Daten approximation durch endlich erzeugte invariante Teilräume

von
Irina Shafkulovska

Bachelorarbeit in Mathematik

vorgelegt der

Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften der
Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen

im April 2020

angefertigt am Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Hartmut Führ

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Im Rahmen dieser Bachelor-Arbeit wird die Existenz von endlich erzeugten invarianten Räumen bewiesen, die am besten eine endliche Datenmenge approximieren. Die Güte der Approximation wird in der 2 - Norm gemessen, unter allen Räumen mit nicht mehr als eine vorgegebene Anzahl von Generatoren. Zusaetzlich zu der Loesung geben wir auch eine explizite Formel für den Approximationsfehler an.
Wir untersuchen zwei Versionen des Problems. Im ersten Teil werden stets quadrat - integrierbare Funktionen auf lokalkompakte abelsche Gruppen, die die 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, betrachtet. Die Invarianz ist bezüglich einer speziellen Gruppe von Zeit-Frequenz Wirkungen, die unabhängig von der Reihenfolge der Ausführung der Operationen (Translationen und Modulationen) sind. Diese Kommutativität, sowie die Kommutativität der Gruppe selbst, spielt die entscheidende Rolle fuer die Loesung des Problems.
Im zweiten Teil handelt es sich um Approximation im Darstellungsraum einer beliebiger (nicht notwendigerweise irreduzibler) Darstellung π einer kompakten Gruppe. Die Lösung wird auf der von Peter und Weyl entwickelten Theorie für kompakte Gruppen basiert.

§1 Einführung des Approximationsproblems

Der erste Abschnitt hat das Ziel, die Begriffe und Hilfsmittel zur Beantwortung der obigen Fragestellungen zu erarbeiten. Zunächst vereinbaren wir die benutzte Terminologie. Sofern nicht ausdrücklich anders erwähnt, gelten die folgenden

(1.1) Bezeichnungen

(a) Es bezeichne $G = (G, \cdot)$ eine lokalkompakte Gruppe. Falls die Gruppe abelsch ist, wird die Gruppenoperation mit $+$ bezeichnet.

(b) Ein Charakter χ ist ein stetiger Homomorphismus von G nach dem Torus $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Die Wirkung von χ auf $x \in G$ wird als $(x, \chi) := \chi(x)$ notiert.

(c) Der Darstellungsraum einer Darstellung π wird stets mit $\mathcal{H}_\pi$ bezeichnet, $d_\pi := dim(\mathcal{H}_\pi) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Die Norm auf $\mathcal{H}_\pi$ wird mit $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\pi}$ bezeichnet. Für bessere Lesbarkeit wird der Index weggelassen, wenn aus dem Kontext klar ist, um welche Norm es geht.

(d) $\widehat{G} = \big\{[\pi]_\simeq | \pi \text{ irreduzible Darstellung von } G\big\}$ heißt der Dualraum von G. Unter leichten Missbrauch der Notation, wird kein Unterschied zwischen die irreduzible Darstellung π und ihre Äquivalenzklasse $[\pi]_\simeq$ gemacht.

(e) Für $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{H}_\pi$ bezeichne

$$S_\pi(\mathcal{A}) := \overline{span\big\{\pi(x)f : f \in \mathcal{A}, x \in G\big\}}^{\mathcal{H}_\pi}.$$

$S_\pi(\mathcal{A})$ ist der Schnitt aller abgeschlossenen invarianten Teilräume von $\mathcal{H}_\pi$, die $\mathcal{A}$ enthalten.

(f) Eine Teilmenge $V \subseteq \mathcal{H}_\pi$ heißt invariant, falls für alle $f \in V, x \in G$ auch $\pi(x)f \in V$ gilt. Alle abgeschlossenen invarianten Unterräume sind der Form

$$V = \mathcal{S}_\pi(\mathcal{A}) := \overline{span\{\pi(x)\varphi : \varphi \in \mathcal{A}, x \in G\}}^{\mathcal{H}_\pi}$$

für eine Teilemenge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{H}_\pi$. Falls $\mathcal{A}$ endlich ist, dann sagen wir, dass V endliche Länge hat, und $\mathcal{A}$ heißt Menge der Erzeuger (Generatoren) von V. In diesem Fall definieren wir die Länge von V als

$$length(V) := \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \text{ ist ein Erzeuger von } V\}$$

Wir definieren nun das

(1.2) Approximationsproblem
Sei π Darstellung einer lokalkompakten Gruppe G, sowie eine eindliche Datenmenge $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, ..., f_m\} \subseteq \mathcal{H}_\pi$ gegeben. Sei V ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H}_\pi$ und

$$\mathcal{E}(\mathcal{F}, V) := \sum_{j=1}^{m} \|f_j - \mathbb{P}_V f_j\|^2_{\mathcal{H}_\pi} \tag{1.1}$$

sei der Approximationsfehler von $\mathcal{F}$ in V, dabei ist $\mathbb{P}_V$ die orthogonale Projektion von $\mathcal{H}_\pi$ auf V.
Wir interessieren uns für die folgenden Fragen:

1. Gibt es für jede vorgegebene natürliche Zahl $n < m$ einen abgeschlossenen invarianten Teilraum der Länge kleiner oder gleich n, der $\mathcal{F}$ am besten approximiert, d.h. gibt es Punkte $\psi_1, ..., \psi_n \in \mathcal{H}_\pi$, sodass

$$\mathcal{E}(F, \mathcal{S}_\pi(\psi_1, ..., \psi_n)) \leqslant \mathcal{E}(F, V)$$

   für alle invarianten abgeschlossenen Teilräume V von $\mathcal{H}_\pi$ mit $length(V) \leqslant n$?

2. Falls der Mininierer existiert, wie groß ist der Fehler?

Wir werden zeigen, dass unter gewisse Annahmen, der Minimierer immer existiert, und geben eine Möglichkeit an, ihn zu bestimmen. Die Beweisidee ist, unendlich viele Approximationsprobleme in neuen Räumen simultan zu lösen. Die reduzierten Probleme lösen wir mit dem Satz von Eckart - Young. Schliesslich setzen wir die Ergebnisse zusammen und erhalten die gesuchte Lösung.

(1.3) Satz (Eckart-Young)
Seien H ein Hilbert-Raum, $\mathcal{F} = \{f_1, ..., f_m\} \subseteq H, n \leqslant m$ und $G \in \mathbb{C}^{m \times m}, G_{i,j} = \langle f_i, f_j \rangle$. Seien $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant ... \geqslant \lambda_m \geqslant 0$ die Eigenwerte mit den zugehörigen Linkseigenvektoren $y_1, ..., y_m,\ y_i = (y_{i1}, ..., y_{im})^t$. Definiere

$$q_i := \tilde{\sigma}_i \sum_{j=1}^{m} y_{i,j} f_j \quad i = 1, ..., n \tag{1.2}$$

mit

$$\tilde{\sigma}_i := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} & \text{falls } \lambda_i \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann existieren $0 < A \leqslant B < \infty$, sodass $A\|v\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\langle v, q_i \rangle|^2 \leqslant B\|v\|^2$ für alle $v \in Q = span\{q_1, ..., q_n\}$ und Q ist optimal im Sinne, dass

$$\sum_{i=1}^{m} \|f_i - P_Q f_i\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{m} \|f_i - P_W f_i\|^2 \qquad \forall W \subseteq H, dim(W) \leqslant n$$

Zudem ist der Fehler $\sum\limits_{i=n+1}^{m} \lambda_i$.
Falls $\lambda_n > \lambda_{n+1}$, dann ist der optimale Teilraum eindeutig.

Beweis
Der endlich dimensionale Fall ist die klassiche Formulierung der Satz von Eckart-Young, die aus dem Sprektralsatz und der Singulärwertzerlegung folgt (siehe [2] Satz (7.9) und [6] Satz (4.27)). Der unendlich dimensionale Fall kann auf den endlich dimensionale Fall reduziert werden (siehe [1]). □

§2 Daten approximation durch Zeit - Frequenz Invariante Systeme

— Hintergrundtheorie —

Zunächst untersuchen wir das Approximationsproblem für den Fall, dass G eine lokalkompakte abelsche Gruppe ist. Wir nehmen an, dass die Topologie $\mathcal{T}_G$ auf der Gruppe das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.
Wir listen die relevanten Begriffe für die Problemstellung, sowie einige Besonderheiten von abelschen Gruppen auf:

(2.1) Bemerkungen

(a) Jede irreduzible Darstellung in $\widehat{G}$ ist Multiplikation mit einem Charakter. Deswegen wird $\widehat{G}$ mit der Menge aller Charaktere von G identifiziert. $\widehat{G}$ ist eine Gruppe (die Dualgruppe) mit der Gruppenoperation $(x, \chi_1 \cdot \chi_2) = (x, \chi_1) \cdot (x, \chi_2)$.
Die Topologie auf $\widehat{G}$ ist die Topologie kompakter Konvergenz:
Eine Basis des Umgebungssystems $\mathcal{U}(\varphi_0)$ von $\varphi_0 \in \widehat{G}$ ist gegeben durch

$$\mathcal{N}(\varphi_0) = \left\{ \{\varphi : |\varphi(x) - \varphi_0(x)| < \varepsilon \ \forall x \in K\} \middle| K \subseteq G \text{ kompakt}, \varepsilon > 0 \right\}$$

Damit ist $\widehat{G}$ eine lokalkompakte abelsche Gruppe.

(b) Die Dualgruppe von $\widehat{G}$, $\widehat{\widehat{G}} = \widehat{(\widehat{G})}$, heißt die Bidualgruppe von G. Nach dem Pontryagin Dualitätssatz sind $\widehat{\widehat{G}}$ und G kanonisch isomorph.

(c) $\widehat{G}$ is kompakt, falls G diskret ist. $\widehat{G}$ ist diskret, falls G kompakt ist.

(d) Eine Untergruppe $L < G$ heißt kokompaktes Gitter, falls die zugehörige Relativtopologie diskret ist und G/L ist kompakt in der Quotienttopologie.

(e) Der Anihilator von L ist $L^\perp = \{\chi \in \widehat{G} : \chi(l) = 1 \ \forall l \in L\}$.

(f) Seien $L < G$ und $\mathcal{B} \subseteq L^\perp$ kokompakte Gitter in G, bzw. $L^\perp$. Für $f \in L^2(G), l \in L$ und $\beta \in \mathcal{B}$ bezeichnen wir mit $T_l f(x) = f(x - l), x \in G$ der Translationsoperator, und mit $M_\beta f(x) = (x, \beta) f(x), x \in G$ der Modulationsoperator. Für $f \in L^2(G)$ heißt die Menge

$$\{T_l M_\beta f : l \in L, \beta \in \mathcal{B}\}$$

das von f generierte Zeit-Frequenz System.

(g) Da $\mathcal{B} \subseteq L^{\perp}$, gilt für alle $x \in G, l \in L, \beta \in \mathcal{B}$

$$\begin{aligned} T_l M_\beta f(x) &= M_\beta f(x-l) = (x-l,\beta) f(x-l) \\ &= (x,\beta)\cdot(l,\beta)^{-1} f(x-l) \\ &= (x,\beta) f(x-l) = M_\beta T_l f(x) \end{aligned}$$

Also ist $\Pi(l,\beta) := T_l M_\beta \in \mathcal{U}(L^2(G))$ eine unitäre Darstellung der abelschen Gruppe $\Gamma := L \times \mathcal{B}$. Die Gruppenoperation ist

$$(l_1,\beta_1)\cdot(l_2,\beta_2) = (l_1+l_2, \beta_1\cdot\beta_2)$$

Im Kontext vom Approximationsproblem (1.2), ist in diesem Abschnitt die untersuchte Gruppe Γ, der Hilbertraum ist stets $\mathcal{H}_\pi = L^2(G)$, und die Darstellung wird die oben definierte Π sein. Da die Invarianz der Teilräume eigentlich von der Wahl von Γ abhängt, bezeichnen wir die generierten Räume $S_\Pi(\mathcal{A})$ mit $S_\Gamma(\mathcal{A})$, um klarer zu machen, wie der Raum erzeugt wird.
Für die erwähnte Reduktion benötigen wir eine bijektive Isometrie H_Γ, die mit Π und den Charakteren von Γ vertauscht. Der Isomorphismus sollte die Umsetzung der Probleme leisten. Die neuen Probleme sind einfacher, denn da handelt es sich um quadratsummierbare Folgen und so können wir viel besser die Wirkung von Γ verstehen und manipulieren.
Wir merken, dass ein Γ-invarianter abgeschlossener Teilraum $V = \mathcal{S}_\Gamma(\mathcal{A}) \subseteq L^2(G)$ auch L-invariant ist:

$$V = S_\Gamma(\mathcal{A}) = S_L(\{M_\beta f : f \in \mathcal{A}, \beta \in \mathcal{B}\})$$

Die technischen Voraussetzungen für die kommenden Abschnitte liefert der folgende

(2.2) Satz
Sei G eine lokalkompakte abelsche Gruppe, die das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Falls $L \subseteq G$ ein abzählbares kokompkates Gitter ist, dann gelten die folgenden Aussagen:

(a) G ist separabel.

