stackrel{(3.5)}{=} |\det p\Sigma|^{-\frac{1}{2p}} (e^{p\pi(\omega^T \beta) \Sigma^{-1} \beta^T \omega})^{\frac{1}{p}} \\ & \asymp |\det \Sigma|^{-\frac{1}{2p}} e^{\pi\omega^T \beta \Sigma^{-1} \beta^T \omega}. \end{aligned}$$

$p = \infty$ :

$F(x, \omega) := e^{-\pi x^T \Sigma x - 2\pi\omega^T \beta x}$  ist zweimal stetig differenzierbar, strikt positiv und verschwindet für jedes feste  $\omega$  am Rand. Daraus folgt, dass das globale Maximum angenommen wird und wir müssen nur die kritischen Stellen untersuchen.

$$\nabla_x F(x, \omega) = F(x, \omega) \left( -2\pi \Sigma x - 2\pi \beta^T \omega \right).$$

Es gibt genau einen kritischer Punkt, nämlich  $x = -\Sigma^{-1} \beta^T \omega$ . Dieser Punkt muss die Maximumsstelle sein. Folglich gilt

$$n(\omega) = F(-\Sigma^{-1} \beta^T \omega, \omega) = e^{-\pi\omega^T \beta \Sigma^{-1} \Sigma \Sigma^{-1} \beta^T \omega + 2\pi\omega^T \beta \Sigma^{-1} \beta^T \omega} = e^{\pi\omega^T \beta \Sigma^{-1} \beta^T \omega}.$$

### §3 Die Wirkung der metaplektischen Gruppe auf $L^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ und auf $M^{p,q}(\mathbb{R}^n)$

Also gilt für alle  $p \in [1, \infty]$

$$\begin{aligned} \|\tilde{S}f\|_{p,q} &\asymp |\det \Sigma|^{-\frac{1}{2p}} \|\omega \mapsto e^{-\pi\omega^T(M+\beta\Sigma^{-1}\beta^T)\omega} \cdot e^{\pi\omega^T\beta\Sigma^{-1}\beta^T\omega}\|_q \\ &= |\det \Sigma|^{-\frac{1}{2p}} \|\omega \mapsto e^{-\pi\omega^T M\omega}\|_q. \end{aligned}$$

Für den Fall  $q = \infty$  folgt direkt, dass die verbleibende Norm 1 ist. In diesem Fall ist aber  $p < \infty$ . Sonst gilt

$$\|\tilde{S}f\|_{p,q} = |\det \Sigma|^{-\frac{1}{2p}} |\det(qM)|^{-\frac{1}{2q}} \asymp |\det \Sigma|^{-\frac{1}{2p}} |\det M|^{-\frac{1}{2q}}.$$

Also ist

$$\|\tilde{S}f\|_{p,q} \asymp |\det \Sigma|^{-\frac{1}{2p}} |\det M|^{-\frac{1}{2q}}$$

für alle  $p, q \in [1, \infty]$ ,  $p \neq q$ .

Nun berechnen wir  $\Sigma, \beta$  und  $M$  in konkreten Fällen und vergleichen die Normen.

**Schritt 1:**  $S^{-1} = \prod_{i=k+1}^n \Pi_i V_0 = \begin{pmatrix} I_k & I_k - I \\ I - I_k & I_k \end{pmatrix}.$

Wir behalten im Augenblick, dass  $\Delta$  und  $\Omega$  Vielfachheiten von  $I$  sind, sowie, dass  $(I - I_k), I_k$  Diagonalmatrizen mit  $(I - I_k) \cdot I = 0$  sind. Es gilt

$$\Sigma = A^T \Delta^2 A + C^T \Omega^{-2} C = I_k \Delta^2 I_k + (I - I_k) \Omega^{-2} (I - I_k) = \Delta^2 I_k + \Omega^{-2} (I - I_k),$$

$$\beta = B^T \Delta^2 A + D^T \Omega^{-2} C = (I_k - I) \Delta^2 I_k + I_k \Omega^{-2} (I - I_k) = 0 + 0 = 0$$

und

$$M = B^T \Delta^2 B + D^T \Omega^{-2} D - \beta \Sigma^{-1} \beta^T = (I_k - I) \Delta^2 (I_k - I) + I_k \Omega^{-2} I_k = \Delta^2 (I - I_k) + \Omega^{-2} I_k.$$

Angenommen,  $\tilde{S}$  wäre beschränkt. Dann gelte

$$\begin{aligned} 1 &\gtrsim |\det \Delta^2|^{\frac{1}{2p}} |\det \Omega^{-2}|^{\frac{1}{2q}} |\det \Sigma|^{-\frac{1}{2p}} |\det M|^{-\frac{1}{2q}} \\ &= (1 - \varepsilon^{-2})^{\frac{n}{2p}} (\varepsilon^{-2})^{\frac{n}{2q}} (1 - \varepsilon^{-2})^{-\frac{k}{2p}} (\varepsilon^{-2})^{-\frac{n-k}{2p}} (1 - \varepsilon^{-2})^{-\frac{n-k}{2q}} (\varepsilon^{-2})^{-\frac{k}{2q}} \\ &= (1 - \varepsilon^{-2})^{\frac{n}{2p} - \frac{k}{2p} - \frac{n-k}{2q}} (\varepsilon^{-2})^{\frac{n}{2q} - \frac{n-k}{2p} - \frac{k}{2q}} \\ &= (1 - \varepsilon^{-2})^{(n-k)(\frac{1}{2p} - \frac{1}{2q})} (\varepsilon^{-2})^{(n-k)(\frac{1}{2q} - \frac{1}{2p})} \\ &= \left( \frac{1 - \varepsilon^{-2}}{\varepsilon^{-2}} \right)^{(n-k)(\frac{1}{2p} - \frac{1}{2q})} = (\varepsilon^2 - 1)^{(n-k)(\frac{1}{2p} - \frac{1}{2q})}. \end{aligned}$$

Falls der Exponent positiv, bzw. negativ ist, dann kann die Ungleichung nicht richtig sein ( $\varepsilon \rightarrow \infty$ , bzw.  $\varepsilon \searrow 1$ ). Die Matrix  $S^{-1}$  ist nicht die Identitätsmatrix, also ist  $k < n$ .



Der Exponent kann nicht 0 sein, da weder  $p \neq q$  noch  $n = k$  gilt. Bei der Rechnung war klar, dass die genaue Indexmenge  $I$  keine große Rolle gespielt hat, sondern nur ihre Kardinalität.

