

Der Satz von Bernstein

Andreas Hochenegger

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	i
Kapitel 1. Begriffe aus der konvexen Geometrie	1
1. Polytope	1
2. Das Minkowskivolumen	4
Kapitel 2. Der Satz von Bernstein	13
Kapitel 3. Beweis nach Bernstein	17
1. Vorbemerkungen	17
2. Eigentlicher Beweis des Satzes	21
Kapitel 4. Beweis mit torischen Varietäten	27
1. Vorbemerkungen	27
2. Eigentlicher Beweis des Satzes	32
Kapitel 5. Satz von Bernstein für den affinen Fall	39
1. Translationsansatz	40
2. Hinzufügen der $\mathbf{0}$	41
3. Das I -stabile gemischte Volumen	42
4. Wieso ist die Anzahl der Nullstellen wichtig?	44
Kapitel 6. Anwendung des Satzes	47
1. Rein rechnerisch	47
2. Mit Zuhilfenahme von Bernstein	47
Anhang A. Notationen	51
Literaturverzeichnis	53

Einleitung

In dieser Diplomarbeit werden wir den Satz von Bernstein genau beleuchten. Dieser Satz gibt an, wieviele Nullstellen ein n -Tupel von Polynomen $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ aus $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ in $(\mathbb{C}^*)^n$ hat, sofern die Koeffizienten des Gleichungssystems genügend "allgemein" sind. Das Interessante an diesem Satz ist, daß diese Frage aus der klassischen algebraischen Geometrie eine Antwort hat, die aus der konvexen Geometrie kommt. Somit stellt dieser Satz eine Verbindung zweier ganz unterschiedlicher Gebiete der Mathematik dar. Die Anzahl der Nullstellen läßt sich mithilfe der f_1, \dots, f_n zugeordneter Polytope (die *Newtonpolytope* von f_1, \dots, f_n) berechnen – mit dem *Minkowskivolumen* dieser Newtonpolytope.

Im Kapitel 1 werden wir nach einer kurzen Aufzählung grundlegender Eigenschaften von Polytopen auf das *Minkowskivolumen* eingehen und einige wichtige Sätze dazu beweisen.

Anschließend wenden wir uns in den Kapiteln 2, 3 und 4 dem Satz von Bernstein zu. Wir beweisen diesen auf zwei verschiedene Arten. Einerseits wie es Bernstein 1975 in [1] getan hat, und andererseits unter Benützung *torischer Varietäten*, eine Methode, bei der Polytope eine größere Rolle spielen als im Beweis von Bernstein. Dabei folgen wir Rojas in [11]. Danach werden wir auf eine Verallgemeinerung auf den Fall, daß die Anzahl der Nullstellen in \mathbb{C}^n gesucht wird, im Kapitel 5 eingehen und einen kleinen Ausblick geben. Abschließend zeigen wir eine kleine Anwendung des Satzes von Bernstein in Kapitel 6.

Abschließend möchte ich meinem Betreuer Herwig Hauser für die große Hilfe bei der Abfassung meiner Diplomarbeit danken.

Begriffe aus der konvexen Geometrie

1. Polytope

In diesem Abschnitt werden wir einige Begriffe aus der konvexen Geometrie definieren, die wir im folgenden immer wieder brauchen werden. Viele der Begriffe dürften jedem, der sich mit konvexer Geometrie befaßt hat, schon bekannt sein und werden hauptsächlich der Vollständigkeit halber hier angeführt. Wir werden bei vielen Aussagen auf Beweise verzichten und auf die Literatur verweisen.

Sei $M = \{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ mit $k \in \mathbb{N}$ eine endliche Menge. Wir nennen die konvexe Hülle

$$P = \text{conv}(M) = \text{conv}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k)$$

ein (konvexes) *Polytop*. Unter der Dimension eines Polytops verstehen wir die Dimension des kleinsten affinen Unterraums, der das Polytop enthält.

Ein Polytop ist kompakt. Damit können wir folgende Konstruktion durchführen. Eine Hyperebene H ist bestimmt durch die Normale $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ vermöge $\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{p}, \mathbf{u} \rangle = \lambda\}$. Diese Hyperebene teilt \mathbb{R}^n in zwei abgeschlossene *Halbräume*

$$H^+ = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{p}, \mathbf{u} \rangle \geq \lambda\} \quad \text{und} \\ H^- = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{p}, \mathbf{u} \rangle \leq \lambda\}.$$

Die Normale \mathbf{u} ist in H^+ und wird *äußere* Normale genannt. Hingegen heißt $-\mathbf{u} \in H^-$ *innere* Normale. Beide sind eindeutig bis auf positive Vielfache.