(b) $L \subseteq G$ ist abgeschlossen.

(c) $\widehat{L} \cong \widehat{G}/L^{\perp}$ und $\widehat{(G/L)} \cong L^{\perp}$.

(d) $L^{\perp} \subseteq \widehat{G}$ ist abgeschlossen, diskret und abzählbar.

(e) $\widehat{G}/L^{\perp}$ ist eine kompakte Gruppe.

(f) Es gibt ein messbares Vetretersystem von G/L. Darüber hinaus, gibt es ein relativ kompaktes Vertretersystem von G/L.

Beweis

(a) Das 2. Abzählbarkeitsaxiom impliziert Separabilität für alle topologischen Räume.

(b) L ist diskret, insbesondere lokalkompakt in der Relativtopologie. Dies impliziert $L = \overline{L}$ in G (siehe [8] Lemma (4.31)).

(c) Mit (b) lässt sich Satz (2.1.2) in [12] anwenden.

(d) $L^{\perp} \cong \widehat{(G/L)}$ ist diskret, da G/L kompakt ist. Die Abgeschlossenheit folgt wie in (b). Eine lokalkompakte Gruppe ist diskret, genau dann, wenn sie abzählbar ist.

(e) $\widehat{G}/L^{\perp} \cong \widehat{L}$ ist kompakt, da L diskret ist.

(f) siehe [7] und [10] Lemma 2. □

Man beachte in diesem Zusammenhang die

(2.3) Bemerkung

Der Satz (2.2) bedeutet, dass $L^{\perp}$ ein messbares, abzählbares, kokompaktes Giter in $\widehat{G}$ ist. $\widehat{G}$ erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom, genau dann, wenn G das 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, also ist dieser Satz auch für $L^{\perp}$ anwendbar. Insbesondere gibt es ein messbares, relativ kompaktes Vertretersystem $T_{L^{\perp}} \subseteq \widehat{G}$ von $\widehat{G}/L^{\perp}$.

(2.4) Definition

Sei $(X, d\mu)$ ein messbarer Raum, $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Eine Funktion $f : X \to \mathcal{H}$ heißt messbar, falls für alle $a \in \mathcal{H}$ die Abbildung

$$x \to \langle f(x), a \rangle$$

messbar in der üblichen Sinne ist.
$L^2(X, \mathcal{H})$ ist der Raum der messbaren Abbildungen $f : X \to \mathcal{H}$ mit

$$\int_X \|f(x)\|^2 d\mu(x) < \infty$$

$L^2(X, \mathcal{H})$ ist ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$\langle \Phi, \Psi \rangle := \int_X \langle \Phi(x), \Psi(x) \rangle d\mu(x), \quad \Phi, \Psi \in L^2(X, \mathcal{H})$$

(2.5) Beispiel
Sei $(X, d\mu) = (\mathbb{R}^n, \lambda^n)$ und $\mathcal{H} = \mathbb{R}^d$ mit der Euklidischen Norm. Dann ist eine Abbildung $f : X \longrightarrow \mathcal{H}, x \longrightarrow (f_1(x), ..., f_d(x))^t$ messbar, falls

$$x \to \langle f(x), a \rangle = \Big(\sum_{i=1}^{d} f_i(x) a_i \Big)^{\frac{1}{2}}$$

messbar ist. Dies gilt genau dann, wenn $f_1, ..., f_d$ messbar in der üblichen Sinne sind. f ist in $L^2(X, \mathcal{H})$ genau dann, wenn $f_1, ..., f_d \in L^2(\mathbb{R})$.

Sei $\widehat{f}(\omega) = \int_G f(x)\overline{(x, \omega)}dx$ die Plancharel Transformation von $f \in L^2(G)$.
Es bezeichne $L^2(T_{L^\perp}, l^2(L^\perp))$ der Raum der messbaren Funktionen $f : T_{L^\perp} \longrightarrow l^2(L^\perp)$ mit

$$\int_{T_{L^\perp}} \|f(\omega)\|^2_{l^2(L^\perp)} d\mu_{\widehat{G}}(\omega) < \infty$$

Nach Proposition (3.3) in [5] ist die Abbildung $\mathcal{J} : L^2(G) \longrightarrow L^2(T_{L^\perp}, l^2(L^\perp))$ gegeben durch

$$(\mathcal{J}f)(\omega) = \{\widehat{f}(\omega + \lambda)\}_{\lambda \in L^\perp}, f \in L^2(G) \tag{2.1}$$

unitär.

(2.6) Definition
Eine Range Function ist eine Abbildung

$$J : T_{L^\perp} \longrightarrow \{V \subseteq l^2(L^\perp) : V \text{ abgeschlossener Teilraum}\}$$

J heißt messbar, falls für alle $a \in l^2(L^\perp)$ die Projektion von $T_{L^\perp}$ auf $J(\omega)$ $a \to P_\omega a$ messbar ist.

Nach dem Satz (3.10) in [5] gibt es für den L-invarianten Teilraum $V = S_\Gamma(\mathcal{A})$ eine messbare Range Function J, sodass

$$J(\omega) = \overline{span\{\mathcal{J}(M_\beta \varphi)(\omega) : \beta \in \mathcal{B}, \varphi \in \mathcal{A}\}}^{l^2(L^\perp)}, \text{ f.ü. in } T_{L^\perp} \tag{2.2}$$

Für alle $\beta \in \mathcal{B}, \varphi \in L^2(G)$ gilt

$$\mathcal{J}(M_\beta \varphi)(\omega) = \{\widehat{M_\beta \varphi}(\omega + \lambda)\}_{\lambda \in L^\perp} = \{\widehat{\varphi}(\omega + \lambda - \beta)\}_{\lambda \in L^\perp} = t_\beta(\mathcal{J}\varphi(\omega)) \tag{2.3}$$

dabei ist t_β der komponentenweise Translationsoperator um β auf $l^2(L^\perp)$. Also vertauscht $\mathcal{J}$ Modulationen mit Translationen. Aus den letzten zwei Rechnungen folgt für fast alle $\omega \in T_{L^\perp}$

$$J(\omega) = \overline{span\{t_\beta(\mathcal{J}\varphi(\omega)) : \beta \in \mathcal{B}, \varphi \in \mathcal{A})}^{l^2(L^\perp)}$$

Also ist $J(\omega)$ ein $\mathcal{B}$-invarianter Teilaraum von $L^2(L^\perp)$.
Sei $\mathcal{B}^\perp \subseteq G$ der Anihilator von $\mathcal{B}$. $\mathcal{B}^\perp$ ist nach (2.2) kompakt und diskret, also endlich. Somit können wir die folgenden Vertretersysteme wählen.

(2.7) Bezeichnungen

(a) $T_{L^\perp}$ bezeichnet ein messbares, relativ kompaktes Vertretersystem von $\widehat{G}/L^\perp$.

(b) $T_{\mathcal{B}^\perp}$ bezeichnet ein messbares, relativ kompaktes Vertretersystem von $\widehat{L^\perp}/\mathcal{B}^\perp$.

Zum Veranschaulichen der bis jetzt eingeführten Begriffe betrachten wir die folgenden

(2.8) Beispiele

(a) Sei $G = \mathbb{R}, L = \mathbb{Z}$. Es gilt $\mathbb{R} \cong \widehat{\mathbb{R}}$, $L^\perp \cong \mathbb{Z}$ und $\widehat{L^\perp} \cong [0,1)$.
Sei $\mathcal{B} \cong n\mathbb{Z}$. Dann gilt $l \in \mathcal{B}^\perp$, genau dann, wenn $l \in [0,1)$ und $e^{2\pi i l \cdot nk} = 1 \forall k \in \mathbb{Z}$, das heißt

$$\mathcal{B}^\perp = [0,1) \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z} = \{0, \frac{1}{n}, ..., \frac{n-1}{n}\}$$

Eine mögliche Wahl der Vertretersysteme ist $T_{L^\perp} = [0,1)$ und $T_{\mathcal{B}^\perp} = [0, \frac{1}{n})$.

(b) Seien $p, q \in \mathbb{N}, d = pq$ und $G = \mathbb{Z}_d = \{0, 1, .., d-1\}$.
Sei $L = \{np : n \in \{0, 1, ..., q-1\}\} \cong \mathbb{Z}_q$. Der Anihilator ist

$$L^\perp = \{\lambda \in \{0, 1, ..., d-1\} : e^{2\pi i \frac{\lambda n p}{d}} = 1 \forall n \in \mathbb{Z}_q\} \cong \{kq : k = \{0, 1, ..., p-1\}\} \cong \mathbb{Z}_p.$$

Ein Vertertersystem von $L^\perp$ in $\widehat{G} \cong G$ ist $T_{L^\perp} = \{0, 1, .., q-1\} \cong \mathbb{Z}_q$. Die Charaktere von $L^\perp$ sind der Form

$$\chi_\nu(\lambda) = e^{2\pi i \frac{\lambda \nu}{p}},\ \lambda \in L^\perp,\ \nu \in \{\frac{l}{q} : l \in \{0, 1, ..., p-1\}\},$$

also $\widehat{L^\perp} \cong \mathbb{Z}_p$.
Nehmen wir nun an, dass $p = rs$ für $r, s \in \mathbb{N}$ und sei $\mathcal{B} \subseteq L^\perp$

$$\mathcal{B} = \{0, rq, 2rq, ..., (s-1)rq\} = \{jrq : j \in \{0, 1, ..., s-1\}\} \cong \mathbb{Z}_s$$

Der Anihilator von $\mathcal{B}$ in $\widehat{L^\perp}$ ist dann

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^\perp &= \left\{b \in \{\frac{l}{q} : l \in \{0, 1, .., p-1\}\} : e^{\pi i \frac{bjrq}{p}} = 1 \forall j \in \{0, 1, ..., s-1\}\right\} \\ &= \left\{h\frac{s}{q} : h \in \{0, 1, ..., r-1\}\right\} \cong \mathbb{Z}_r\end{aligned}$$

Ein Vertretersystem in $\widehat{L^\perp}$ für $\mathcal{B}^\perp$ ist $T_{\mathcal{B}^\perp} = \left\{0, \frac{1}{q}, .., \frac{s-1}{q}\right\} \cong \mathbb{Z}_s$.

— Die Zak Transformation —

Wie das Titel suggeriert, beschäftigen wir uns mit der Zak Transformation. Das wird als Hauptmittel für die Konstruktion der oben ehrwähnten Isometrie dienen. Diese Isometrie wird dann im folgenden Unterabschnitt eine vereinfachte Berechnung des Approximationsfehlers liefern.
Nach Proposition (3.3) in [5] ist die Abblidung

$$\begin{gathered}\mathcal{K} : l^2(L^\perp) \longrightarrow L^2(T_{\mathcal{B}^\perp}, l^2(\mathcal{B}^\perp)) \\ \mathcal{K}(\{a(\lambda)\}_{\lambda\in L^\perp})(t) = \{(\{a(\lambda)\}_{\lambda\in L^\perp})\hat{}\,(t+b)\}_{b\in\mathcal{B}^\perp} = \{\sum_{\lambda\in L^\perp} a(\lambda)\overline{(t+b,\lambda)}\}_{b\in\mathcal{B}^\perp}\end{gathered} \tag{2.4}$$

unitär. Zudem, jeder $\mathcal{B}$-invariante Teilraum $J(\omega), \omega \in T_{L^\perp}$ hat eine assozierte messbare Range Function

$$J(\omega,\cdot) : T_{\mathcal{B}^\perp} \longrightarrow \{V \subseteq l^2(\mathcal{B}^\perp) : V \text{ abgeschlossener Teilraum}\}$$

sodass, für fast alle $t \in T_{\mathcal{B}^\perp}, J(\omega,t) = \overline{span\{\mathcal{K}(\mathcal{J}\varphi)(\omega))(t) : \varphi \in \mathcal{A}\}}^{l^2(\mathcal{B}^\perp)}$. Nach Definition von $\mathcal{K}$ und $\mathcal{J}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathcal{K}((\mathcal{J}f)(\omega))(t) &= \mathcal{K}(\{\hat{f}(\omega+\lambda)_{\lambda\in L^\perp})(t) \\ &= \{\sum_{\lambda\in L^\perp}\hat{f}(\omega+\lambda)\overline{(t+b,\lambda)}\}_{b\in\mathcal{B}^\perp}\end{aligned} \tag{2.5}$$

für alle $f \in L^2(G), \omega \in T_{L^\perp}, t \in T_{\mathcal{B}^\perp}$.