**Schritt 2:**  $p < q$ ,  $Q \neq 0$  und  $S^{-1} = V_{-Q} \prod_{i=k+1}^n \Pi_i$ .

Angenommen, es gäbe ein  $g_0 \in V_g(M^{p,q}(\mathbb{R}^n))$  mit

$$|\widetilde{V}_Q g_0| = |\varepsilon^n V_g(g \circ (\varepsilon^2 - 1)^{\frac{1}{2}} I)|.$$

Dann gilt

$$\|g_0\|_{p,q} = \|f \circ (V_Q)\|_{p,q} \quad \text{und} \quad \|\widetilde{S}g_0\|_{p,q} = \|f \circ \prod_{i=k+1}^n \Pi_i\|_{p,q}.$$

Nach Schritt 1 gilt

$$\|\widetilde{S}g_0\|_{p,q} \asymp (1 - \varepsilon^{-2})^{-\frac{k}{2p}} (\varepsilon^{-2})^{-\frac{n-k}{2p}} (1 - \varepsilon^{-2})^{-\frac{n-k}{2q}} (\varepsilon^{-2})^{-\frac{k}{2q}}.$$

Für  $\|g_0\|_{p,q}$  berechnen wir die dazugehörigen  $\Sigma, \beta$  und  $M$ . Dafür schreiben wir

$Q = U\Lambda U^T$ , dabei ist  $U \in O(n, \mathbb{R})$  und  $\Lambda$  diagonal,

$$\begin{aligned} \Sigma &= A^T \Delta^2 A + C^T \Omega^{-2} C = \Delta^2 + Q \Omega^{-2} Q = U \left( I - \Omega^{-2} + \Lambda^2 \Omega^{-2} \right) U^T \\ &= U \left( \text{diag}(1 - \varepsilon^{-2} + \Lambda_{i,i}^2 \varepsilon^{-2})_{1 \leq i \leq n} \right) U^T, \quad \text{also} \\ \Sigma^{-1} &= U \text{diag} \left( \frac{1}{1 - \varepsilon^{-2} + \Lambda_{i,i}^2 \varepsilon^{-2}} \right)_{1 \leq i \leq n} U^T, \\ \beta &= B^T \Delta^2 A + D^T \Omega^{-2} C = \Omega^{-2} Q \\ M &= B^T \Delta^2 B + D^T \Omega^{-2} D - \beta \Sigma^{-1} \beta^T = \Omega^{-2} - \Omega^{-2} Q \Sigma^{-1} Q \Omega^{-2} = \\ &= \Omega^{-2} \left( I - U \Lambda U^T U \text{diag} \left( \frac{1}{1 - \varepsilon^{-2} + \Lambda_{i,i}^2 \varepsilon^{-2}} \right)_{1 \leq i \leq n} U^T U \Lambda U^T \Omega^{-2} \right) \\ &= \Omega^{-2} U \left( I - \text{diag} \left( \frac{\Lambda_{i,i}^2 \varepsilon^{-2}}{1 - \varepsilon^{-2} + \Lambda_{i,i}^2 \varepsilon^{-2}} \right)_{1 \leq i \leq n} \right) U^T \\ &= U \Omega^{-2} \text{diag} \left( \frac{1 - \varepsilon^{-2} + \Lambda_{i,i}^2 \varepsilon^{-2} - \Lambda_{i,i}^2 \varepsilon^{-2}}{1 - \varepsilon^{-2} + \Lambda_{i,i}^2 \varepsilon^{-2}} \right)_{1 \leq i \leq n} U^T \\ &= U \Omega^{-2} \Delta^2 \text{diag} \left( \frac{1}{1 - \varepsilon^{-2} + \Lambda_{i,i}^2 \varepsilon^{-2}} \right)_{1 \leq i \leq n} U^T. \end{aligned}$$

Angenommen  $\tilde{S}$  wäre beschränkt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 1 &\gtrsim \|g_0\|_{p,q}^{-1} \|\tilde{S} g_0\|_{p,q} \asymp |\det \Sigma|^{\frac{1}{2p}} |\det M|^{\frac{1}{2q}} \|\tilde{S} g_0\| \\
 &= \left( \prod_{i=1}^n \Lambda_{i,i}^2 \varepsilon^{-2} + (1 - \varepsilon^{-2}) \right)^{\frac{1}{2p}} \left( \prod_{i=1}^n \frac{1}{\Lambda_{i,i}^2 \varepsilon^{-2} + (1 - \varepsilon^{-2})} \right)^{\frac{1}{2q}} \\
 &\quad (1 - \varepsilon^{-2})^{\frac{n}{2q}} (\varepsilon^{-2})^{\frac{n}{2q}} \cdot \|\tilde{S} g_0\| \\
 &= \left( \prod_{i=1}^n \Lambda_{i,i}^2 \varepsilon^{-2} + (1 - \varepsilon^{-2}) \right)^{\frac{1}{2p} - \frac{1}{2q}} (1 - \varepsilon^{-2})^{\frac{n}{2q}} (\varepsilon^{-2})^{\frac{n}{2q}} \cdot \\
 &\quad (1 - \varepsilon^{-2})^{-\frac{k}{2p}} (\varepsilon^{-2})^{-\frac{n-k}{2p}} (1 - \varepsilon^{-2})^{-\frac{n-k}{2q}} (\varepsilon^{-2})^{-\frac{k}{2q}} \\
 &= \left( \prod_{i=1}^n \Lambda_{i,i}^2 \varepsilon^{-2} + (1 - \varepsilon^{-2}) \right)^{\frac{1}{2p} - \frac{1}{2q}} (1 - \varepsilon^{-2})^{-k(\frac{1}{2p} - \frac{1}{2q})} (\varepsilon^{-2})^{-(n-k)(\frac{1}{2p} - \frac{1}{2q})} \\
 &= \left( \prod_{i=1}^k \left( \Lambda_{i,i}^2 \varepsilon^{-2} + (1 - \varepsilon^{-2}) \right) \frac{1}{1 - \varepsilon^{-2}} \right)^{\frac{1}{2p} - \frac{1}{2q}} \\
 &\quad \left( \prod_{i=k+1}^n \left( \Lambda_{i,i}^2 \varepsilon^{-2} + (1 - \varepsilon^{-2}) \right) \frac{1}{\varepsilon^{-2}} \right)^{\frac{1}{2p} - \frac{1}{2q}} \\
 &= \left( \prod_{i=1}^k \frac{\Lambda_{i,i}^2}{\varepsilon^2 - 1} + 1 \right)^{\frac{1}{2p} - \frac{1}{2q}} \left( \prod_{i=k+1}^n \Lambda_{i,i}^2 + \varepsilon^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2p} - \frac{1}{2q}}.
 \end{aligned}$$

Der Exponent  $\frac{1}{2p} - \frac{1}{2q}$  ist positiv. Falls  $k < n$ , dann ist das zweite Produkt nicht leer. Das erste Produkt ist von unten durch 1 beschränkt.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \prod_{i=k+1}^n \Lambda_{i,i}^2 + \varepsilon^2 - 1 = \infty$$

widerspricht der Annahme.

Falls  $k = n$ , dann ist das zweite Produkt 1. Die symmetrische Matrix  $Q$  hat mindestens einen Eigenwert  $\Lambda_i \neq 0$ .

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \prod_{j=1}^n \frac{\Lambda_{j,j}^2}{\varepsilon^2 - 1} + 1 \geq 1^{n-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \frac{\Lambda_{i,i}^2}{\varepsilon^2 - 1} + 1 = \infty$$

widerspricht der Annahme.

Also kann  $\tilde{S}$  nicht beschränkt sein.

**Schritt 3:**  $p > q$ ,  $Q \neq 0$  und  $S^{-1} = \prod_{i=k+1}^n \Pi_i^T V_Q$ .

Analog zu dem vorherigen Fall, suchen wir  $h_0 \in V_g(M^{p,q}(\mathbb{R}^n))$  mit

$$\left| \prod_{i=k+1}^n \Pi_i h_0 \right| = |\varepsilon^n V_g(g \circ (\varepsilon^2 - 1)^{\frac{1}{2}} I)|.$$

Dann gilt

$$\|h_0\|_{p,q} = \|f \circ (\prod_{i=k+1}^n \Pi_i)\|_{p,q} \quad \text{und} \quad \|\tilde{S}h_0\|_{p,q} = \|f \circ V_Q\|_{p,q}.$$

Unter der Annahme der Beschränktheit von  $\tilde{S}$ , impliziert die Rechnung aus Fall 2

$$\begin{aligned} 1 &\gtrsim \|h_0\|_{p,q}^{-1} \|\tilde{S}h_0\|_{p,q} \\ &\asymp \left( \prod_{i=1}^k \frac{\Lambda_{i,i}^2}{\varepsilon^2 - 1} + 1 \right)^{\frac{1}{2q} - \frac{1}{2p}} \left( \prod_{i=k+1}^n \Lambda_{i,i}^2 + \varepsilon^2 - 1 \right)^{\frac{1}{2q} - \frac{1}{2p}}. \end{aligned}$$

Wir haben bereits gesehen, dass dies nicht gelten kann. Also ist  $\tilde{S}$  unbeschränkt.