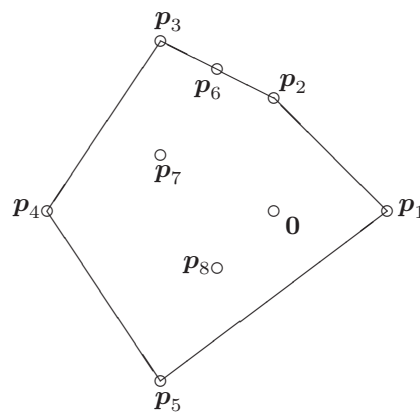


ABBILDUNG 1. Ein Polytop im \mathbb{R}^2 als konvexe Hülle von 8 Punkten.

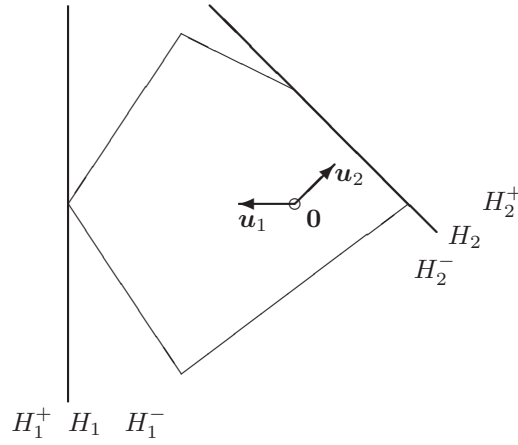


ABBILDUNG 2. Ein Polytop im \mathbb{R}^2 mit zwei Stützebenen.

Es ist für ein $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$

$$\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} H_\lambda(\mathbf{u}) = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{p}, \mathbf{u} \rangle = \lambda\} = \mathbb{R}^n.$$

Deshalb ist der Schnitt von $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} H_\lambda(\mathbf{u})$ mit P nicht leer. Da P kompakt ist, existiert

$$(1) \quad h_P(\mathbf{u}) := \max\{\lambda \in \mathbb{R} : H_\lambda(\mathbf{u}) \cap P \neq \emptyset\}.$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} h_P : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{u} &\mapsto h_P(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

wird *Stützfunktion* von P genannt. Die zugehörige (eindeutige) Hyperebene $H_P(\mathbf{u}) := H_{h_P(\mathbf{u})}(\mathbf{u})$ heißt *Stützebene* von P in Richtung \mathbf{u} .

BEISPIEL 1. Wir betrachten im folgenden immer wieder das Polytop $P = \text{conv}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_8) \subset \mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{p}_1 = (2, 0)$, $\mathbf{p}_2 = (0, 2)$, $\mathbf{p}_3 = (-2, 3)$, $\mathbf{p}_4 = (-4, 0)$, $\mathbf{p}_5 = (-2, -3)$, $\mathbf{p}_6 = (-1, \frac{5}{2})$, $\mathbf{p}_7 = (-2, 1)$ und $\mathbf{p}_8 = (-1, -1)$. In Abbildung 1 ist dieses Polytop dargestellt. Wie wir sehen, tragen die Punkte \mathbf{p}_6 , \mathbf{p}_7 und \mathbf{p}_8 nichts zur Gestalt von P bei und können weggelassen werden.

Für dieses Polytop P betrachten wir die Stützebene in Richtung $\mathbf{u}_1 = (-1, 0)$ und $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, 1)$. In Richtung \mathbf{u}_1 ist die Stützfunktion $h_P(\mathbf{u}_1) = 4$, da $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{p}_4 \rangle = 4 > \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{p}_i \rangle$ für $i \in \{1, \dots, 8\} \setminus \{4\}$. Damit ist

$$H_1 := H_P(\mathbf{u}_1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{x} \rangle = 4\}.$$

In Richtung $\mathbf{u}_2 = (1, 1)$ hat die Stützfunktion den Wert $h_P(\mathbf{u}_2) = \sqrt{2} = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{p}_1 \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{p}_2 \rangle$. Also ist

$$H_2 := H_P(\mathbf{u}_2) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{x} \rangle = \sqrt{2} \right\}$$

(siehe Abbildung 2).