(2.9) Definition
Für $f \in L^2(G), \omega \in \widehat{G}$ und $t \in G$ heißt

$$\mathcal{Z}f(\omega,t) := \sum_{\lambda\in L^\perp}\hat{f}(\omega+\lambda)\overline{(t,\lambda)} \tag{2.6}$$

die Zak Transformierte von $\hat{f}$ bezüglich des Gitters $L^\perp$. Die Abbildung $f \longrightarrow \mathcal{Z}f$ heißt die Zak Transformation bezüglich des Gitters $L^\perp$.

Es gilt $\mathcal{K}((\mathcal{J}f)(\omega))(t) = \{\mathcal{Z}f(\omega,t+b)\}_{b\in\mathcal{B}^\perp}$.
Ein Hilfsmittel für den Hauptsatz des Kapitels ist das

(2.10) Lemma
Seien $\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2$ Hilberträume und $\sigma : \mathbb{H}_1 \longrightarrow \mathbb{H}_2$ unitär. Für einen messbaren Raum $(X, d\mu)$ ist die Abbildung

$$Q_\sigma : L^2(X,\mathbb{H}_1) \longrightarrow L^2(X,\mathbb{H}_2),\ (Q_\sigma f)(x) = \sigma(f(x))$$

ebenfalls unitär.

Beweis
Sei $f \in L^2(X, \mathbb{H}_1)$, d.h. für jedes $y \in \mathbb{H}_1$ ist $x \longrightarrow \langle f(x), y\rangle_{\mathbb{H}_1}$ messbar. Für $z \in \mathbb{H}_2$ gilt

$$\langle Q_\sigma f(x), z\rangle_{\mathbb{H}_2} = \langle \sigma(f(x)), z\rangle_{\mathbb{H}_2} = \langle f(x), \sigma^*(z)\rangle_{\mathbb{H}_1} = \langle f(x), \sigma^{-1}(z)\rangle_{\mathbb{H}_1}.$$

Also ist Qf messbar. Zudem gilt für $f, g \in L^2(X, \mathbb{H}_1)$

$$\langle Qf, Qg\rangle_{L^2(X,\mathbb{H}_2)} = \int_X \langle \sigma(f(x)), \sigma(g(x))\rangle_{\mathbb{H}_2} d\mu(x) = \int_X \langle f(x), g(x)\rangle_{\mathbb{H}_1} d\mu(x) = \langle f, g\rangle_{L^2(X,\mathbb{H}_1)}$$

Dies zeigt, dass Q_σ isometrisch ist. Offensichtlich ist die Inverse von Q_σ gegeben durch

$$Q_\sigma^{-1} : L^2(X, \mathbb{H}_2) \longrightarrow L^2(X, \mathbb{H}_1),\ (Q_\sigma^{-1} g)(x) = \sigma^*(g(x))$$

Also ist Q_σ unitär. □

Für bessere Lesbarkeit des folgenden Satzes vereinbaren wir die

(2.11) Bezeichnungen

(a) $X_\beta : G \longrightarrow \mathbb{T}, x \longrightarrow (x, \beta)$ bezeichnet den Charakter $\beta \in \mathcal{B}$.

(b) $X_l : \widehat{G} \longrightarrow \mathbb{T}, \omega \longrightarrow (l, \omega)$ bezeichnet den Charakter $l \in L$ (als Element der Bidualgruppe $\widehat{\widehat{G}}$).

(2.12) Satz
Sei G eine lokal kompakte abelsche Gruppe, die die 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Seien L und $\mathcal{B}$ kokompakte Gitter in G bzw. $\widehat{G}$, mit $\mathcal{B} \subseteq L^\perp$. Sei $\Gamma = L \times \mathcal{B}$ und definiere

$$\begin{aligned} H_\Gamma : L^2(G) &\longrightarrow L^2(T_{L^\perp} \times T_{\mathcal{B}^\perp}, l^2(\mathcal{B}^\perp)), \\ H_\Gamma f(\omega, t) &:= \{\mathcal{Z} f(\omega, t + b)\}_{b \in \mathcal{B}^\perp} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Dann gilt:

(a) H_Γ vertauscht Π mit den Charakteren von Γ, d.h. für alle $f \in L^2(G), l \in L, \beta \in \mathcal{B}$ gilt

$$H_\Gamma \Pi(l, \beta) f = X_{-l} X_{-\beta} H_\Gamma f.$$

(b) H_Γ ist unitär.

Beweis
Zu (a): Für alle $b \in \mathcal{B}^\perp$, folgt aus der Definition von $\mathcal{Z}$ und die Eigenschaften der Fouriertransformation

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\Pi(l, \beta) f(\omega, t + b) &= \sum_{\lambda \in L^\perp} \widehat{T_l M_\beta f}(\omega + \lambda) \overline{(t + b, \lambda)} \\ &= \sum_{\lambda \in L^\perp} \overline{(l, \omega + \lambda)} \widehat{f}(\omega + \lambda - \beta) \overline{(t + b, \lambda)} \end{aligned}$$

$(l,\lambda) = 1$, $\lambda - \beta = \tilde{\lambda}$ und $(t+b,\beta) = (t,\beta)\cdot(b,\beta)$ implizieren nun

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\Pi(l,\beta)f(\omega,t+b) &= \overline{(l,\omega)} \sum_{\tilde{\lambda}\in L^{\perp}} \widehat{f}(\omega+\tilde{\lambda})\overline{(t+b,\tilde{\lambda}+\beta)} \\ =&\overline{(l,\omega)(t,\beta)} \sum_{\tilde{\lambda}\in L^{\perp}} \widehat{f}(\omega+\tilde{\lambda})\overline{(t+b,\tilde{\lambda})} = X_{-l}(\omega)X_{-\beta}(t)\mathcal{Z}f(\omega,t+b) \end{aligned}$$

Um (b) zu zeigen, merken wir zunächst, dass $H_\Gamma f(\omega,t) = \mathcal{K}(\mathcal{J}f(\omega))(t)$. Damit ist H_Γ isometrisch, da $\mathcal{J}$ und $\mathcal{K}$ isometrisch sind. Es bleibt also zu zeigen, dass H_Γ surjektiv ist.
Da $\mathcal{K}$ untär ist, folgt aus Lemma (2.10), dass auch

$$Q_{\mathcal{K}} : L^2(T_{L^\perp}, l^2(L^\perp)) \longrightarrow L^2(T_{L^\perp}, l^2(T_{\mathcal{B}^\perp}, l^2(\mathcal{B}^\perp))),\ (Q_{\mathcal{K}}f)(x) = \mathcal{K}(f(\omega))$$

unitär ist. Die Hilbertraume $L^2(T_{L^\perp}, L^2(T_{\mathcal{B}^\perp}, l^2(\mathcal{B}^\perp)))$ und $L^2(T_{L^\perp}\times T_{\mathcal{B}^\perp}, l^2(\mathcal{B}^\perp))$ sind isomorph nach dem Satz von Fubini via den Isomorphismus

$$\Phi(f)(w,t) = f(w)(t), f \in L^2(T_{L^\perp}, L^2(T_{\mathcal{B}^\perp}, l^2(\mathcal{B}^\perp)))$$

Sei nun $F \in L^2(T_{L^\perp}\times T_{\mathcal{B}^\perp}, L^2(l^2(\mathcal{B}^\perp)))$. Wähle $g \in L^2(T_{L^\perp}, l^2(L^\perp))$ mit $\Phi\circ Q_{\mathcal{K}}(g) = F$, und $f \in L^2(G), \mathcal{J}(f) = g$. Dann gilt

$$\begin{aligned} F(\omega,t) =&\Phi\circ Q_{\mathcal{K}}(g)(\omega,t) = Q_{\mathcal{K}}(g)(\omega)(t) = \mathcal{K}(g(\omega))(t) \\ &H_\Gamma f(\omega,t) = \mathcal{K}(\mathcal{J}f(\omega))(t) = F(\omega,t) \end{aligned} \qquad \square$$

Wir betrachten den letzten Satz im Kontext der zyklischen Gruppen aus Beispiel (2.8)(b).

(2.13) Beispiel
Für $f \in \mathbb{C}^d$ ist die Fouriertransformierte

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{g=0}^{d-1} f(g)e^{-2\pi i \frac{g\omega}{d}}, \omega \in \{0,...,d-1\}$$

Für $t \in T_{\mathcal{B}^\perp} = \{0, \frac{1}{q}, .., \frac{s-1}{q}\}$ ist die Zak Transformierte

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}f(\omega,t) &= \sum_{k=0}^{p-1} \widehat{f}(\omega+kq)e^{-2\pi i\frac{kqt}{p}} = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{g=0}^{d-1} f(g)e^{-2\pi i \frac{g(\omega+kq)}{d}} e^{-2\pi i \frac{kqt}{p}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{g=0}^{d-1} f(g)e^{-2\pi i\frac{g\omega}{d}} K(g+qt) = \frac{e^{2\pi i \frac{gt\omega}{d}}}{\sqrt{d}} \sum_{g=0}^{d-1} f(g-qt)e^{-2\pi i \frac{g\omega}{d}} K(g) \end{aligned}$$

dabei ist $K(g) = \sum_{k=0}^{p-1}(e^{-2\pi i \frac{g}{p}})^k = \begin{cases} p & , g \in L \\ 0 & , g \notin L \end{cases}$. Daraus ergibt sich

$$\mathcal{Z}f(\omega, t) = \sqrt{p}e^{2\pi i \frac{qt\omega}{d}} \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{n=0}^{q-1} f(pn - qt)e^{-2\pi i \frac{pn\omega}{q}}$$

Für die Lösung des Approximationsproblem (1.2) benötigen wir noch ein Ergebnis über die Projektionen auf die betrachteten Teilräume:
Sei $V = \mathcal{S}_\Gamma(\mathcal{A})$ ein Γ-invarianter Teilraum von $L^2(G)$ wie in (1.1)(g). Wir betrachten die Range Function

$$J_V : T_{L^\perp} \times T_{\mathcal{B}^\perp} \longrightarrow \{H \subseteq l^2(\mathcal{B}^\perp) : H \text{ abgeschlossener Teilraum}\}$$

$$J_V(\omega, t) := \overline{span\{H_\Gamma \varphi(\omega, t) : \varphi \in \mathcal{A}\}}^{l^2(\mathcal{B}^\perp)} \tag{2.8}$$

(2.14) Proposition
Sei $V = \mathcal{S}_\Gamma(\mathcal{A})$ und $\mathcal{P}_{J_V(\omega,t)}$ die orthogonale Projektion von $l^2(\mathcal{B}^\perp)$ auf $J_V(\omega, t)$. Dann gilt für alle $f \in L^2(G)$ und alle $(\omega, t) \in T_{L^\perp} \times T_{\mathcal{B}^\perp}$

$$H_\Gamma \mathbb{P}_{\mathcal{S}_\Gamma(\mathcal{A})} f(\omega, t) = \mathcal{P}_{J_V(\omega,t)}(H_\Gamma f(\omega, t))$$

Beweis
H_Γ ist unitär, deswegen gilt

$$H_\Gamma \mathbb{P}_{\mathcal{S}_\Gamma(\mathcal{A})} = \mathbb{P}_{H_\Gamma(\mathcal{S}_\Gamma(\mathcal{A}))} H_\Gamma \tag{2.9}$$

Die Menge $\mathcal{D} := \{X_l X_\beta : (l, \beta) \in \Gamma\}$ von Charakteren von Γ bestimmt $L^1(T_{L^\perp} \times T_{\mathcal{B}^\perp})$ im folgenden Sinne: für alle $f \in L^1(T_{L^\perp} \times T_{\mathcal{B}^\perp})$ gilt

$$\int_{T_{L^\perp} \times T_{\mathcal{B}^\perp}} f(\omega, t) X_l(\omega) X_\beta(t) d(\omega, t) = 0 \quad \forall X_l X_\beta \in \mathcal{D}$$
$$\Rightarrow f = 0$$