**Schritt 4: (Die Existenz von  $g_0$  und  $h_0$ )**

Es ist bekannt, dass  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  äquivalent zu  $V_\gamma \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  ist für alle  $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , insbesondere  $V_\gamma \varphi \in L^{p,q}(\mathbb{R}^{2n})$ .

Zu gegebenem  $R \in Sp(2n, \mathbb{R})$  und  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  wird  $\psi \in M^{p,q}(\mathbb{R}^n)$  mit

$$|V_g \varphi| = |\tilde{R} V_g \psi| = |V_{\hat{R}g} \hat{R} \psi|$$

gesucht. Es ist naheliegend,

$$V_{\hat{R}g} \hat{R} \psi = V_g \varphi$$

nach  $\psi$  zu lösen. Dafür wählen wir ein  $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\langle \gamma, g \rangle \neq 0 \neq \langle \gamma, \hat{R}g \rangle$ .

$\gamma$  existiert, da  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  nicht zweidimensional ist. Mit der Inversionsformel erhalten wir

$$V_\gamma^* V_{\hat{R}g} \hat{R} \psi = V_\gamma^* V_g \varphi,$$

d. h.

$$\langle \gamma, \hat{R}g \rangle^{-1} \hat{R} \psi = \langle \gamma, g \rangle^{-1} \varphi.$$

In unserem Fall,  $\varphi = g \circ (\varepsilon^2 - 1)^{\frac{1}{2}} I$ , also ist die Behauptung anwendbar für  $g_0$  und  $h_0$ . Ein möglicher Wahl wäre

$$\psi = \frac{\langle \gamma, \hat{R}g \rangle}{\langle \gamma, g \rangle} \hat{R}^{-1} \varphi.$$

**Schritt 5: (Beliebige Fensterfunktionen)**

Sei  $\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  beliebig.  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ist invariant unter der Wirkung der metaplektischen Gruppe. Dann gilt für alle  $f \in M^{p,q}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} 1 &\gtrsim \|V_\gamma f\|_{p,q}^{-1} \|\tilde{\mathcal{S}} V_\gamma f\|_{p,q} \asymp \|V_g f\|_{p,q}^{-1} \|V_{\hat{\mathcal{S}}_\gamma} \hat{\mathcal{S}} f\|_{p,q} \\ &\asymp \|V_g f\|_{p,q}^{-1} \|V_{\hat{\mathcal{S}}_g} \hat{\mathcal{S}} f\|_{p,q} \asymp \|V_g f\|_{p,q}^{-1} \|\tilde{\mathcal{S}} V_g f\|_{p,q}. \end{aligned}$$

Also kann

$$\tilde{\mathcal{S}} : V_\gamma(M^{p,q}(\mathbb{R}^n)) \longrightarrow L^{p,q}(\mathbb{R}^{2n})$$

nicht wohldefiniert sein. □

## §4 Gewichtete Räume

### – DIE HEBUNG AUF $L_m^{p,q}(\mathbb{R}^{2n})$ –

Wir erweitern die Definition von Lebesgue- und Modulationsräumen, indem wir ein Gewicht  $m$  einführen.

**(4.1) Definition**

Sei  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  messbar und submultiplikativ, d. h.

$$v(x + y) \leq v(x)v(y)$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Dann heißt eine messbare Funktion  $m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   $v$ -moderiert, falls

$$m(x + y) \lesssim v(x)m(y)$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  gilt.

Sei  $v$  submultiplikativ,  $m$   $v$ -moderiert. Es bezeichne

$$L_m^{p,q}(\mathbb{R}^{2n}) := \{f \text{ messbar} \mid f \cdot m \in L^{p,q}(\mathbb{R}^{2n})\}.$$

Man kann gewichtete  $L^{p,q}$ -Räume mit beliebigen Gewichtsfunktionen definieren. Mit  $v$ -moderierten Gewichten sind die Räume aber translationsinvariant und der Translationsoperator ist beschränkt mit Operatornorm  $\|T_z\|_{op} \leq v(z)$ .

Umgekehrt:  $L_m^{p,p}(\mathbb{R}^{2n})$  ist translationsinvariant bezüglich aller Translationsoperatoren  $T_z, z \in \mathbb{R}^{2n}$  genau dann, wenn  $m$   $v$ -moderiert bezüglich eines submultiplikativen  $v$  ist (siehe [3], Proposition 11.1.2.).

Schwarz-Funktionen  $f$  sind charakterisiert durch die beliebige polynomiale Abklänge von  $V_g f$  für alle Schwarz-Funktionen  $g$ . Eine Fundamenteleigenschaft der ungewichteten Modulationsräume ist die Inklusion  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq M^{p,q}$ . Sobald das Wachstum von  $m$  zu groß wird, kann das nicht mehr erfüllt sein. In diesem Fall sollte  $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$  durch ein anderes Paar  $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$  ersetzt werden. Der Teilraum der Schwarz-Funktionen mit kompakten Träger eignet sich nicht, denn dieser Teilraum ist nicht invariant unter der Fouriertransformation (siehe [3], Satz 2.3.2.). Stattdessen kann man

$$\mathcal{S}_C(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid f = V_{g_0}^* F = \int_{\mathbb{R}^{2n}} F(x, \omega) M_\omega T_x g_0 d(x, \omega) \right\}$$

betrachten. Auf diese Art kann man die Klasse der zugelassenen submultiplikativen Gewichte  $v$  (und somit allen  $v$ -moderierten Gewichten  $m$ ) erweitern. Es folgt die Definition für gewichtete Modulationsräume mit  $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$ . Mehr über die Verallgemeinerung findet man in [3], Abschnitt 11.4. und [12].

**(4.2) Definition (Modulationsraum)**

Seien  $p, q \in [1, \infty]$  und  $m : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$   $v$ -moderiert bezüglich eines submultiplikativen  $v$ . Es bezeichne  $g_0$  die normierte Gauß-Funktion auf  $\mathbb{R}^n$ . Der Modulationsraum ist definiert durch

$$M_m^{p,q} := M_m^{p,q}(\mathbb{R}^{2n}) := \{ \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid V_{g_0} \varphi \in L_m^{p,q}(\mathbb{R}^{2n}) \}.$$

Eine Norm auf  $M_m^{p,q}$  ist gegeben durch

$$\| \cdot \|_{M_m^{p,q}} = \| V_{g_0} \cdot \|_{L_m^{p,q}}.$$

In dem Fall von einem konstantem  $m$  stimmen  $M_m^{p,q}$  und  $M^{p,q}$  überein und der Index wird weggelassen.

Genauso wie im ungewichteten Fall lässt es sich zeigen, dass die Fensterfunktion eine beliebige Schwartzfunktion sein kann und die induzierten Normen alle äquivalent sind.

Betrachten wir erneut das kommutative Diagramm.