Klarerweise ist $P = \bigcap_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}} H_P(\mathbf{u})^-$ und somit $P \subset H_P(\mathbf{u})^-$. Der Schnitt

$$(2) \quad F_P(\mathbf{u}) := P \cap H_P(\mathbf{u}) \neq \emptyset$$

heißt *Seite* von P mit (äußerer) Normalen \mathbf{u} . Aus Notationsgründen werden auch \emptyset und P selbst zu den Seiten von P gezählt. Zur Unterscheidung von den *echten* bzw. *eigentlichen* Seiten aus Gleichung (2) werden diese auch *unecht* bzw. *uneigentlich* genannt (dabei wird der Seite P mit einer gewissen Folgerichtigkeit die “Normale” $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ verpaßt). Die Seiten von P sind wieder Polytope und sind sogar die konvexe Hülle von gewissen $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k$. Falls $\dim P = n$ ist, dann meinen wir mit *Facetten*, *Kanten* bzw. *Ecken* ($n-1$ -, 1 - bzw. 0 -dimensionale Seiten).

Eine sehr wichtige Eigenschaft von Polytopen ist, daß sie nicht nur als konvexe Hülle von endlich vielen Punkten, sondern auch als Durchschnitt von endlich vielen Halbräumen dargestellt werden können. Diese Darstellungen sind dual zueinander: Ein Polytop P ist einerseits die konvexe Hülle seiner Ecken und andererseits der Durchschnitt all jener Halbräume $H_P(\mathbf{u})^-$, bei denen \mathbf{u} die äußere Normale einer Facette ist.

LITERATUR. Der Beweis für diese letzte Aussage (aus der alle schon davor getätigten Aussagen folgen) befindet sich in jedem Buch über konvexe Geometrie, das Polytope eingehender behandelt. Zum Beispiel wird in Zieglers Buch [15] in Theorem 2.5 auf Seite 65 diese Aussage (und noch mehr) bewiesen.

Zu einer nicht leeren Seite F von P definieren wir den *Normalenkegel* von F durch

$$N(F) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n : F \subseteq H_P(\mathbf{u}) \cap P\}.$$

Der Normalenkegel ist ein (polyhedraler) Kegel, das heißt, für alle $\mathbf{p} \in N(F)$ ist $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot \mathbf{p} \in N(F)$; $N(F)$ läßt sich als Durchschnitt von endlich vielen Halbräumen durch $\mathbf{0}$ schreiben.

Falls $\dim P = n$, dann ist $\mathbf{0}$ eine *Spitze* von $N(F)$, das heißt, es gibt einen Halbraum H , sodaß $N(F) \subseteq H$ und $N(F) \cap H = \{\mathbf{0}\}$.

LITERATUR. Zum Normalenkegel möchte ich auf Ewalds Buch [5] verweisen. Dort befindet sich in Teil 1 das Kapitel I.4 über Seiten und Normalenkegel.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einem Satz über das Volumen von Polytopen ab, den wir später benötigen und der das induktive Berechnen des Volumens ermöglicht.

Wir werden das Volumen des \mathbb{R}^n so normalisieren, daß das Volumen des Standardsimplex $\mathcal{S}_n = \text{conv}(\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ gleich 1 ist. Dieses Volumen werden wir mit \mathcal{V} bezeichnen. Es gilt $\mathcal{V}(K) = n!V(K)$, wobei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Polytop und V das übliche Volumen des \mathbb{R}^n bezeichnet. Wir ersparen uns nicht nur ein $n!$, auch werden einige Notationen einfacher. Mit V und \mathcal{V} meinen wir das n -dimensionale Volumen von $K \subset \mathbb{R}^n$, betrachten wir das k -dimensionale Volumen von K , so schreiben wir V_k und \mathcal{V}_k .

Für den nächsten Satz benötigen wir folgende Begriffe. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein $(n-1)$ -dimensionales Polytop und $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$. Die *Pyramide* P mit *Grundfläche* G und *Spitze* \mathbf{q} ist die Menge

$$P = \bigcup_{\mathbf{p} \in G} \overline{\mathbf{p}\mathbf{q}}.$$

Wir bezeichnen mit $\overline{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ die *Strecke* zwischen \mathbf{p} und \mathbf{q} , das ist die Menge

$$\{\lambda \cdot \mathbf{p} + (1 - \lambda) \cdot \mathbf{q} : \lambda \in [0, 1]\}.$$

Diese Pyramide hat das Volumen $V(P) = \frac{1}{n} h V_{n-1}(G)$ bzw. $\mathcal{V}(P) = h \mathcal{V}_{n-1}(G)$, wobei h der Abstand von der Spitze \mathbf{q} zum von G aufgespannten affinen Unterraum ist. Wir nennen h die *Höhe* von P .