Das sieht man wie folgt: das Haarmaß auf $T_{L^\perp} \times T_{\mathcal{B}^\perp}$ ist eindeutig bis auf eine multiplikative Konstante, und das Produktmaß $d\omega \otimes dt$ ist ein Haarmaß. Also gilt für f wie oben

$$\int_{T_{L^\perp} \times T_{\mathcal{B}^\perp}} f(\omega, t) X_l(\omega) X_\beta(t) d(\omega, t) =$$
$$\int_{T_{L^\perp}} \int_{T_{\mathcal{B}^\perp}} f(\omega, t) X_l(\omega) X_\beta(t) dt d\omega = \int_{T_{L^\perp}} X_l(\omega) \int_{T_{\mathcal{B}^\perp}} f(\omega, t) X_\beta(t) dt d\omega =$$
$$\int_{T_{\mathcal{B}^\perp}} \int_{T_{L^\perp}} f(\omega, t) X_l(\omega) X_\beta(t) d\omega dt = \int_{T_{\mathcal{B}^\perp}} X_\beta(t) \int_{T_{L^\perp}} f(\omega, t) X_l(\omega) d\omega dt = 0.$$

Aus der Eindeutigkeit der Fouriertransformation auf $T_{L^\perp}$ und $T_{\mathcal{B}^\perp}$ ergibt sich

$$\int_{T_{\mathcal{B}^\perp}} f(\omega,t)X_\beta(t)dt = 0\ \forall \beta \in \mathcal{B}, \quad \text{f.ü. in } \omega \in T_{L^\perp} \quad \Rightarrow \quad f(\omega,\cdot) = 0 \quad \text{f.ü. in } \omega \in T_{L^\perp}$$
$$\int_{T_{L^\perp}} f(\omega,t)X_l(\omega)d\omega = 0\ \forall l \in L, \quad \text{f.ü. in } t \in T_{\mathcal{B}^\perp} \quad \Rightarrow \quad f(\cdot,t) = 0 \quad \text{f.ü. in } t \in T_{\mathcal{B}^\perp}$$

Mit den Standardargumenten lässt sich nun leicht nachweisen, dass $f = 0$ f.ü. in $T_{L^\perp} \times T_{\mathcal{B}^\perp}$.
Nach Satz (2.12)(a) gilt für alle $f \in L^2(G), H_\Gamma(T_l M_\beta f) = X_{-l}X_{-\beta}(H_\Gamma f)$. Also ist $H_\Gamma(\mathcal{S}_\Gamma(\mathcal{A}))$ invariant unter die Wirkung von $\mathcal{D}$. Zwar, für $X_l X_\beta \in \mathcal{D}, F \in H_\Gamma(\mathcal{S}_\Gamma(\mathcal{A}))$ gibt es ein $f \in \mathcal{S}_\Gamma(\mathcal{A})$ mit $H_\Gamma f = F$. Somit gilt

$$X_l X_\beta F = X_l X_\beta(H_\Gamma f) = H_\Gamma(T_{-l}M_{-\beta}f) \in H_\Gamma(\mathcal{S}_\Gamma(\mathcal{A}))$$

$L^2(G)$ ist separabel, da G die zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Somit sind alle Voraussetzungen des Satzes (2.4) in [4] erfüllt und wir schließen, dass J_V messbar ist. Nach Proposition 2.2 in [4]

$$\mathbb{P}_{H_\Gamma(\mathcal{S}_\Gamma(\mathcal{A}))}(H_\Gamma f)(\omega,t) = \mathcal{P}_{J_V(\omega,t)}(H_\Gamma f)(\omega,t)$$

Die Aussage folgt aus der Gleichung (2.9). □

— Die Lösung des Approximationsproblems —

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit dem Approximationsproblem (1.2) beschäftigen. Bevor wir den Hauptsatz zeigen, finden wir eine alternative Formel für den Approximationsfehler.
Für f.a. $(\omega,t) \in T_{L^\perp} \times T_{\mathcal{B}^\perp}$ betrachte

$$H_\Gamma(\mathcal{F})(\omega,t) := \{H_\Gamma f_1(\omega,t), ..., H_\Gamma f_m(\omega,t)\}$$

Sei $G_{\mathcal{F},\Gamma}(\omega,t) \in \mathbb{C}^{m\times m}$ mit Einträgen (i,j)

$$[G_{\mathcal{F},\Gamma}(\omega,t)]_{i,j} := \left\langle H_\Gamma f_i(\omega,t), H_\Gamma f_j(\omega,t)\right\rangle_{l^2(\mathcal{B}^\perp)}$$

Diese Matrix ist hermitesch, und die Einträge sind messbare Funktionen, definiert f.ü. auf $T_{L^\perp} \times T_{\mathcal{B}^\perp}$. Eine direkte Anwendung von Lemma (2.3.5.) in [11] liefert die Existenz einer messbaren unitären Matrix $U(\omega,t)$ mit

$$UGU^*(\omega,t) = diag(\lambda_1(\omega,t), ..., \lambda_m(\omega,t)).$$

Die Diagonalmatrix ist messbar als Produkt meßbarer Abbildungen. Da G hermitesch ist, sind die Einträge reell und nichtnegativ, und die Zeilen von U sind messbare, orthogonale Linkseigenvektoren $y_i = (y_{i,1}(\omega,t),...,y_{i,m}(\omega,t))$, d.h.

$$y_i(\omega,t)G_{\mathcal{F},\Gamma}(\omega,t) = \lambda_i(\omega,t)y_i(\omega,t), \quad i = 1,...,m \tag{2.10}$$

Nach einer geeigneten Permutation sind die Eigenwerte absteigend sortiert, also können wir ohne Einschränkung annehmen

$$\lambda_1(\omega,t) \geqslant \lambda_2(\omega,t) \geqslant ... \geqslant \lambda_m(\omega,t) \geqslant 0$$

Für $n \leqslant m$ definiere $q_1(\omega,t),...,q_n(\omega,t) \in l^2(\mathcal{B}^\perp)$

$$q_i(\omega,t) := \tilde{\sigma}_i(\omega,t)\sum_{j=1}^{m} y_{i,j}(\omega,t)H_\Gamma f_j(\omega,t) \quad i = 1,...,n \tag{2.11}$$

mit

$$\tilde{\sigma}_i(\omega,t) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i(\omega,t)}} & \text{falls } \lambda_i(\omega,t) \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes von Eckart - Young erfüllt. In diesem Zusammenhang ist $Q = Q(\omega,t) := span\{q_1,(\omega,t),...,g_n(\omega,t)\}$ optimal im Sinne

$$\begin{aligned} E(H_\Gamma(\mathcal{F})(\omega,t);Q(\omega,t)) &:= \sum_{i=1}^{m} \|H_\Gamma f_i(\omega,t) - \mathcal{P}_{Q(\omega,t)}H_\Gamma(f_i)(\omega,t)\|^2_{l^2(\mathcal{B}^\perp)} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{m} \|H_\Gamma f_i(\omega,t) - \mathcal{P}_W H_\Gamma(f_i)(\omega,t)\|^2_{l^2(\mathcal{B}^\perp)} = E(H_\Gamma(\mathcal{F})(\omega,t);W) \end{aligned} \tag{2.12}$$

für alle $W \subseteq l^2(\mathcal{B}^\perp), length(W) \leqslant n$ und der Fehler ist

$$E(H_\Gamma(\mathcal{F})(\omega,t);Q(\omega,t)) = \sum_{i=n+1}^{m} \lambda_i(\omega,t). \tag{2.13}$$

Die Lösung ist eindeutig, genau dann, wenn $\lambda_n(\omega,t) > \lambda_{n+1}(\omega,t)$.

(2.15) Proposition
Für $V = S_\Gamma(\mathcal{A})$ wie in Proposition (2.14) gilt

$$\mathcal{E}(\mathcal{F},V) = \int_{T_{L^\perp}}\int_{T_{\mathcal{B}^\perp}} E(H_\Gamma(\mathcal{F})(\omega,t);J_V(\omega,t))dtd\omega$$
$$J_v(\omega,t) := \overline{span\{H_\gamma\varphi(\omega,t) : \varphi \in \mathcal{A}\}}^{l^2(\mathcal{B}^\perp)}$$

Beweis
$H_\Gamma : L^2(G) \longrightarrow L^2(T_{L^\perp} \times T_{\mathcal{B}^\perp}, l^2(\mathcal{B}^\perp))$ ist nach (2.12)(b) unitär. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathcal{F}, V) &= \sum_{j=1}^{m} \|f_j - \mathbb{P}_V f_j\|^2_{L^2(G)} = \sum_{j=1}^{m} \|H_\Gamma f_j - H_\Gamma \mathbb{P}_V f_j\|^2_{L^2(T_{L^\perp} \times T_{\mathcal{B}^\perp}, l^2(\mathcal{B}^\perp))} \\ &= \sum_{j=1}^{m} \int_{T_{L^\perp}} \int_{T_{\mathcal{B}^\perp}} \|H_\Gamma f_j(\omega, t) - H_\Gamma \mathbb{P}_V f_j(\omega, t)\|^2_{l^2(\mathcal{B}^\perp)} dt d\omega.\end{aligned}$$

Nach (2.14) gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathcal{F}, V) &= \int_{T_{L^\perp}} \int_{T_{\mathcal{B}^\perp}} \sum_{j=1}^{m} \|H_\Gamma f_j(\omega, t) - \mathcal{P}_{J_V(\omega,t)}(H_\Gamma f_j(\omega, t))\|^2_{l^2(\mathcal{B}^\perp)} dt d\omega \\ &= \int_{T_{L^\perp}} \int_{T_{\mathcal{B}^\perp}} E(H_\Gamma(\mathcal{F})(\omega, t); J_V(\omega, t)) dt d\omega.\end{aligned}$$

□

Es folgt die Lösung des Approximationsproblems (1.2):

(2.16) Satz
Sei G eine lokalkompakte abelsche Gruppe, die die 2. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Seien $L \subseteq G$ und $\mathcal{B} \subseteq \widehat{G}$ kokompakte Gitter, mit $\mathcal{B} \subseteq \widehat{L}$. Dann existieren für jede Datenmenge $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, ..., f_m\} \subseteq L^2(G)$ und jede $n \in \mathbb{N}, n < m$ Funktionen $\psi_1, ..., \psi_n \in L^2(G)$ mit

$$\mathcal{E}(\mathcal{F}, S_\Gamma\{\psi_1, ..., \psi_n\}) \leqslant \mathcal{E}(\mathcal{F}, V) := \sum_{j=1}^{m} \|f_j - \mathbb{P}_V f_j\|^2_{L^2(G)} \tag{2.14}$$

für alle $\Gamma = \mathcal{B} \times L$-invariante Teilräume $V \subseteq L^2(G)$ der Länge $length(V) \leqslant n$.