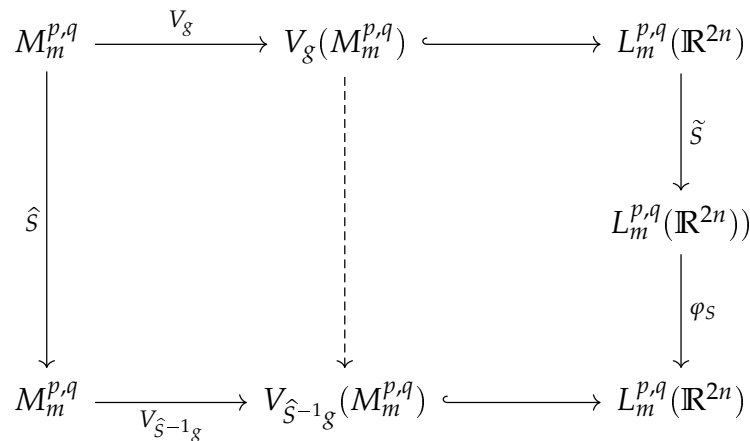


Abbildung 3: Verallgemeinerung des kommutativen Diagrammes

Im Gegenteil zu  $(L^{p,q}(\mathbb{R}^{2n}), L_m^{p,q}(\mathbb{R}^{2n}))$ , ist die Beziehung  $(M^{p,q}, M_m^{p,q})$  nicht so offensichtlich und die Ergebnisse sind (wenn überhaupt) schwieriger zu übertragen. Wir verweisen auf [13], [14] und [15] für Isomorphismen zwischen gewichteten Moduliräumen.

Die Räume  $L^{p,q}(\mathbb{R}^{2n})$  und  $L_m^{p,q}(\mathbb{R}^{2n})$  sind offensichtlich isomorph via

$$\Phi_m : L_m^{p,q}(\mathbb{R}^{2n}) \longrightarrow L^{p,q}(\mathbb{R}^{2n}), \quad f \mapsto f \cdot m.$$

Mit diesem Isomorphismus und unseren Kenntnissen aus dem vorherigen Abschnitt übersetzen wir die Frage der Beschränktheit von

$$\tilde{S}_m : L_m^{p,q}(\mathbb{R}^{2n}) \longrightarrow L_m^{p,q}(\mathbb{R}^{2n}), \quad f \mapsto f \circ S^{-1}$$

zu der Beschränktheit eines Operators  $L^{p,q}(\mathbb{R}^{2n}) \longrightarrow L^{p,q}(\mathbb{R}^{2n})$ . Es gilt nämlich für  $f \in L^{p,q}$

$$\Phi_m \tilde{S}_m \Phi_m^{-1} f = m \cdot \left( \frac{f}{m} \right) \circ S^{-1} = m \cdot \frac{f \circ S^{-1}}{m \circ S^{-1}} = \frac{m}{m \circ S^{-1}} \cdot \tilde{S} f. \quad (4.1)$$

**(4.3) Satz**

Seien  $v$  submultiplikativ und  $m$  eine  $v$ -moderierte Gewichtsfunktion. Sei  $S \in Sp(2n, \mathbb{R})$  gegeben. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(a) Falls  $\tilde{S}$  beschränkt ist, dann ist  $\tilde{S}_m$  beschränkt, genau dann, wenn

$$C_m := \left\| \frac{m}{m \circ S^{-1}} \right\|_{\infty} < \infty.$$

(b) Falls  $\tilde{S}$  unbeschränkt ist und

$$T_m := \operatorname{ess\,inf}_{z \in \mathbb{R}^{2n}} \frac{m(z)}{m \circ S^{-1}(z)} > 0,$$

dann ist  $\tilde{S}_m$  unbeschränkt.

**Beweis**

(a)  $\tilde{S}$  ist bis auf die Konstante  $C_S > 0$  normerhaltend. Folglich ist  $\frac{m}{m \circ S^{-1}} \cdot \tilde{S}$  beschränkt, genau dann, wenn der Multiplikationsoperator

$$M_m : L^{p,q} \longrightarrow L^{p,q}, \quad f \mapsto \frac{m}{m \circ S^{-1}} \cdot f$$

beschränkt ist. Eine grobe Abschätzung liefert

$$\left\| \frac{m}{m \circ S^{-1}} f \right\|_{p,q} \leq C_m \|f\|_{p,q}.$$

Angenommen es gilt  $C_m = \infty$ , dann gibt es disjunkte messbare Mengen  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  positiven Maßes mit

$$\lambda(A_n) \leq 1, \quad \frac{m}{m \circ S^{-1}} > n \quad \text{auf } A_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Nach dem Cavalierischen Prinzip sind die Mengen

$$A_n(\omega) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, \omega) \in A_n\}, \quad \omega \in \mathbb{R}^n$$

f. ü. in  $\omega \in \mathbb{R}^n$  messbar, die Funktion

$$\omega \mapsto \lambda(A_n(\omega))$$

ist messbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lambda(A_n(\omega)) \, d\omega = \lambda(A_n).$$

Wir setzen

$$a_n(x, \omega) := a_n(0, \omega) = \lambda(A_n(\omega))^{1-\frac{1}{p}}.$$

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $a_n$  f. ü. wohldefiniert und messbar. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|a_n \chi_{A_n}\|_{p,q} &= \|\omega \mapsto a_n(\omega) \cdot \|\chi_{a_n(\omega)}\|_p\|_q \\ &= \|\omega \mapsto a_n(\omega) \cdot \lambda(\omega)^{\frac{1}{p}}\|_q \\ &= \|\omega \mapsto \lambda(A_n(\omega))\|_q = \lambda(A_n)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite

$$\begin{aligned} \|M_m a_n \chi_{A_n}\|_{p,q} &= \|\omega \mapsto a_n(\omega) \cdot \|\frac{m}{m \circ S^{-1}} \chi_{a_n(\omega)}\|_p\|_q \\ &\geq \|\omega \mapsto a_n(\omega) \cdot \|n \chi_{a_n(\omega)}\|_p\|_q \\ &= n \|\omega \mapsto a_n(\omega) \cdot \lambda(\omega)^{\frac{1}{p}}\|_q \\ &= n \|\omega \mapsto \lambda(A_n(\omega))\|_q = n \lambda(A_n)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Also ist  $M_m$  unbeschränkt.

(b) Nach (3.2) gibt es ein  $f \in L^{p,q}(\mathbb{R}^{2n})$  mit  $\tilde{S}f \notin L^{p,q}(\mathbb{R}^{2n})$ . Es gilt

$$\|M_m \tilde{S}f\|_{p,q} \geq T_m \|\tilde{S}f\|_{p,q} = \infty. \quad \square$$



**(4.4) Bemerkung**

Falls  $\tilde{S}$  unbeschränkt ist, aber  $T_m = 0$ , dann ist es generell schwer eine Aussage zu treffen. Es ist bekannt, dass es Schranken  $\eta_r > 0$  gibt, sodass

$$\frac{1}{\eta_r} < \frac{m}{m \circ S^{-1}} < \eta_r$$

auf  $[-r, r]^{2n}$  gilt (siehe [3], Lemma 11.1.1.). Das Problem liegt hauptsächlich an dem Wachstum von  $\eta_r$ . Wäre es besonders langsam, dann es ist nicht auszuschließen, dass  $M_m \tilde{S}$  unbeschränkt ist. Es kann aber auch sein, dass  $\frac{m}{m \circ S}$  so schnell abfällt, dass es das Wachstum bei  $\tilde{S}f$  kompensiert und

$$M_m \tilde{S} : L^{p,q} \longrightarrow L^{p,q}$$

wohldefiniert ist. Nach (3.2) würde dies für die Beschränktheit von  $\tilde{S}_m$  reichen.