SATZ 1. Sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein Polytop mit $n \geq 2$. Dann ist

$$(3) \quad \mathcal{V}(P) = \sum_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{u}\|=1} h_P(\mathbf{u}) \mathcal{V}_{n-1}(F_P(\mathbf{u})).$$

BEWEIS. Die Summe ist endlich, denn nur die Facetten von P haben ein $(n-1)$ -dimensionales Volumen, das von 0 verschieden ist. Wir können also für die Facetten F_1, \dots, F_k von P mit äußeren (normierten) Normalen $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ Gleichung (3) schreiben als

$$\mathcal{V}(P) = \sum_{i=1}^k h_P(\mathbf{u}_i) \mathcal{V}_{n-1}(F_i).$$

Da das Volumen unter Translation invariant ist, können wir oBdA. annehmen, daß $\mathbf{0} \in P$ ist. Sei $i \in \{1, \dots, k\}$. Wir bilden die Pyramide P_i mit Basis F_i und Spitze $\mathbf{0}$. Um das Volumen von P_i zu berechnen, benötigen wir ihre Höhe. Diese Höhe ist gerade $h_P(\mathbf{u}_i) \geq 0$. Also ist

$$\mathcal{V}(P_i) = h_P(\mathbf{u}_i) \mathcal{V}_{n-1}(F_i).$$

Sei nun $\mathbf{p} \in P \setminus \{\mathbf{0}\}$. Dann läßt sich der Halbstrahl

$$\{\lambda \cdot \mathbf{p} : \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$$

geschnitten mit P schreiben als die Strecke $\overline{\mathbf{0}f(\mathbf{p})}$, wobei $f(\mathbf{p})$ auf (mindestens) einer Facette von P liegt. Da $\mathbf{p} \in \overline{\mathbf{0}f(\mathbf{p})} \subset P_i$ für ein $i \in \{1, \dots, k\}$, ist $\bigcup_{i=1}^k P_i = P$.

Sei zusätzlich $\mathbf{p} \in P_i \cap P_j \neq \emptyset$ mit $i, j \in \{1, \dots, k\}$ und $i \neq j$. Dann ist $f(\mathbf{p}) \in F_i \cap F_j$. Somit ist $P_i \cap P_j$ die Pyramide mit Grundfläche $F_i \cap F_j$ und Spitze $\mathbf{0}$. Da $F_i \cap F_j$ höchstens $(n-2)$ -dimensional ist, ist diese Pyramide höchstens $(n-1)$ -dimensional. Also liefert der Durchschnitt $P_i \cap P_j$ keinen Beitrag zum Volumen von P . Aus diesen beiden Überlegungen ergibt sich

$$\mathcal{V}(P) = \sum_{i=1}^k \mathcal{V}(P_i) = \sum_{i=1}^k h_P(\mathbf{u}_i) \mathcal{V}_{n-1}(F_i)$$

(siehe Abbildung 3). □

2. Das Minkowskivolumen

LITERATUR. Dieses Kapitel basiert auf Sätzen aus dem Buch von Bonnesen und Fenchel [2] (Kapitel 29) und Ewalds Buch [5] (Teil 1, Kapitel IV.3 und IV.4).

Seien $P_1, P_2 \subset \mathbb{R}^n$ zwei Polytope. Die *Minkowskisumme* $P_1 + P_2$ ist die Menge

$$\{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 : \mathbf{p}_1 \in P_1, \mathbf{p}_2 \in P_2\}.$$

Sei $i \in \{1, 2\}$. Für $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{p}_i \in P_i$ $\langle \mathbf{u}, \mathbf{p}_i \rangle \leq h_{P_i}(\mathbf{u})$. Damit ist $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \leq h_{P_1}(\mathbf{u}) + h_{P_2}(\mathbf{u})$. Dies gilt auch, falls statt dem " \leq " ein " $=$ " steht. Also gilt für die Stützfunktion von $P_1 + P_2$

$$h_{P_1+P_2}(\mathbf{u}) = h_{P_1}(\mathbf{u}) + h_{P_2}(\mathbf{u}).$$

Daß $P_1 + P_2$ wieder ein Polytop ist, ergibt sich als eine Folgerung von

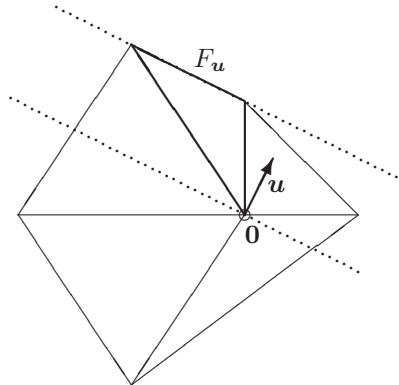


ABBILDUNG 3. Die Unterteilung eines Polytops in 5 Pyramiden.