Beweis
$q_i(\cdot, \cdot)$ ist messbar, wohldefiniert auf $T_{L^\perp} \times T_{\mathcal{B}^\perp}$, und erfüllt $q_i(\omega, t) \in l^2(\mathcal{B}^\perp)$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$. Es gilt

$$\begin{aligned}\|q_i(\omega, t)\|^2_{l^2(\mathcal{B}^\perp)} &= \langle q_i(\omega, t), q_i(\omega, t)\rangle_{l^2(\mathcal{B}^\perp)} \\ &= \tilde{\sigma}_i(\omega, t)^2 \sum_{j=1}^{m} y_{i,j}(\omega, t) \sum_{s=1}^{m} \langle H_\Gamma f_j(\omega, t), H_\Gamma f_s(\omega, t)\rangle_{l^2(\mathcal{B}^\perp)} \overline{y_{i,s}(\omega, t)} \\ &= \tilde{\sigma}_i(\omega, t)^2 y_i(\omega, t) G_{\mathcal{F},\Gamma}(\omega, t) \overline{y_i(\omega, t)}\end{aligned}$$

Wegen (2.10), die Orthonormalität der Eigenvektoren und die Definition von $\tilde{\sigma}_i(\omega, t)$ gilt

$$\|q_i(\omega, t)\|^2_{l^2(\mathcal{B}^\perp)} = \tilde{\sigma}_i(\omega, t)^2 \lambda_i(\omega, t) \|y_i(\omega, t)\|^2 \leqslant 1$$

Nach (2.2) (e) haben $T_{L^\perp}$ und $T_{\mathcal{B}^\perp}$ endliche Maße. Deswegen gilt für alle $1 \leqslant i \leqslant n$ $q_i \in L^2(T_{L^\perp} \times T_{\mathcal{B}^\perp}, l^2(\mathcal{B}^\perp))$. H_Γ ist surjektiv, also existieren $\psi_i \in L^2(G)$ mit

$$H_\Gamma(\psi_i) = q_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Nun zeigen wir, dass der Raum $W := S_\Gamma(\psi_1, ..., \psi_n)$ eine optimale Lösung für (2.14) ist.
Nach Proposition (2.15)

$$\mathcal{E}(\mathcal{F}, W) = \int_{T_{L^\perp}} \int_{T_{\mathcal{B}^\perp}} E(H_\Gamma(\mathcal{F})(\omega, t); J_W(\omega, t)) dt d\omega \tag{2.15}$$

Sei nun $V = S_\Gamma(\varphi_1, ..., \varphi_r), r \leqslant n$ ein beliebiger $\Gamma-$invarianter Teilraum der Länge $length(V) \leqslant r$. Da die Dimension von $J_V(\omega, t)$ nicht größer als n ist, folgt wegen Proposition (2.15) und der Monotonie des Integrals

$$\mathcal{E}(\mathcal{F}, W) \leqslant \int_{T_{L^\perp}} \int_{T_{\mathcal{B}^\perp}} E(H_\Gamma(\mathcal{F})(\omega, t); J_V(\omega, t)) dt d\omega = \mathcal{E}(\mathcal{F}, V).$$

Aus den Gleichungen (2.13) und (2.15) schließen wir

$$\mathcal{E}(\mathcal{F}, W) = \sum_{i=n+1}^{m} \int_{T_{L^\perp}} \int_{T_{\mathcal{B}^\perp}} \lambda_i(\omega, t) dt d\omega$$

Die Lösung ist eindeutig, genau dann, wenn die punktweise Lösung auf eine Teilmenge mit positivem Maß eindeutig ist, d.h. wenn $\lambda_n(\omega, t) > \lambda_{n+1}(\omega, t)$ f.ü. in $T_{L^\perp} \times T_{\mathcal{B}^\perp}$. □

Die wesentlichen Bausteine der Lösung sind H_Γ und die Messbarkeit der Range Functions. Solange sie existieren, dann können wir auf diese Weise den optimalen abgeschlossenen invarianten Teilraum finden. Jedoch ohne die Annahme, dass das 2. Abzählbarkeitsaxioms erfüllt ist und L und $\mathcal{B}$ beide sind kokompakte Gitter, ist das nicht immer garantiert.

§ 3 Daten approximation in Darstellungsräumen kompakten Gruppen

— Hintegrundtheorie —

In diesem Abschnitt betrachten wir eine weitere Version des Approximationsproblems (1.2) für kompakte Gruppen.
Bevor wir die Hauptfragen antworten können, fassen wir die wichtigsten Eigenschaften von Darstellungen auf kompakte Gruppen zusammen.

(3.1) Satz

(a) Jede irreduzible Darstellung einer kompakten Gruppe G ist endlich-dimensional, und jede Darstellung von G zerfällt in eine direkte Summe von Irreduziblen. Diese Zerlegung ist nicht eindeutig, aber äquivalente Darstellungen können als Teildarstellungen eines gröberen Hilbertraums $\mathcal{H}(\sigma)$ zusammengefasst werden:

$$\mathcal{H}(\sigma) = \bigoplus_{i \in I_\sigma} \mathcal{H}_{\sigma_i} \text{ invariante Teilräume, } \sigma_i \in [\sigma]_{\simeq}.$$

Die Zerlegung

$$\mathcal{H}_\pi \simeq \bigoplus_{\sigma \in \widehat{G}} \mathcal{H}(\sigma)$$

ist eindeutig (bis auf unitäre Äquivalenz).

(b) Die Kardinalität m_σ von I_σ heißt die Multiplizität von σ in π und ist unabhängig von der Wahl der Zerlegung.

(c) Für alle $\sigma \in \widehat{G}$ gilt $m_\sigma = dim\ \mathcal{C}(\pi, \sigma)$.

Beweis

Siehe [8] Satz 5.2, Prop. 5.3, Prop. 5.2. □

(3.2) Bemerkungen

(a) In Kontext von (3.1) können wir jeder Darstellung $\sigma \in \widehat{G}$ einen Hilbertraum $\mathcal{K}_\sigma$ zuordnen, so dass $dim(\mathcal{K}_\sigma) = m_\sigma$ gilt (für die korrekte Impretation wenn die Multiplizität unendlich ist, siehe [8] Prop. 5.4.). Dann ist $\mathcal{H}(\sigma) \simeq \mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{K}_\sigma$ und

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\pi &\simeq \bigoplus_{\sigma \in \widehat{G}} \mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{K}_\sigma \\ \pi &\simeq \bigoplus_{\sigma \in \widehat{G}} \sigma \otimes id_{\mathcal{K}_\sigma} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Der Hilbertraum $\mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{K}_\sigma$ heißt homogene Komponente zur Darstellung σ. Im weiteren, nehmen wir $\mathcal{H}_\pi = \bigoplus_{\sigma \in \widehat{G}} \mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{K}_\sigma$ an.

Die Projektion $\mathcal{P}_\sigma$ auf die homogene Komponente zur σ vertauscht mit π. Daraus können wir mit (3.1) (b) und das Lemma von Schur leicht folgern, dass für jeden Vertauschungsoperator $T \in \mathcal{C}(\pi)$ gilt $T(\mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{K}_\sigma) \subseteq \mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{K}_\sigma$.

(b) Sei $e_1, ..., e_{d_\sigma} \in \mathcal{H}_\sigma$ eine orthonormale Basis von $\mathcal{H}_\sigma$. Dann lässt sich jedes Element $\sum_{i=1}^{N} x_i \otimes y_i \in \mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{K}_\sigma$ als $\sum_{k=1}^{d_\sigma} e_k \otimes z_k$ für geeignete $z_1, ..., z_{d_\sigma} \in \mathcal{K}_\sigma$ schreiben:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} x_i \otimes y_i &= \sum_{i=1}^{N} (\sum_{k=1}^{d_\sigma} \langle x, e_k \rangle e_k) \otimes y_i = \sum_{k=1}^{d_\sigma} \sum_{i=1}^{N} \langle x, e_k \rangle e_k \otimes y_i \\ &= \sum_{k=1}^{d_\sigma} \sum_{i=1}^{N} e_k \otimes \langle x, e_k \rangle y_i = \sum_{k=1}^{d_\sigma} e_k \otimes (\langle x, e_k \rangle \sum_{i=1}^{N} y_i) = \sum_{k=1}^{d_\sigma} e_k \otimes z_k\end{aligned}$$

dabei $z_k = \langle x, e_k \rangle \sum_{i=1}^{N} y_i \in \mathcal{K}_\sigma$.

Wir benötigen noch ein technisches Ergebnis, bevor wir das Problem (1.2) untersuchen.

(3.3) Proposition

Sei G eine kompakte Gruppe, $\sigma \in \widehat{G}$. Dann spannt $\sigma(G)$ den Raum der Homomorphismen $Hom(\mathcal{H}_\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$:

$$\mathbb{A}_\sigma := span\big(\{\sigma(x) : x \in G\}\big) = Hom(\mathcal{H}_\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$$

Beweis

$\mathbb{A}_\sigma \leqslant Hom(\mathcal{H}_\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$ nach Definition. Da σ verträglich mit der Gruppenstruktur ist, ist $\mathbb{A}_\sigma$ eine Unteralgebra. Wir merken, dass

$$\sigma \otimes \sigma : G \times G \to U(HS(\mathcal{H}_\sigma, \mathcal{H}_\sigma)), \quad (x, y) \to \Big(T \to \sigma(x) \circ T \circ \sigma^*(y)\Big)$$

eine irreduzible Darstellung von $G \times G$ ist (siehe [8] Satz (7.12)).

$\mathcal{H}_\sigma$ ist endlich dimensional, also stimmt der Raum der Hilbert-Schmidt Operatoren $HS(\mathcal{H}_\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$ mit $Hom(\mathcal{H}_\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$ überein und $\mathbb{A}_\sigma$ ist abgeschlossen als Teilraum des endlich dimensionalen Vektorraums $Hom(\mathcal{H}_\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$.

Nun reicht es zu zeigen, dass $\mathbb{A}_\sigma$ invariant ist. Das ist aber trivialerweise wahr, denn für alle $x, y \in G$, die Abbldungen $\sigma(x), \sigma^*(y) = \sigma(y^{-1}) \in \mathbb{A}_\sigma$. Die Algebrastruktur impliziert $\sigma \otimes \sigma(x, y)T \in \mathbb{A}_\sigma$ für alle $T \in \mathbb{A}_\sigma$.

Schließlich, $\sigma(1) \not\equiv 0$, also ist $\mathbb{A}_\sigma \neq \{0\}$. Damit folgt die Behauptung. □

— Reduktion des Approximationsproblems —

Betrachten wir einen abgeschlossenen invarianten Teilraum $V \subseteq \mathcal{H}_\pi$. In diesem Fall ist die Projektion $\mathbb{P}_V : \mathcal{H}_\pi \to V$ ein Vertauschungsoperator in $\mathcal{C}(\pi)$, also zerfällt diese Projektion auf orthogonale Projektionen $\mathcal{P}_{V,\sigma}$, die mit $\sigma \otimes id$ auf der homogenen Komponente $\mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{K}_\sigma$ vertauschen:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}_V = \bigoplus_{\sigma \in \widehat{G}} \mathcal{P}_{V,\sigma} \qquad \wedge \qquad V_\sigma := Bild(\mathcal{P}_{V,\sigma}) \subseteq \mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{K}_\sigma \\
\Rightarrow \qquad &V = \bigoplus_{\sigma \in \widehat{G}} V_\sigma \qquad \wedge \qquad \mathcal{P}_\sigma \mathcal{P}_{V,\sigma} = \mathcal{P}_{V,\sigma} \mathcal{P}_\sigma = \mathcal{P}_{V,\sigma}
\end{aligned}
$$

Wegen der Orthogonalitätsrelation gilt für alle endliche $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}_\pi$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{f \in \mathcal{F}} \|f - \mathbb{P}_V f\|^2_{\mathcal{H}_\pi} &= \sum_{f \in \mathcal{F}} \sum_{\sigma \in \widehat{G}} \|\mathcal{P}_\sigma f - \mathcal{P}_\sigma \mathbb{P}_V f\|^2_{\mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{K}_\sigma} \\
= \sum_{f \in \mathcal{F}} \sum_{\sigma \in \widehat{G}} \|\mathcal{P}_\sigma f - \mathcal{P}_{V,\sigma} f\|^2_{\mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{K}_\sigma} &= \sum_{\sigma \in \widehat{G}} \sum_{f \in \mathcal{F}} \|\mathcal{P}_\sigma f - \mathcal{P}_{V,\sigma} \mathcal{P}_\sigma f\|^2_{\mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{K}_\sigma}
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Für alle $f \in \mathcal{H}_\pi$ gilt $\sum_{\sigma \in \widehat{G}} \|\mathcal{P}_\sigma f\|^2 = \|f\|^2 < \infty$. Die Konvergenz der Reihe impliziert, dass höchstens abzählbar viele Projektionen $\mathcal{P}_\sigma f \neq 0$ erfüllen. Da $\mathcal{F}$ endlich ist, gibt es eine Folge $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \widehat{G}$, sodass für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $\sigma \in \widehat{G} \backslash \{\sigma_k : k \in \mathbb{N}\} : \mathcal{P}_\sigma f = 0$. Das heißt, wir suchen die beste Approximation in $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_{\sigma_k} \otimes \mathcal{K}_{\sigma_k}$. Nehmen wir nun an, dass wir das Approximationsproblem (1.2) für jede homogene Komponente für die Punkte $\{\mathcal{P}_{\sigma_k} f : f \in \mathcal{F}\}$ lösen können. Sei etwa eine Lösung normierter Vektoren $\Psi_{\sigma_k} = \{\psi_1^{\sigma_k}, ..., \psi_n^{\sigma_k}\} \subseteq \mathcal{H}_{\sigma_k} \otimes \mathcal{K}_{\sigma_k}$ gegeben. $\mathcal{W} := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} S_{\sigma_k}(\Psi_{\sigma_k})$ ist ein abgeschlossener invarianter Teilraum von $\mathcal{H}_\pi$. Mit (3.2) gilt

$$
\mathcal{E}(\mathcal{F}, \mathcal{W}) = \sum_{j=1}^{m} \|f_j - \mathbb{P}_\mathcal{W} f_j\|^2_{\mathcal{H}_\pi} \leqslant \mathcal{E}(\mathcal{F}, V)
$$

für alle invarianten Teilräume $V \subseteq \mathcal{H}_\pi, length(V) \leqslant n$.