Wir setzen die positiven Ergebnisse aus (4.3) zusammen und erhalten das folgende Korollar.

**(4.5) Korollar**

Sei  $v$  submultiplikativ und  $m$   $v$ -moderiert. Angenommen,  $m \asymp m \circ S^{-1}$ , dann ist für jede symplektische Matrix  $S \in Sp(2n, \mathbb{R})$  der Operator

$$\tilde{S} : L^{p,q} \longrightarrow L^{p,q}$$

beschränkt, genau dann, wenn der Operator

$$\tilde{S}_m : L_m^{p,q} \longrightarrow L_m^{p,q}$$

beschränkt ist.

— BEISPIELE —

Wir betrachten zwei der Standardgewichte, die in der Zeit-Frequenz Analyse auftauchen und bestimmen die Fälle, wo das Korollar (4.5) anwendbar ist. Für einen generellen Überblick der typischen Gewichte verweisen wir auf [12].

Wir beobachten, dass

$$\operatorname{ess\,inf} \frac{m}{m \circ S^{-1}} = \operatorname{ess\,inf} \frac{m \circ S}{m} = \operatorname{ess\,inf} \frac{1}{\frac{m}{m \circ S}} = \frac{1}{\operatorname{ess\,sup} \frac{m}{m \circ S}}.$$

D. h. solange wir eine Klasse symplektiallenscher Matrizen betrachten, die abgeschlossen unter Inversenbildung ist, reicht es nur

$$\operatorname{ess\,sup} \frac{m}{m \circ S} < \infty \quad \text{oder} \quad \operatorname{ess\,sup} \frac{m \circ S}{m} < \infty$$

zu überprüfen.

**(4.6) Beispiel**

Wir beginnen mit

$$m(z) = m_{a,b,s,t}(z) = e^{a|z|^b} (1 + |z|)^s (\ln(e + |z|))^t. \tag{4.2}$$

Diese Klasse enthält insbesondere die polynomiellen Gewichte, die exponentiellen und die subexponentiellen Gewichte.

Sei  $S \in Sp(2n, \mathbb{R})$  mit Singulärwertzerlegung  $S = U \operatorname{diag}(\lambda) V^T$ . Für die Singulärwerte gilt  $\lambda_{2n} = \lambda_1^{-1} \leq 1$  mit Gleichheit, genau dann, wenn  $\operatorname{diag}(\lambda) = I$ , d. h. genau dann, wenn  $S$  (und somit  $S^{-1}$ ) orthogonal ist. In diesem Fall gilt sogar

$$\frac{m}{m \circ S} \equiv 1.$$

Sei nun  $S$  nicht orthogonal.

Das Gewicht  $m$  ist stetig, also gilt

$$\operatorname{ess\,sup}_{z \in \mathbb{R}^{2n}} m(z) = \sup_{z \in \mathbb{R}^{2n}} m(z).$$

Wir beobachten für den polynomiellen Teil

$$\frac{1 + |z|}{1 + \lambda_1 |z|} \leq \frac{1 + |z|}{1 + |Sz|} \leq \frac{1 + |z|}{1 + \lambda_{2n} |z|},$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 + |z|}{1 + \lambda_l |z|} = 1,$$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1 + |z|}{1 + \lambda_l |z|} = \frac{0 + 1}{0 + \lambda_l} = \lambda_l^{-1}.$$

Analog verfahren wir mit dem logarithmischen Teil

$$\frac{\ln(e + |z|)}{\ln(e + \lambda_1 |z|)} \leq \frac{\ln(e + |z|)}{\ln(e + |Sz|)} \leq \frac{\ln(e + |z|)}{\ln(e + \lambda_{2n} |z|)},$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln(e + |z|)}{\ln(e + \lambda_l |z|)} = 1,$$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\ln(e + |z|)}{\ln(e + \lambda_l |z|)} \stackrel{L'Hospital}{=} \frac{\frac{1}{e+|z|}}{\frac{\lambda_l}{e+\lambda_l|z|}} = \frac{1}{\lambda_l} \cdot \frac{e}{|z| + \lambda_l} = 1.$$

Also gilt für feste  $s, t$

$$\frac{m}{m \circ S} \asymp \frac{m_{a,b,0,0}}{m_{a,b,0,0} \circ S}.$$

Angenommen, der exponentielle Teil ist nicht trivial. Dann ist  $b \neq 0$  und  $a \neq 0$ . Setzen wir  $z = z_k = k^\alpha \cdot V_{-,l}$  ein, so erhalten wir

$$\frac{m(z)}{m(Sz)} = \frac{e^{ak^{b\alpha}}}{e^{a\lambda_l^b k^{b\alpha}}} = \exp(ak^{b\alpha}(1 - \lambda_l^b)).$$

Abhängig von  $a$  und  $b$  wählen wir  $l = 1$  oder  $l = 2n$ , sowie  $\alpha = \frac{1}{b}$  um

$$\frac{m(z)}{m(Sz)} = e^{Ak} \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty)$$

zu erhalten.

Das Korollar ist anwendbar, genau dann, wenn  $S \in U(2n, \mathbb{R})$  oder  $a = 0$  oder  $b = 0$ .

Betrachten wir ein weiteres Beispiel mit polynomialer Gewichtsfunktion.

**(4.7) Beispiel**

Nach Beispiel 11.1.1. in [3] gilt

$$(1 + |z|)^s \asymp (1 + |x| + |\omega|)^s, \quad x, \omega \in \mathbb{R}^n, z = (x, \omega).$$

Diese Gewichte vertauschen in  $(x, \omega)$ . Manchmal ist aber nur das Wachstum in einer Richtung von Interesse. Dies motiviert die neue Gewichtsfunktionen

$$p_s(x, \omega) = p_s(x) = (1 + |x|)^s, \quad x, \omega \in \mathbb{R}^n,$$

$$q_t(x, \omega) = q_t(\omega) = (1 + |\omega|)^t, \quad x, \omega \in \mathbb{R}^n.$$

Wir verwenden die Notation

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad z = \begin{pmatrix} x \\ \omega \end{pmatrix}.$$

$$\frac{m \circ S(z)}{m(z)} = \left( \frac{1 + |Ax + B\omega|}{1 + |x|} \right)^s$$

Gelte etwa  $B \neq 0$  und  $s > 0$ , dann gibt es ein  $\omega \in \mathbb{R}^n$  mit  $|B\omega| > |Ae_1|$ . Folglich gilt

$$\left( \frac{1 + |Ae_1 + Bn\omega|}{1 + |e_1|} \right)^s \geq \left( \frac{1 + n|B\omega| - |Ae_1|}{2} \right)^s \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

$S$  ist keine untere Dreiecksmatrix. Dies ist äquivalent dazu, dass  $S^{-1}$  keine untere Dreiecksmatrix ist. Falls  $s < 0$ , dann betrachten wir

$$\frac{m}{m \circ S}(z) = \left( \frac{1 + |Ax + B\omega|}{1 + |x|} \right)^{-s}$$

und kommen auf das gleiche Ergebnis.