LEMMA 1. Sei F eine Seite der Minkowskisumme $P_1 + P_2$. Dann gibt es eindeutige Seiten F_1 und F_2 von P_1 bzw. P_2 , sodaß $F = F_1 + F_2$.

BEWEIS. Da eine Seite eines Polytops sich in eindeutiger Weise als konvexe Hülle ihrer Ecken schreiben läßt, genügt es die Behauptung für Ecken von $P_1 + P_2$ zu zeigen. Sei \mathbf{p} eine Ecke von $P_1 + P_2$ und $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ jene Richtung, sodaß $\mathbf{p} = P_1 + P_2 \cap H_{P_1+P_2}(\mathbf{u})$. Also erfüllt \mathbf{p} als einziger Punkt von $P_1 + P_2$ die Gleichung $\langle \mathbf{u}, \mathbf{p} \rangle = h_{P_1+P_2}(\mathbf{u})$. Aufgrund unserer vorangegangenen Beobachtungen der Stützfunktion gibt es für $i \in \{1, 2\}$ ein eindeutiges $\mathbf{p}_i \in P_i$ mit $\langle \mathbf{u}, \mathbf{p}_i \rangle = h_{P_i}(\mathbf{u})$. Damit ist $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$. \square

Es gibt zwei Definitionen des Minkowskivolumens, die gebräuchlich sind. Wir werden, ausgehend von einer Definition, die beweistechnische Vorteile hat und gleichzeitig die wichtige Bedeutung für die Minkowskisumme von Polytopen zeigt, die andere kennenlernen. Zunächst die Charakterisierung des Minkowskivolumens, die auf den Namensgeber zurückgeht.

SATZ 2. Seien P_1, \dots, P_k Polytope im \mathbb{R}^n und $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Das Volumen $\mathcal{V}\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot P_i\right)$ ist ein homogenes Polynom in $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ mit Grad n .

Aufgrund von Satz 2 können wir dieses homogene Polynom schreiben als

$$\mathcal{V}\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot P_i\right) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^n} c_{\mathbf{i}} \lambda^{\mathbf{i}}.$$

Wir können die Koeffizienten in dieser Summe so wählen, daß $c_{i_1 \dots i_n} = c_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_n)}$ für jede Permutation σ der Zahlen i_1, \dots, i_n ist. Wir bezeichnen dann den Koeffizienten $c_{i_1 \dots i_n}$ mit $MV_n(P_{i_1}, \dots, P_{i_n})$ und nennen ihn das *gemischte Volumen* oder *Minkowskivolumen* von P_{i_1}, \dots, P_{i_n} . Wie im Falle des (normalisierten) Volumens, schreiben wir nur $MV(P_{i_1}, \dots, P_{i_n})$, falls wir das n -dimensionale Minkowskivolumen meinen.

BEWEIS. Wir werden das Resultat per Induktion beweisen.

Für $n = 1$ ist $P_i = [p_i, q_i]$ ein Intervall mit $p_i \leq q_i$ für $i \in \{1, \dots, k\}$. Das Volumen der Minkowskisumme ist

$$\begin{aligned} \mathcal{V}\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot P_i\right) &= [\sum_{i=1}^k \lambda_i p_i, \sum_{i=1}^k \lambda_i q_i] \\ &= \sum_{i=1}^k \lambda_i q_i - \sum_{i=1}^k \lambda_i p_i \\ &= \sum_{i=1}^k \lambda_i (q_i - p_i) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathcal{V}(P_i). \end{aligned}$$

Wir haben ein homogenes Polynom mit Grad 1 in $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ erhalten.