Wir zeigen, dass $length(\mathcal{W}) \leqslant n$. Damit ist $\mathcal{W}$ eine zulässige Lösung. Dies sieht man wie folgt:

Die Vektoren

$$
\psi_i := \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\psi^{\sigma_k}}{2^k} \in \mathcal{W}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n
$$

sind wolhdefiniert, da $\|\psi_i^{\sigma_k}\| = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}, i \in \{1, ..., n\}$. Die Projektionen $\mathcal{P}_\sigma$ vertauschen mit π und zerlegen die Identität nach (3.1)(b). Damit schließen wir:

$$\begin{aligned} S_\pi(\psi_1, ..., \psi_n) =& span\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_\pi(\psi_i)\right) = span\left(\bigcup_{i=1}^{n} \bigoplus_{\sigma\in\widehat{G}} \mathcal{P}_\sigma(S_\pi(\psi_i))\right) \\ =& span\left(\bigcup_{i=1}^{n} \bigoplus_{\sigma\in\widehat{G}} (S_\pi(\mathcal{P}_\sigma\psi_i))\right) = span\left(\bigcup_{i=1}^{n} \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} (S_\pi\left(\frac{\psi_i^{\sigma_k}}{2^k}\right))\right) \\ =& span\left(\bigcup_{i=1}^{n} \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} (S_{\sigma_k}(\psi_i^{\sigma_k}))\right) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} span\left(\bigcup_{i=1}^{n} (S_{\sigma_k}(\psi_i^{\sigma_k}))\right) \\ =& \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \left(S_{\sigma_k}(\psi_1^{\sigma_k}, ..., \psi_n^{\sigma_k}))\right) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} S_{\sigma_k}(\Psi_{\sigma_k}) = \mathcal{W} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Also reduzuiert sich das Problem (1.2) auf den Fall $\pi \simeq \sigma \otimes id$, $\mathcal{H}_\pi = \mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{K}$.

— Endlich erzeugte Teilräume einer homogenen Komponente —

Wir wollen zunächst die invarianten Teilräume einer homogonen Komponente charakterisieren.

(3.4) Definition
Sei G eine kompakte Gruppe, π eine Darstellung. Ein Teilraum $V \subseteq \mathcal{H}_\pi$ heißt zyklsch, falls ein Vektor $\eta \in \mathcal{H}_\pi$ mit $S_\pi(\eta) = V$ existiert.

(3.5) Satz
Sei Sei $e_1, ..., e_{d_\sigma} \in \mathcal{H}_\sigma$ eine orthonormale Basis von $\mathcal{H}_\sigma$. Für beliebige $y_1, ..., y_{d_\sigma} \in \mathcal{K}_\sigma$ gilt

$$S_\pi(\sum_{i=1}^{d_\sigma} e_i \otimes y_i) = \mathcal{H}_\sigma \otimes span\{y_1, ..., y_{d_\sigma}\} \tag{3.4}$$

Beweis
$\mathcal{H}_\sigma \otimes span\{y_i : 1 \leqslant i \leqslant d_\sigma\}$ ist ein abgeschlossener invarianter Teilraum, der den Erzeuger $\sum_{i=1}^{d_\sigma} e_i \otimes y_i$ enthält, also $S_\pi(\sum_{i=1}^{d_\sigma} e_i \otimes y_i) \subseteq \mathcal{H}_\sigma \otimes span\{y_i : 1 \leqslant i \leqslant d_\sigma\}$. Insbesondere ist $dim(S_\pi(\sum_{i=1}^{d_\sigma} e_i \otimes y_i)) \leqslant d_\sigma \cdot dim(span\{y_1, ..., y_{d_\sigma}\}) \leqslant d_\sigma^2 < \infty$

Eine direkte Rechnung liefert:

$$
\begin{aligned}
S_\pi\Big(\sum_{i=1}^{d_\sigma} e_i \otimes y_i\Big) &= span\Big\{\pi(x)\sum_{i=1}^{d_\sigma} e_i \otimes y_i : x \in G\Big\} \\
&= \Big\{\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \pi(x_j) \sum_{i=1}^{d_\sigma} e_i \otimes y_i : \alpha_j \in \mathbb{C}, x_j \in G\Big\} \\
&= \Big\{\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{d_\sigma} \alpha_j \sigma(x_j) e_i \otimes y_i : \alpha_j \in \mathbb{C}, x_j \in G\Big\} \\
&= \Big\{\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{d_\sigma}\Big(\sum_{k=1}^{d_\sigma} \langle \alpha_j \sigma(x_j) e_i, e_k\rangle e_k\Big) \otimes y_i : \alpha_j \in \mathbb{C}, x_j \in G\Big\} \\
&= \Big\{\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{d_\sigma}\sum_{k=1}^{d_\sigma} \langle \alpha_j \sigma(x_j) e_i, e_k\rangle e_k \otimes y_i : \alpha_j \in \mathbb{C}, x_j \in G\Big\} \\
&= \Big\{\sum_{k=1}^{d_\sigma}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{d_\sigma} e_k \otimes \langle \alpha_j \sigma(x_j) e_i, e_k\rangle y_i : \alpha_j \in \mathbb{C}, x_j \in G\Big\} \\
&= \Big\{\sum_{k=1}^{d_\sigma} e_k \otimes \Big(\sum_{i=1}^{d_\sigma}\sum_{j=1}^{N} \overline{\langle \overline{\alpha_j} \sigma(x_j^{-1}) e_k, e_i\rangle}\, y_i\Big) : \alpha_j \in \mathbb{C}, x_j \in G\Big\} \\
&\overset{3.3}{=} \Big\{\sum_{k=1}^{d_\sigma} e_k \otimes \Big(\sum_{i=1}^{d_\sigma} \alpha_i^k y_i\Big) : \alpha_i^k \in \mathbb{C}\Big\} \\
&= S_\pi\Big(\Big\{\sum_{k=1}^{d_\sigma} e_k \otimes z_k : z_k \in span\{y_1, ..., y_{d_\sigma}\}\Big\}\Big) \\
&= \Big\{\sum_{i=1}^{d_\sigma}\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \sigma(x_j) e_i \otimes z_i : \alpha_j \in \mathbb{C}, x_j \in G, z_i \in span\{y_1, ..., y_{d_\sigma}\}\Big\} \\
&\overset{3.3}{=} \Big\{\sum_{i=1}^{d_\sigma}\Big(\sum_{k=1}^{d_\sigma} \alpha_k^i e_k\Big) \otimes z_i : \alpha_k^i \in \mathbb{C}, z_i \in span\{y_1, ..., y_{d_\sigma}\}\Big\} \\
&= \Big\{\sum_{i=1}^{d_\sigma} t_i \otimes z_i : t_i \in span\{e_1, ..., e_{d_\sigma}\}, z_i \in span\{y_1, ..., y_{d_\sigma}\}\Big\} \\
&= \mathcal{H}_\sigma \otimes span\{y_1, ..., y_{d_\sigma}\}
\end{aligned}
$$

□

(3.6) Korollar
(a) Für alle endlichen Teilmengen $\mathcal{F} = \left\{ \sum_{i=1}^{d_\sigma} e_i \otimes y_i^1, ..., \sum_{i=1}^{d_\sigma} e_i \otimes y_i^n \right\} \subseteq H_\sigma \otimes \mathcal{K}_\sigma$ gilt

$$S_{\sigma \otimes id}(\mathcal{F}) = \mathcal{H}_\sigma \otimes span\{y_i^j \ : \ 1 \leqslant i \leqslant d_\sigma, 1 \leqslant j \leqslant n\}$$

(b) Für alle Teilräume $V \subseteq \mathcal{K}_\sigma$ gilt

$$dim(V) \leqslant nd_\sigma \quad \Leftrightarrow \quad \exists \mathcal{F} \subseteq H_\sigma \otimes \mathcal{K}_\sigma, \left|\mathcal{F}\right| \leqslant n \ : \ S_{\sigma \otimes id}(\mathcal{F}) = \mathcal{H}_\sigma \otimes V$$

Beweis
(a) Es handelt sich um endlich viele endlich dimensionale Teilräume, also gilt

$$\begin{aligned} S_{\sigma \otimes id}(\mathcal{F}) &= span\Big(\bigcup_{j=1}^{n} S_{\sigma \otimes id}(f_j)\Big) \overset{3.5}{=} span\Big(\bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{H}_\sigma \otimes span\{y_i^j : 1 \leqslant i \leqslant d_\sigma\}\Big) \\ &= \mathcal{H}_\sigma \otimes span\{y_i^j \ : \ 1 \leqslant i \leqslant d_\sigma, 1 \leqslant j \leqslant n\} \end{aligned}$$

(b) Seien $y_i^j \in \mathcal{K}_\sigma, \ 1 \leqslant i \leqslant d_\sigma, 1 \leqslant j \leqslant n$, sodass

$$V = span\{y_i^j : 1 \leqslant i \leqslant d_\sigma, 1 \leqslant j \leqslant n\} \subseteq \mathcal{K}_\sigma$$

$$f_j := \sum_{i=1}^{d_\sigma} e_i \otimes y_i^j \ , \ 1 \leqslant j \leqslant n; \qquad \mathcal{F} := \{f_1, ..., f_n\}$$

Es gilt $dim(V) \leqslant nd_\sigma$ und

$$\begin{aligned} S_{\sigma \otimes id}(\mathcal{F}) &= span\Big(\bigcup_{j=1}^{n} S_{\sigma \otimes id}(f_j)\Big) \overset{3.5}{=} span\Big(\bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{H}_\sigma \otimes span\{y_1^j, ..., y_{d_\sigma}^j\}\Big) \\ &= \mathcal{H}_\sigma \otimes span\{y_i^j : 1 \leqslant i \leqslant d_\sigma, 1 \leqslant j \leqslant n\} = \mathcal{H}_\sigma \otimes V. \end{aligned}$$

Dir Rückrichtung folgt aus (a). □

Wir haben nun alle nötigen Hilfsmittel beisammen, um das Approximationsproblem (1.2) zu untersuchen.

— Das Approximationsproblem für homogene Komponente —

(3.7) Satz
Seien die Punkte $f_j = \sum_{i=1}^{d_\sigma} e_i \otimes y_i^j \subseteq \mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{K}_\sigma,\ 1 \leqslant j \leqslant m$ gegeben, sowie $n < m$. Dann existiert ein invarianter Teilraum $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{K}_\sigma$ mit $length(\mathcal{W}) \leqslant n$ und

$$\mathcal{E}(F, \mathcal{W}) \leqslant \mathcal{E}(F, V)$$

für alle invariante abgeschlossene Teilräume V von $\mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{K}_\sigma$ mit $length(V) \leqslant n$.