Auf der anderen Seite, falls  $S = D_L V_Q$ , dann gilt  $S^{-1} = V_{-Q} D_{L^{-1}} = D_{L^{-1}} V_{-L^{-T} Q L^{-1}}$  und

$$\frac{m \circ S}{m}(x, \omega) = \left( \frac{1 + |Lx|}{1 + |x|} \right)^s.$$

Da  $L$  invertierbar ist, sind alle seine Singulärwerte strikt positiv. Nach der Rechnung in dem ersten Beispiel gilt  $m \asymp m \circ S$ . Der Fall für  $q_t$  und  $C \neq 0$  verläuft analog. Da ist es entscheidend, ob  $S$  eine obere Dreiecksmatrix ist oder nicht.

## Zusammenfassung und Ausblick

Ziel dieser Arbeit war es, die metaplektische Gruppe und ihre Wirkung genauer zu untersuchen.

Die symplektische Gruppe und ihre Überlagerung sind die natürlichen Gruppen, die auftreten, wenn es um Zeit-Frequenz Analyse und unitäre Darstellungen der Heisenberg-Gruppe geht. Man sollte sich aber nicht nur auf der Operatorsichtweise einschränken, sondern auch ihre algebraische Seite hochschätzen. Ohne die Werkzeuge der Theorie der reductiven Lie-Gruppen wären die Strichartz-Ungleichungen praktisch unmöglich. Das Interessante bei diesen Ungleichungen ist, abgesehen von ihrer Gültigkeit, die Menge der zulässigen Exponenten. Bei solchen Ungleichungen sind die zulässigen Exponentenpaare oft Lösungen einer Gleichung (vgl. mit dem Schrödinger-Propagator), während es hier um eine Ungleichung geht und die Menge signifikant größer ist.

Die Wahl von den Modulationsräumen  $M^1$  und  $M^\infty$  liegt an zwei wichtige Eigenschaften. Einerseits, auf Modulationsräumen kann man die Wirkung der metaplektischen Operatoren erkennen, insbesondere des linearen Chirps  $\widehat{V}_Q$ , während auf  $L^p(\mathbb{R}^n)$  seine Wirkung durch den Betrag sofort verloren geht. Auf der anderen Seite sind die metaplektischen Operatoren beschränkt auf  $M^1$  und die Operatoren  $\widehat{U}$ ,  $U \in U(2n, \mathbb{R})$  sind gleichmäßig beschränkt. Wenn man allgemeine Modulationsräume betrachtet, gewichtet oder nicht, gilt das i. A. nicht mehr. Es kann durchaus passieren, dass die Operatoren gar nicht wohldefiniert sind und dann können keine Ungleichungen wie (2.1) oder (2.4) existieren.

Im zweiten Teil geben wir die volle Charakterisierung der Wirkung der metaplektischen Gruppe auf den ungewichteten Modulationsräumen  $M^{p,q}$  an. Diese Lösung des Problems ist ziemlich explizit, man kann es aber an einigen Stellen auch implizit argumentieren. Statt beide Fälle  $p < q$  und  $p > q$  zu betrachten, kann man nur einen Fall explizit zeigen, etwa  $p < q$ , und dann unter Verwendung der Dualitäten

$$(L^{p,q}(\mathbb{R}^{2n \times 2n}))' = L^{p',q'}(\mathbb{R}^{2n \times 2n}), \quad (M^{p,q})' = M^{p',q'}$$

die Unbeschränktheit von  $\widetilde{S}$  begründen. Da muss man aber vorsichtig sein, denn diese Dualitäten gelten nur falls  $p, q \neq \infty$  sind. Auf  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$  wird dies gelöst, indem man  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit dem Dualraum  $(L^1(\mathbb{R}^n))'$  identifiziert. Die analoge Idee funktioniert nicht für  $M^{p,q}$ . Es gilt weder

$$(M^{1,\infty})' = M^{\infty,1} \quad \text{noch} \quad (M^{\infty,1})' = M^{1,\infty},$$

und entsprechend für  $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^{2n})$ ,  $L^{\infty,1}(\mathbb{R}^{2n})$ .

Abschließend wollten wir prüfen, inwiefern die gefundenen Ergebnisse sich auf den gewichteten Räumen übertragen lassen. Wegen der Komplexität der Beziehungen zwischen Modulationsräume zu verschiedenen Gewichten, wurde hier  $\tilde{S}_m$  auf  $V_g(M_m^{p,q})$  nicht untersucht.

Eine wichtige Familie von Gewichten, für die die Beschränktheit von  $\tilde{S}_m$  der Beschränktheit von  $\tilde{S}$  entspricht, sind die polynomiellen Gewichte

$$v_s(z) = m_{0,0,s,0} = (1 + |z|)^s.$$

Ihre besondere Bedeutung liegt an der Charakterisierung der Test-Funktionen  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  und ihren Distributionen  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  als

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{s \geq 0} M_{v_s}^\infty \quad \text{und} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{s \leq 0} M_{v_s}^\infty.$$

Den Beweis dazu findet man in [3], Proposition 11.3.1.

Insgesamt konnten die Besonderheiten der betrachteten Fällen also sinnvoll angewendet werden und stellen potentielle Ansätze für die Lösung des Problem für weitere Gewichte dar, entweder via einer expiziten Rechnung mit einer gut gewählten Funktion, oder implizit via eines Isomorphismus, wie bei  $L_m^{p,q}(\mathbb{R}^{2n})$ .

## § A $Sp(2n, \mathbb{R})$ als reduktive Lie-Gruppe

Die Existenz der KAK-Zerlegung der symplektischen Gruppe ist ein Spezialfall der KAK-Zerlegung für reduktive Lie-Gruppen.

Die Lie-Algebra der symplektischen Gruppe ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R}) &= \{X \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \mid JX + X^T J = 0\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix} \mid A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B = B^T, C = C^T \in \mathbb{R}^{n \times n} \right\} \end{aligned}$$

und ist einer der klassischen Lie-Algebren. Typische Merkmale und Besonderheiten dieser Lie-Algebra findet man in vielen Lehrbüchern, siehe [16], [17] und [18].

Eine reduktive Lie-Gruppe ist eigentlich ein Tupel  $(G, K, \theta, B)$ , das ein paar Kompatibilitätskriterien erfüllen muss, siehe [19], Abschnitt 7.2. Dabei ist  $G$  eine Lie-Gruppe,  $K$  eine kompakte Untergruppe von  $G$ ,  $\theta$  ist eine Involution der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  von  $G$  und  $B$  ist eine nicht-degenerierte,  $Ad(G)$ -invariante,  $\theta$ -invariante Bilinearform auf  $\mathfrak{g}$ . Das zweite Beispiel in [19] bestätigt, dass  $Sp(2n, \mathbb{R})$  in diesem Kontext passt. Nämlich,  $G = Sp(2n, \mathbb{R})$  ist eine zusammenhängende, abgeschlossene Untergruppe von  $GL(2n, \mathbb{R})$ , abgeschlossen unter  $S \mapsto S^{-T}$  und mit

$$\begin{aligned} K &= G \cap O(2n, \mathbb{R}) = U(2n, \mathbb{R}), \\ \theta(X) &= -X^T, \\ B(X, Y) &= \text{Tr}(XY), \end{aligned}$$

erhalten wir eine reduktive Lie-Gruppe. Nun besagt Satz 7.39 in [19], dass es eine KAK-Zerlegung gibt.