Beweis
Wir zählen die Vektoren y_i^j als $l_1, ..., l_{md_\sigma}$ auf und definieren die Matrix $G \in \mathbb{C}^{md_\sigma \times md_\sigma}$

$$G_{i,j} := \langle l_i, l_j \rangle$$

Die Matrix ist hermitesch, also lässt sich der Satz von Eckart-Young (1.3) anwenden. Seien $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant ... \geqslant \lambda_{md_\sigma} \geqslant 0$ die Eigenwerte von G und $q_1, ..., q_{nd_\sigma} \in \mathcal{K}_\sigma$ optimal im Sinne von Satz (1.3), d.h. für $Q := span\{q_1, ..., q_{nd_\sigma}\}$

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{d_\sigma} \|y_i^j - \mathbb{P}_Q y_i^j\|^2 = \sum_{i=1}^{md_\sigma} \|l_i - \mathbb{P}_Q f_i\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{md_\sigma} \|l_i - \mathbb{P}_T l_i\|^2 = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{d_\sigma} \|y_i^j - \mathbb{P}_T y_i^j\|^2 \quad (3.5)$$

für alle $T \subseteq \mathcal{K}_\sigma, dim(T) \leqslant nd_\sigma$. Zudem ist der Fehler $\sum_{i=nd_\sigma+1}^{md_\sigma} \lambda_i$ und Q ist eindeutig bestimmt, genau dann, wenn $\lambda_{nd_\sigma} > \lambda_{nd_\sigma+1}$ gilt.
Wir behaupten, dass $\mathcal{W} := \mathcal{H}_\sigma \otimes Q$ optimal im Sinne von (1.2) ist.
Nach (3.6) ist $\mathcal{W}$ eine zulässige Lösung. Sei $V \subseteq \mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{K}_\sigma$ ein beliebiger invarianter Teilraum der Länge $length(V) \leqslant n$. Nach (3.6) existiert ein Teilraum $T \subseteq \mathcal{K}_\sigma$, $dim(T) \leqslant nd_\sigma$ mit $V = \mathcal{H}_\sigma \otimes T$. Wegen der Orthonormalität von $(e_1, ..., e_{d_\sigma})$ gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} \|f_j - \mathbb{P}_V f_j\|^2 &= \sum_{j=1}^{m} \Big\| \sum_{i=1}^{d_\sigma} e_i \otimes y_i^j - (\mathbb{P}_{\mathcal{H}_\sigma} \otimes \mathbb{P}_T) \Big(\sum_{i=1}^{d_\sigma} e_i \otimes y_i^j \Big) \Big\|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{m} \Big\| \sum_{i=1}^{d_\sigma} e_i \otimes y_i^j - \sum_{i=1}^{d_\sigma} e_i \otimes \mathbb{P}_T\, y_i^j \Big\|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{m} \Big\| \sum_{i=1}^{d_\sigma} e_i \otimes \big(y_i^j - \mathbb{P}_T\, y_i^j \big) \Big\|^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{d_\sigma}\sum_{k=1}^{d_\sigma} \langle e_i, e_k\rangle \left\langle y_i^j - \mathbb{P}_T\, y_i^j\ ,\ y_k^j - \mathbb{P}_T\, y_k^j \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{d_\sigma}\sum_{k=1}^{d_\sigma} \delta_{i,k} \left\langle y_i^j - \mathbb{P}_T\, y_i^j\ ,\ y_k^j - \mathbb{P}_T\, y_k^j \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{d_\sigma} \left\langle y_i^j - \mathbb{P}_T\, y_i^j\ ,\ y_i^j - \mathbb{P}_T\, y_i^j \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{d_\sigma} \| y_i^j - \mathbb{P}_T\, y_i^j \|^2
\end{aligned}
$$

Das Gewünschte folgt aus der Gleichung (3.5). Der Fehler ist $\sum\limits_{i=nd_\sigma+1}^{md_\sigma} \lambda_i$ und $\mathcal{W}$ ist eindeutig bestimmt, genau dann, wenn $\lambda_{nd_\sigma} > \lambda_{nd_\sigma+1}$ gilt. □

— Der Algorithmus —

Wir fassen nun alle Resultate zusammen:

(3.8) Algorithmus
Gegeben: kompakte Gruppe G, Darstellung π, Datenmenge $\mathcal{F} = \{f_1, ..., f_m\} \subseteq \mathcal{H}_\pi$, natürliche Zahl $n < m$.

1. Bestimme den Dualraum $\widehat{G}$.
2. Bestimme die Zerlegung $\mathcal{H}_\pi \simeq \bigoplus\limits_{\sigma \in \widehat{G}} \mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{K}_\sigma$
3. Für $\sigma \in \widehat{G}$ bestimme die Projektion von $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{K}_\sigma$.
4. Setze $\Sigma := \{\sigma \in \widehat{G} : \mathcal{P}_\sigma(\mathcal{F}) \neq \{0\}\}$.
5. Für $\sigma \in \Sigma$ bestimme eine beste Approximation $\mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{W}_\sigma \subseteq \mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{K}_\sigma$ von $\mathcal{P}_\sigma(\mathcal{F})$ mit Approximationsfeher ε_σ wie in (3.7) beschrieben.
6. Setze $\mathcal{W} := \bigoplus\limits_{\sigma \in \Sigma} \mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{W}_\sigma$

Dann ist $\mathcal{W}$ eine Lösung des Approximationsproblem (1.2). Der Fehler ist $\sum\limits_{\sigma \in \Sigma} \varepsilon_\sigma$.

Die Korrektheit der Alogirthmus folgt aus der Gleichungskette (3.2), Korollar (3.6) und Satz (3.7).

(3.9) Bemerkung
Es sei bemerkt, dass sogar wenn die Lösung des Approximationsproblem (1.2) auf die homogenen Komponenten eindeutig ist, muss dies die globale Lösung nicht sein. Das Verfahren findet ab Schritt 2 nur auf den homogenen Komponenten statt, auf denen $\mathcal{P}_\sigma f$ nicht trivial ist. Damit ist es für das Approximationsproblem irrelevant was die Projektion von $\mathcal{W}$ in den anderen Komponenten ist. Wählen wir eine abzählbare Teilmenge $\Omega \subseteq \widehat{G} \backslash \Sigma$ und $\mathcal{W}_\sigma \subseteq \mathcal{K}_\sigma, dim(\mathcal{W}_\sigma) \leqslant nd_\sigma$ für $\sigma \in \Omega$. Dann ist

$$\mathcal{W}_\Omega := \mathcal{W} \oplus \bigoplus_{\sigma \in \Omega} \mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{W}_\sigma$$

ebgenfalls ein invarianter abgeschlossener Teilraum von $\bigoplus_{\sigma \in \widehat{G}} \mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{K}_\sigma$ der Länge $length(\mathcal{W}_\Omega) \leqslant n$ mit

$$\mathcal{E}(\mathcal{F}, \mathcal{W}_\Omega) = \mathcal{E}(\mathcal{F}, \mathcal{W}) \leqslant \mathcal{E}(\mathcal{F}, V)$$

für alle invarianten abgeschlossenen Teilräume $V \leqslant \bigoplus_{\sigma \in \widehat{G}} \mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{K}_\sigma$ mit $length(V) \leqslant n$.
Die globale Lösung ist folglich eindeutig, genau dann, wenn die Lösung auf jeder homogonen Komponente eindeutig ist, und es für jede irreduzible Darstellung $\sigma \in \widehat{G}$ einen Punkt $f \in \mathcal{F}$ mit $\mathcal{P}_\sigma f \neq 0$ gibt.
Insbesondere muss $\widehat{G}$ abzählbar sein.

§4 Beispiel einer kompakten abelschen Gruppe

In diesem Abschnitt untersuchen wir den Torus $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. $\mathbb{T}$ ist sowohl kompakt als auch abelsch und erfüllt die 2. Abzählbarkeitsaxiom. Daher lassen sich beide Verfahren anwenden. Um die Unterschiede besser zu illustrieren, im Kontext von $\mathbb{T}$ als kompakte Gruppe betrachten wir die linksreguläre Darstellung

$$\lambda : \mathbb{T} \longrightarrow U(L^2(\mathbb{T})), \quad x \longrightarrow L_x$$

d.h. der Darstellungsraum ist gleich, aber die Invarianz ist bezüglich verschiedene Wirkungen, und folglich sind die erzeugten Teilräume i.A. nicht dieselbe.

(4.1) Approximationsproblem
Gegeben sind die folgenden Funktionen:

- $f_1 : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longrightarrow z$
- $f_2 : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longrightarrow \frac{z+z^{-1}}{2}$
- $f_3 : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longrightarrow \frac{z-z^{-1}}{2}$
- $f_4 : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longrightarrow 1$
- $f_5 : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longrightarrow \left(\sum_{j=0}^{3} T_{e^{2\pi ij/4}}\right)\left((1+i)g + (1-i)T_{e^{\pi i/8}}g\right)$

  dabei $arg : \mathbb{T} \to [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ist die eindeutige Inverse von $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \to \mathbb{T},\ t \to e^{2\pi it}$, und
  $g(z) = \begin{cases} |arg(z)| - \frac{1}{16} & , |arg(z)| \leqslant \frac{1}{16} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$

Gesucht wird der zyklischer Raum (d.h. $n = 1$), der f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 am besten approximiert.

Das Beispiel ist klein, aber veranschaulicht die Unterschiede zwischen die beiden Darstellungen.
Es gilt $\widehat{\mathbb{T}} = \{z \longrightarrow z^k \ : \ k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$ (im Weiteren identifizieren wir $z \longrightarrow z^k$ mit k).
Wir verwenden zudem, dass die Fourierreihenentwicklung einer stetiger Funktion f punktweise gegen f konvergiert (siehe [13] Korollar (1.4.1)). Dies wird insbesondere nutzlich sein in der Bestimmung von Inversen unter H_Γ

— $\mathbb{T}$ als abelsche Gruppe —

Sei das kokompaktes Gitter $L = \{1, -1\}$. Dann ist $L^\perp \cong 2\mathbb{Z}$. Sei $\mathcal{B} \cong 4\mathbb{Z}$. Wir wählen die Vertreter $T_{L^\perp} = \{0, 1\}$ und $T_{\mathcal{B}^\perp} = \{e^{2\pi it} \ : \ t \in [0, \frac{1}{4})\}$. Die Elemente von $\mathcal{B}^\perp$ sind $z_j = e^{2\pi ij/4}, j = 0, ..., 3$.
Zunächst merken wir

$$\begin{aligned}
\widehat{f}_5(k) &= \Big(\sum_{j=0}^{3} e^{-2\pi ijk/4}\Big)\Big((1+i)\widehat{g}(k) + (1-i)e^{-\pi ik/8}\widehat{g}(k)\Big) \\
&= \begin{cases} 4\Big((1+i)\widehat{g}(k) + (1-i)e^{-\pi ik/8}\widehat{g}(k)\Big) & , k \in 4\mathbb{Z} \\ \frac{1-e^{-2\pi i\cdot 4/4}}{1-e^{-2\pi i/4}}\Big((1+i)\widehat{g}(k) + (1-i)e^{-\pi ik/8}\widehat{g}(k)\Big) & , k \notin 4\mathbb{Z} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 4\Big((1+i)\widehat{g}(k) + (1-i)e^{-\pi ik/8}\widehat{g}(k)\Big) & , k \in 4\mathbb{Z} \\ 0 & , k \notin 4\mathbb{Z} \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Wir berechnen $(H_\Gamma f_k(0,t)_{z_j}$:

$$\begin{aligned}
\big(H_\Gamma f_1(0,t)\big)_{z_j} &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_1(2l)\overline{(z_jt, 2l)} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \delta_{1,2l}\overline{(z_jt, 2l)} = 0 \\
\big(H_\Gamma f_2(0,t)\big)_{z_j} &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_2(2l)\overline{(z_jt, 2l)} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \frac{\delta_{1,2l} + \delta_{-1,2l}}{2}\overline{(z_jt, 2l)} = 0 \\
\big(H_\Gamma f_3(0,t)\big)_{z_j} &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_3(2l)\overline{(z_jt, 2l)} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \frac{\delta_{1,2l} - \delta_{-1,2l}}{2}\overline{(z_jt, 2l)} = 0 \\
\big(H_\Gamma f_4(0,t)\big)_{z_j} &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_4(2l)\overline{(z_jt, 2l)} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \delta_{0,2l}\overline{(z_jt, 2l)} = \overline{(z_jt, 0)} = 1 \\
\big(H_\Gamma f_5(0,t)\big)_{z_j} &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_5(2l)\overline{(z_jt, 2l)} \overset{4.1}{=} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_5(4l)\overline{(z_j, 4l)(t, 4l)} = \\
&= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_5(4l)\overline{(t, 4l)} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_5(4l)(\bar{t}, 4l) = f_5(\bar{t}) = f_5(t)
\end{aligned}$$

Dabei gilt die letzte Gleichung nach Konstruktion von g.
Analog erhalten wir $(H_\Gamma f_k(1,t)_{z_j}$:

$$
\begin{aligned}
\big(H_\Gamma f_1(1,t)\big)_{z_j} &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \delta_{1,1+2l}\overline{(z_j t, 2l)} = \overline{(z_j t, 0)} = 1\\
\big(H_\Gamma f_2(1,t)\big)_{z_j} &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \frac{\delta_{1,1+2l}+\delta_{-1,1+2l}}{2}\overline{(z_j t, 2l)} = \frac{1}{2}\big(\overline{(z_j t, 0)} + \overline{(z_j t, -2)}\big) = \frac{1}{2}\big(1+(z_j t)^2\big)\\
\big(H_\Gamma f_3(1,t)\big)_{z_j} &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \frac{\delta_{1,1+2l}-\delta_{-1,1+2l}}{2}\overline{(z_j t, 2l)} = \frac{1}{2}\big(\overline{(z_j t, 0)} - \overline{(z_j t, -2)}\big) = \frac{1}{2}\big(1-(z_j t)^2\big)\\
\big(H_\Gamma f_4(1,t)\big)_{z_j} &= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \delta_{0,1+2l}\overline{(z_j t, 2l)} = 0\\
\big(H_\Gamma f_5(1,t)\big)_{z_j} &\overset{4.1}{=} 0
\end{aligned}
$$

Die Grammschen Matrizen $G(k,t), k \in T_{L^\perp}, tT_{\mathcal{B}^\perp}$ sind

$$
G(0,t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4\overline{f_5(t)}\\ 0 & 0 & 0 & 4f_5(t) & 4|f_5(t)|^2 \end{pmatrix} = U(0,t)\cdot diag(0,0,0,4(1+|f_5(t)|^2),0)\cdot U(0,t)^*
$$

$$
U(0,t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1+|f_5(t)|^2}} & \frac{\overline{f_5(t)}}{\sqrt{1+|f_5(t)|^2}}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{-f_5(t)}{\sqrt{1+|f_5(t)|^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+|f_5(t)|^2}} \end{pmatrix}
$$

$$
G(1,t) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U(1,t)\cdot diag(6,2,0,0,0)\cdot U(1,t)^*
$$

$$
U(1,t) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0\\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0\\ & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Mit der Formel im zweiten Abschnitt erhalten wir $q(k,t) = q_1(k,t)$:

$$\begin{aligned}
q(0,t) &= \frac{1}{2\sqrt{1+|f_5(t)|^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+|f_5(t)|^2}} \Big(H\Gamma f_4(0,t) + f_5(t)(H_\Gamma f_5)(0,t) \Big) \\
&= \left(\frac{1+f_5(t)^2}{2(1+|f_5(t)|^2)} \right)_{b \in T_{\mathcal{B}^\perp}} \\
q(1,t) &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{\sqrt{6}}{3} H_\Gamma f_1 + \frac{\sqrt{6}}{6} H_\Gamma f_2 + \frac{\sqrt{6}}{6} H_\Gamma f_3 \right)(1,t) = \frac{2}{3} H_\Gamma f_1(1,t)
\end{aligned}$$

Wie schon bemerkt, f_4, f_5 sind invariant unter Verschiebungen um $e^{\pi i/2}$, und damit auch $\psi_2 := \frac{1+f_5(t)^2}{2(1+|f_5(t)|^2)}$. Analog zur obigen Rechnungen gilt

$$H_\Gamma(\psi_2)(0,t) = (\psi_2)_{z_j \in T_{\mathcal{B}^\perp}} \quad \text{und} \quad H_\Gamma(\psi_2)(1,t) = (0)_{z_j \in T_{\mathcal{B}^\perp}}$$

$H_\Gamma f_1(0,t) = 0$, die Linearität von H_Γ und die Eindeutigkeit der Inverse implizieren für $\psi := \frac{2}{3} f_1 + \psi_2$

$$H_\Gamma(\psi)(k,t) = q(k,t) \quad \text{für alle } k \in T_{L^\perp}, t \in T_{\mathcal{B}^\perp}$$

Der gesuchte invariante Teilraum $V = S_\Gamma(\psi)$ ist eindeutig ($6 > 2$ und $1 + |f_5(t)|^2 > 0$). Schließlich, bestimmen wir die Projektionen $\mathbb{P}_V f_k$:

$$T_{-1}\psi = \frac{2}{3} T_{-1} f_1 + T_{-1}\psi_2 = -\frac{2}{3} f_1 + \psi_2$$

Damit $f_1, \psi_2 \in V$. Weiterhin,

$$\begin{gathered}
f_1 \in S_\Gamma(\overline{span\{z^k \ : \ k \in 1 + 2\mathbb{Z}\}}) \subseteq \overline{span\{z^k \ : \ k \in 1 + 2\mathbb{Z}\}} \\
\psi_2 \in S_\Gamma(\overline{span\{z^k \ : \ k \in 2\mathbb{Z}\}}) \subseteq \overline{span\{z^k \ : \ k \in 2\mathbb{Z}\}}
\end{gathered}$$

$f_1, f_2, f_3 \in \overline{span\{z^k \ : \ k \in 1 + 2\mathbb{Z}\}}$ und $f_4, f_5 \in \overline{span\{z^k \ : \ k \in 2\mathbb{Z}\}}$ implizieren

$$\mathbb{P}_V f_2, \mathbb{P}_V f_3 \in S_\Gamma(f_1) \quad \text{und} \quad \mathbb{P}_V f_4, \mathbb{P}_V f_5 \in S_\Gamma(\psi_2)$$

$\langle z^k, z^l \rangle = \delta_{k,l}$ für alle $k, l \in \mathbb{Z}$ und damit

$$\langle z^{-1}, M_{4k} T_{-1} f_1 \rangle = \langle z^{-1}, -M_{4k} z^1 \rangle = -\langle z^{-1}, z^{4k+1} \rangle = -\delta_{-2,4k} = -\delta_{-\frac{1}{2},k} = 0$$

Deswegen gilt $\mathbb{P}_V f_2 = \mathbb{P}_V f_3 = \frac{1}{2} f_1$.
Auf der anderen Seite, die Grammschen Matrizen $\tilde{G}(k,t), k \in T_{L^\perp}, tT_{\mathcal{B}^\perp}$ für f_4, f_5 sind

$$\tilde{G}(0,t) = \begin{pmatrix} 4 & 4\overline{f_5(t)} \\ 4 f_5(t) & 4|f_5(t)|^2 \end{pmatrix} \qquad \tilde{G}(1,t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Erzeuger ist in diesem Fall wieder ψ_2 und der Fehler ist 0, da die Eigenwerte $\lambda_2(1,t) = \lambda_2(0,t) = 0$ sind. Folglich, $\mathbb{P}_V f_4 = f_4$ und $\mathbb{P}_V f_5 = f_5$.
Der gesamte Approximationsfehler ist

$$\mathcal{E}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, V) = \sum_{j=1}^{5} \|f_j - \mathbb{P}_V f_j\|^2 = 0 + \frac{1}{4}\|z^{-1}\|^2 + \frac{1}{4}\|-z^{-1}\|^2 + 0 + 0 = \frac{1}{2}$$

— $\mathbb{T}$ als kompakte Gruppe —

Der Darstellungsraum einer irreduziblen Darstellung einer abelschen Gruppe ist stets eindimensional. Ein Teil des Satzes von Peter und Weyl besagt

$$L^2(\mathbb{T}) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \overline{span\{\langle u, M_k v\rangle \ : \ u, v \in \mathcal{H}_k\}} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\alpha z \to z^k \ : \ \alpha \in \mathbb{C}\right\} \tag{4.2}$$

Insbesondere ist $L^2(\mathbb{T})$ zyklisch. Ein Erzeuger ist, zum Beispiel, $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \frac{z^k}{2^{|k|}}$. Folglich ist der Appoximationsfehler einer Lösung des Approximationsproblems immer 0, unabhängig von den zu approximierenden Funktionen $\mathcal{F}$ und der zulässigen Länge des invarianten Teilraumes. Zudem ist es einfach der Schnitt aller zulässigen Lösungen zu bestimmen. Wegen der Orthogonalitätsrelation (4.2) und der Unitärität der Fourier-Transformation, dieser Teilraum ist

$$\bigoplus_{k\in I_{\mathcal{F}}} \left\{z \to \alpha z^k \ : \ \alpha \in \mathbb{C}\right\} \qquad , I_{\mathcal{F}} = \left\{k \in \mathbb{Z} \ : \ \exists f \in \mathcal{F} : \widehat{f}(k) \neq 0\right\}$$

Im Konkreten Fall, $\widehat{f_5}(4k) \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Die Fourier Koeffizienten der anderen Funktionen sind offensichtlich. Also ist $I_{\mathcal{F}} = \{-1, 1\} \cup 4\mathbb{Z}$ und jede Lösung des Approximationsproblem ist der Form

$$\bigoplus_{k\in I} \left\{z \to \alpha z^k \ : \ \alpha \in \mathbb{C}\right\}$$

für ein $I \subseteq \mathbb{Z}$ mit $I_{\mathcal{F}} \subseteq I$.

§5 Zusammenfassung

Abschließend wollen wir prüfen, inwiefern die gefundenen Ergebnisse das anfängliche Approximationsproblem lösen.
Viele der typischen lokalkompakten Gruppen sind mit einem oder beiden Fällen abgedeckt. Jedoch ist dies weder aus rein mathematischer Sicht noch für die Anwendung eine vollständige Lösung. Es gibt zahlreiche Beispiele, die für die Anwendung relevant sind, aber keine der Szenarien passen.
Ein wichtiges Werkzeug war die Verallgemeinerung des Satzes von Eckart-Young, der tranditionell für den endlich dimensionalen Fall formuliert ist.
Für die Existenzfrage haben wir zwei verschiedene Möglichkeiten das Problem in eine Familie äquivalenter Probleme zu übersetzen. Wenn die Darstellung in eine orthogonale Summe wie in 2. Abschnitt zerfällt bietet sich einen ähnlichen Vorgang an der ziemlich direkt und intuitiv funktioniert. Jedoch muss man bei der Bestimmung der zyklischen Räume vorsichtiger sein, da $\mathcal{H}_\sigma$ sind im Allgemein nicht eindlich dimensional, wie z.B. die reellen Zahlen mit der linksregulären Darstellung. Falls $dim(\mathcal{H}_\sigma) = m_p = \infty$ gilt, dann ist $\mathcal{H}_\sigma \otimes \mathcal{K}_\sigma$ kein Hilbertraum, und man muss zum Raum der Hilbert-Schmidt Operatoren $HS(\overline{\mathcal{K}_\sigma}, \mathcal{H}_\sigma)$ übergehen.
Die Veralgemeinerung der direkten Summen ist die Zerlegung in direkter Integralen. Im Allgemein sind die Komponenten keine irreduziblen Darstellungen und die Theorie ist deutlich komplizierter. In diesem Fall könnte die erste Idee, indem man das Problem punktweise löst der einfacheren Ansatz sein. Das Problem wäre dann aber wieder die Messbarkeit der zussammengesetzte Lösung nachzuweisen und eine alternative Formel für den Approximationsfehler ähnlich an Proposition (2.15) herzuarbeiten.
Der Approximationsfehler kam in beiden Fällen als Folgerung aus dem Satz von Eckart-Young. Falls das Problem unter andere Annahmen sich wieder auf die Anwendung dieses Satzes reduziert, dann ist der Approximationsfehler einfach zu bestimmen.
Insgesamt konnten die Besonderheiten der betrachteten Speziallfällen also sinnvoll angewendet werden und stellen potentielle Ansätze für die Lösung des Approximationsproblems für weitere Speziallfälle dar.

Eigenständigkeitserklärung

Der Verfasser erklärt, dass er die vorliegende Arbeit selbständig, ohne fremde Hilfe und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt hat.

Literatur

[1] Akram Aldroubi, Carlos Cabrelli, Doug Hardin, and Ursula Molter. Optimal shift invariant spaces and their parseval generators, 2006.

[2] Sheldon Jay Axler. *Linear Algebra Done Right*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, third edition, 2015.

[3] D. Barbieri, C. Cabrelli, E. Hernández, and U. Molter. Data approximation with time-frequency invariant systems, 2020.

[4] Marcin Bownik and Kenneth Ross. The structure of translation-invariant spaces on locally compact abelian groups. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 21, 08 2015.

[5] Carlos Cabrelli and Victoria Paternostro. Shift invariant spaces on lca groups, 2009.

[6] Wolfgang Dahmen and Arnold Reusken. *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Springer-lehrbuch. Springer, Berlin, 2006.

[7] J. Feldman and F. P. Greenleaf. Existence of borel transversals in groups. *Pacific J. Math.*, 25(3):455–461, 1968.

[8] G.B. Folland. *A course in abstract harmonic analysis, second edition*. Chapman and Hall/CRC, 02 2016.

[9] Karl H. Hofmann and Sidney A. Morris. *The Structure of Compact Groups*. De Gruyter, Berlin, Boston, 2013.

[10] Eberhard Kaniuth and Gitta Kutyniok. Zeros of the zak transform on locally compact abelian groups. 1998.

[11] Amos Ron and Zuowei Shen. Frames and stable bases for shift-invariant subspaces of $L_2(\mathbb{R}^d)$. 47, 02 1970.

[12] Walter Rudin. *Fourier Analysis on Groups*. Dover Publications, 1962.

[13] Eric Stade. *Fourier Analysis*. John Wiley & Sons, Ltd, 2011.