### (A.1) Satz (KAK-Zerlegung)

Für jede symplektische Matrix  $S \in Sp(2n, \mathbb{R})$  gibt es zwei Matrizen  $K_1, K_2 \in U(2n, \mathbb{R})$  und eine positiv definite, symplektische Diagonalmatrix  $A = \text{diag}(d_1, \dots, d_n, d_1^{-1}, \dots, d_n^{-1}) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$  mit  $d_i \geq d_{i+1} > 0$  für alle  $1 \leq i \leq n-1$ , die  $S = K_1 A K_2$  erfüllen.

Für die KAK-Zerlegung muss man aber nicht die abstrakte Theorie über reduktive Lie-Gruppen kennen. Man kann es auch explizit konstruieren, indem man die Polarzerlegung  $S = KP$  und die Zerlegung einer positiv definiten Matrix  $P = UAV^T$  (siehe [5], Proposition 32 und Proposition 34) zusammensetzt

$$S = KU A V^T.$$

Diese Zerlegung ähnelt schon viel der Singulärwertzerlegung. Der wesentliche Unterschied ist jedoch die Reihenfolge der Singulärwerte auf der Diagonale. Bei der

Singulärwertzerlegung sind die  $2n$  Singulärwerte absteigend sortiert. Hier sind sie auf der oberen Hälfte der Diagonale genauso sortiert, aber dann ab den  $n + 1$ -ten Eintrag sind sie aufsteigend sortiert. Der Grund dafür ist, dass die Motivation für die KAK-Zerlegung anders als für die Singulärwertzerlegung ist.  $K$  ist die maximale kompakte Untergruppe von  $G$  und  $A = e^{\mathfrak{a}}$ , wobei  $\mathfrak{a} \in \mathfrak{a}$  ein Element der maximalen abelschen Unteralgebra von  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$  ist. Die Aufteilung auf der oberen und unteren Diagonale stammt also von der maximalen abelschen Unteralgebra von  $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$ , die durch

$$\mathfrak{a} = \{D(t) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \mid t \in \mathbb{R}^n\}$$

gegeben ist. Diese aufwändigere Einführung brauchen wir, um das Haarmaß auf  $G$  zu verstehen.

Ein wichtiges Merkmal von Lie-Gruppen sind die Wurzel und die Wurzelsysteme. Zu einem Funktional  $\alpha \in \mathfrak{g}^*, \alpha \neq 0$ , definieren wir

$$L_\alpha := \{x \in \mathfrak{g} \mid [a, x] = \alpha(a)x \ \forall a \in \mathfrak{a}\},$$

dabei ist  $[\cdot, \cdot]$  die Lie-Klammer auf  $\mathfrak{g}$ . Falls  $L_\alpha$  nicht trivial ist, dann heißt  $\alpha$  Wurzel von  $\mathfrak{g}$ . Die Menge der Wurzeln heißt Wurzelsystem von  $\mathfrak{g}$ . Die Wurzeln sind relevant, weil sie eine Zerlegung von  $\mathfrak{g}$  in eindimensionale Unterräume liefern, vorausgesetzt  $\mathfrak{g}$  ist über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Das ist für  $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$  offensichtlich nicht der Fall und die Korrektur kommt durch *relative Wurzeln* (englisch: restricted roots). In diesem Fall besteht aber die Gefahr, dass wir nicht mehr mit eindimensionalen, sondern mit  $d_\alpha$ -dimensionalen Teilräumen zu tun haben, siehe [19], Kapitel 6.

Man kann die Wurzel in positiven und negativen Teil polarisieren. Zur genaueren Bedeutung der Polarisierung verweisen wir auf [18], Kapitel 7. Für das Haarmaß sind nur die relativen positiven Wurzeln relevant. Nun sind wir in der Lage, auf  $G$  bezüglich seines Haarmaßes zu integrieren. Wir zitieren Satz 2.6 von [20].

**(A.2) Satz**

Sei  $(G, K, \theta, B)$  eine reduktive Lie-Gruppe,  $\mathfrak{g}$  die zugehörige Lie-Algebra von  $G$ ,  $\mathfrak{a}$  die maximale abelsche Unteralgebra von  $\mathfrak{g}$  und  $\Sigma^+$  das positive relative Wurzelsystem. Definiere

$$M := \{(k_1, k_2) \in K \times K \mid k_1 e^{\mathfrak{a}} k_2 = e^{\mathfrak{a}} \ \forall \mathfrak{a} \in \mathfrak{a}\}$$

und

$$J(e^{\mathfrak{a}}) := \prod_{\alpha \in \Sigma^+} |\sinh(\alpha(\mathfrak{a}))|^{d_\alpha}, \quad \mathfrak{a} \in \mathfrak{a}.$$

Für alle  $f \in L^1(G, d\mu_G)$  gilt

$$\int_G f(g) d\mu_G(g) = C_0 \int_{e^{\mathfrak{a}}} \left( \int_{(K \times K)/M} f(k_1 e^{\mathfrak{a}} k_2^{-1}) d\mu \right) J(e^{\mathfrak{a}}) d(e^{\mathfrak{a}}), \quad (\text{A.1})$$



dabei ist  $C_0$  eine geeignete Konstante.

Wenden wir diesen Satz auf  $G = Sp(2n, \mathbb{R})$  an. Für den Spezialfall, dass  $f$  biinvariant ist, erhalten wir

$$\int_G f(g) d\mu_G(g) = \mu((K \times K)/M) \int_{e^{\mathfrak{a}}} f(e^{\mathfrak{a}}) J(e^{\mathfrak{a}}) d(e^{\mathfrak{a}}).$$

$K \times K$  ist kompakt als Produkt kompakter Mengen und

$$M = \bigcap_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{a}} \{(k_1, k_2) \in K \times K \mid k_1 e^{\mathfrak{a}} k_2 - e^{\mathfrak{a}} = 0\}$$

ist abgeschlossen als Schnitt abgeschlossener Mengen. Folglich ist  $(K \times K)/M$  als Quotientraum kompakt und sein Maß  $C_1 := \mu((K \times K)/M)$  ist endlich.

Wir bestimmen  $\Sigma^+$ . Hier verweisen wir auf [18], Anhang A.3., wo alle Wurzeln von  $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$  gegeben sind. Wenn man die gleiche Rechnung ausführt, kommt man auf die gleichen Wurzeln. Insbesondere sind alle  $d_{\alpha} = 1$ . Die positiven Wurzeln sind gegeben durch

$$\alpha_{i,j}^{\pm} = e_i \pm e_j, \quad 1 \leq i < j \leq n$$

und

$$\alpha_{i,i} = 2e_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Schließlich bemerken wir, dass  $\sinh$  eine ungerade Funktion ist. Weil  $f$  biinvariant unter der Wirkung von  $K$  ist, finden wir eine Konstante  $C_2$ , sodass

$$\int_G f(g) d\mu_G(g) = C_0 C_1 C_2 \int_{\mathcal{D}_n} f(e^D(t)) \prod_{i < j} \sinh(t_i - t_j) \cdot \prod_{i \leq j} \sinh(t_i + t_j) dt,$$

dabei

$$\mathcal{D}_n := \{t \in (0, +\infty)^n : t_i \geq t_{i+1}, 1 \leq i \leq n-1\},$$

wie es bereits in der Einführung definiert wurde. Mit einer Skalierungstransformation kommen wir auf die Formel in (1.6).

## §B Die $TT^*$ -Methode

Die  $TT^*$ -Methode bezieht sich auf einen Satz über die Beschränktheit von dicht definierten linearen Operatoren von Banachräumen nach Hilberträumen.

### (B.1) Satz

Es bezeichne  $\mathcal{H}$  einen Hilbertraum,  $X$  ein Banachraum und  $\mathcal{D} \subseteq X$  ein dichter Teilraum von  $X$ . Sei  $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$  ein linearer Operator und  $T^* : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$  seine Adjungierte, definiert durch

$$\langle T^*v, f \rangle_{\mathcal{D}} = \langle v, Tf \rangle_{\mathcal{H}}, \quad \forall f \in \mathcal{D}, \forall v \in \mathcal{H},$$

dabei bezeichnet  $\langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}} := \varphi(f)$  und  $\langle v, u \rangle_{\mathcal{H}}$  das Skalarprodukt auf  $\mathcal{H}$  (linear in der ersten Komponente). Dann sind die folgenden drei Aussagen äquivalent.

(a) Es gibt ein  $a \in [0, \infty)$ , sodass für alle  $f \in \mathcal{D}$

$$\|Tf\|_{\mathcal{H}} \leq a \|f\|_X$$

gilt.

(b)  $\mathcal{R}(T^*) \subseteq X'$  und es gibt ein  $a \in [0, \infty)$ , sodass für alle  $v \in \mathcal{H}$

$$\|T^*v\|_{X'} \leq a \|v\|_{\mathcal{H}}$$

gilt.

(c)  $\mathcal{R}(T^*T) \subseteq X'$  und es gibt ein  $a \in [0, \infty)$ , sodass für alle  $f \in \mathcal{D}$

$$\|T^*Tf\|_{X'} \leq a \|f\|_X$$

gilt.

Die Konstante  $a$  ist die gleiche in allen drei Fällen. Falls eine (und somit alle) der Aussagen gilt, dann lassen sich  $T$  und  $T^*T$  stetig fortsetzen als Operatoren von  $X$  nach  $\mathcal{H}$ , bzw. von  $X$  nach  $X'$ .

Den Beweis dazu findet man in [21], Lemma 2.1.

Im Kontext von (2.4), wählen wir  $X = L^{q'}(G, M^{r'})$  und  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ . Sowohl  $q$ , als auch  $r$  ist nicht 1, also sind  $q', r' < \infty$ . Deshalb ist der Dualraum  $X' = L^q(G, M^r)$ .

Der Teilraum

$$\mathcal{D} = \left\{ f : G \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \mid \overline{\{(g, x) \in G \times \mathbb{R}^n : f(g, x) \neq 0\}} \text{ kompakt} \right\}$$

ist dicht in  $X$ . Nun betrachten wir den Operator

$$\tilde{T} : \mathcal{D} \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n), \quad f \mapsto \int_G \hat{S}^{-1} f(\hat{S}, \cdot) dS.$$

Der Operator ist wohldefiniert nach Wahl von  $\mathcal{D}$ . Wir müssen den adjungierten Operator  $\tilde{T}^*$  bestimmen und  $\mathcal{R}(\tilde{T}^* \tilde{T}) \subseteq X'$  verifizieren. Seien  $v \in \mathcal{H}$  und  $f \in \mathcal{D}$ . Falls  $v$  stetig mit kompakten Träger ist, dann gilt

$$\begin{aligned} \langle \tilde{T}^* v, f \rangle_{\mathcal{D}} &= \langle v, \tilde{T} f \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}^n} v(x) \int_G \hat{S}^{-1} f(\hat{S}, \cdot)(x) dS dx = \int_G \int_{\mathbb{R}^n} v(x) \hat{S}^{-1} f(\hat{S}, \cdot)(x) dx dS = \\ &\stackrel{\hat{S} \text{ unitär}}{=} \int_G \int_{\mathbb{R}^n} \hat{S} v(x) f(\hat{S}, \cdot)(x) dx dS = \langle \widehat{(\cdot)} v, f \rangle_{\mathcal{D}}. \end{aligned}$$

Für ein festgewähltes  $f$  induziert dies ein beschränktes Funktional. Da der Raum der stetigen Funktionen mit kompakten Träger dicht in  $L^2(\mathbb{R}^n)$  liegt, gilt für alle  $v \in \mathcal{H}$

$$\langle \tilde{T}^* v, f \rangle_{\mathcal{D}} = \langle \widehat{(\cdot)} v, f \rangle_{\mathcal{D}}.$$

Also ist  $(\tilde{T}^* v)(S) = \hat{S} v = T v$ . Die Bildbedingung wird implizit bewiesen, indem man die Ungleichung

$$\|T \tilde{T} f\|_{L^q(G, M^r)} \lesssim \|f\|_{L^{q'}(G, M^{r'})}$$

zeigt.

## Literatur

- [1] R. S. Strichartz, “Restrictions of fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations,” *Duke Mathematical Journal*, vol. 44, sep 1977.
- [2] A. Cauli, F. Nicola, and A. Tabacco, “Strichartz estimates for the metaplectic representation,” *Revista Matemática Iberoamericana*, vol. 35, pp. 2079–2092, jun 2019.
- [3] K. Gröchenig, *Foundations of Time-Frequency Analysis*. Birkhäuser Boston, 2001.
- [4] F. M. Dopico and C. R. Johnson, “Parametrization of the matrix symplectic group and applications,” *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 31, pp. 650–673, jan 2009.
- [5] M. A. de Gosson, *Symplectic Methods in Harmonic Analysis and in Mathematical Physics*. Springer Basel, 2011.
- [6] G. B. Folland, *Harmonic Analysis in Phase Space. (AM-122)*. Princeton University Press, dec 1989.
- [7] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*. Springer New York, 2009.
- [8] W. Grey and G. Sinnamon, “Product operators on mixed norm spaces,” Feb. 2016.
- [9] H. G. Feichtinger, “Modulation spaces on locally compact abelian groups,” tech. rep., University Vienna, 1983.
- [10] R. Howe, “On a notion of rank for unitary representations of the classical groups,” in *Harmonic Analysis and Group Representation*, pp. 224–331, Springer Berlin Heidelberg, 1982.
- [11] J. Rawnsley, “On the universal covering group of the real symplectic group,” *Journal of Geometry and Physics*, vol. 62, pp. 2044–2058, oct 2012.
- [12] K. Gröchenig, “Weight functions in time-frequency analysis,” In “*Pseudodifferential Operators: Partial Differential Equations and Time-Frequency Analysis*”, L. Rodino et al., eds., *Fields Institute Comm.* 52, pp.343 – 366, 2007, Nov. 2006.
- [13] K.-H. Gröchenig and J. Toft, “Isomorphism properties of Toeplitz operators and pseudo-differential operators between modulation spaces,” May 2009.

- 
- [14] M. Doerfler and K. Groechenig, "Time-Frequency Partitions and Characterizations of Modulation Spaces with Localization Operators," Dec. 2009.
- [15] K. Gröchenig and J. Toft, "The Range of Localization Operators and Lifting Theorems for Modulation and Bargmann-Fock Spaces," *Trans. Amer. Math. Soc.* 365 (2013), no. 8, 4475-4496, Oct. 2010.
- [16] B. C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations*. Springer International Publishing, 2015.
- [17] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Springer New York, 1972.
- [18] A. Kirillov, *An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*. Cambridge University Press, 2008.
- [19] A. W. Knap, *Lie Groups Beyond an Introduction*. Birkhäuser Boston, 1996.
- [20] Z. guang Hu and K. hua Yan, "The Weyl Integration Model for KAK decomposition of Reductive Lie Group," Apr. 2005.
- [21] J. Ginibre and G. Velo, "Smoothing properties and retarded estimates for some dispersive evolution equations," *Communications in Mathematical Physics*, vol. 144, pp. 163–188, feb 1992.