Für den Induktionsschritt $n - 1 \mapsto n$ sei $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. Wir betrachten zunächst die Stützebenen $H_{P_i}(\mathbf{u})$ und die Seiten $F_i(\mathbf{u}) := H_{P_i}(\mathbf{u}) \cap P_i$ von P_i für $i \in \{1, \dots, k\}$. Wir setzen $P := \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot P_i$ und dazu $F(\mathbf{u}) := H_P(\mathbf{u}) \cap P$. Damit gilt $F(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot F_i(\mathbf{u})$. Da Volumina unter Translation invariant sind, können wir oBdA. annehmen, daß alle $F_1(\mathbf{u}), \dots, F_k(\mathbf{u})$ in der Hyperebene $H_P(\mathbf{u})$ liegen. Wir dürfen die Induktionsvoraussetzung auf

$$\mathcal{V}_{n-1}(F(\mathbf{u})) = \mathcal{V}_{n-1}\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i F_i(\mathbf{u})\right)$$

anwenden.

Kehren wir nun zu P zurück. Wenn $\dim P < n$ ist, so erhalten wir für das Volumen 0, was klarerweise als ein homogenes Polynom mit Grad n geschrieben werden kann. Sei also $\dim P = n$. Zusätzlich dürfen wir annehmen, daß $\mathbf{0} \in P$. Seien $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ die äußeren Normalen der Facetten von P mit $\|\mathbf{u}_i\| = 1$ für $i = \{1, \dots, m\}$. Wir zerlegen P in m Pyramiden mit Spitze $\mathbf{0}$ und mit Basis die m Facetten von P . Wir erhalten nach Satz 1

$$\begin{aligned} V(P) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m h_P(\mathbf{u}_j) V_{n-1}(F(\mathbf{u}_j)) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i h_{P_i}(\mathbf{u}_j)\right) V_{n-1}(F(\mathbf{u}_j)). \end{aligned}$$

Für das normalisierte Volumen ergibt sich also

$$\mathcal{V}(P) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i h_{P_i}(\mathbf{u}_j)\right) \mathcal{V}_{n-1}(F(\mathbf{u}_j)).$$

Da nach unseren vorangegangenen Überlegungen $\mathcal{V}_{n-1}(F(\mathbf{u}_j))$ ein homogenes Polynom mit Grad $n - 1$ ist, folgt die Behauptung für $\mathcal{V}(P)$. \square

BEMERKUNG 1. Wir werden im folgenden bei endlichen Mengen $A, A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{Z}^n$ statt $\mathcal{V}(\text{conv}(A))$ bzw. $\text{MV}(\text{conv}(A_1), \dots, \text{conv}(A_n))$ einfach nur $\mathcal{V}(A)$ bzw. $\text{MV}(A_1, \dots, A_n)$ schreiben.

Mit dieser Definition lassen sich nun wichtige Eigenschaften des Minkowskivolumens beweisen. Die nächsten zwei Folgerungen ergeben sich direkt aus der Definition und besagen, daß wir es beim Minkowskivolumen mit einer *symmetrischen, multilinearen* Abbildung zu tun haben.

FOLGERUNG 2.1. Für jede Permutation σ der Zahlen $1, \dots, n$ ist

$$\text{MV}(P_1, \dots, P_n) = \text{MV}(P_{\sigma(1)}, \dots, P_{\sigma(n)}).$$

FOLGERUNG 2.2. Für ein weiteres Polytop $P'_1 \subset \mathbb{R}^n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist

$$\text{MV}(\lambda \cdot P_1 + \mu \cdot P'_1, P_2, \dots, P_n) = \lambda \text{MV}(P_1, \dots, P_n) + \mu \text{MV}(P'_1, P_2, \dots, P_n).$$

Aufgrund der Folgerung 2.1 gilt das analog in jeder Komponente.

FOLGERUNG 2.3. Für ein Polytop $P \subset \mathbb{R}^n$ ist $\text{MV}(P, \dots, P) = \mathcal{V}(P)$.

BEWEIS. Es ist $\lambda^n \mathcal{V}(P) = \mathcal{V}(\lambda \cdot P) = \text{MV}(P, \dots, P) \lambda \cdots \lambda = \lambda^n \text{MV}(P, \dots, P)$. \square

Für die zweite Definition des Minkowskivolumens benötigen wir folgenden Satz über symmetrische, multilineare Abbildungen.

SATZ 3. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $m : V^n \rightarrow K$ eine symmetrische, multilineare Abbildung. Dann ist m schon durch die Bilder der Diagonale $m(v) := m(v, \dots, v)$ ($v \in V$) eindeutig bestimmt. Alle anderen Funktionswerte $m(v_1, \dots, v_n)$ lassen sich mithilfe der Polarisierungsformel berechnen,

$$(4) \quad \begin{aligned} n! m(v_1, \dots, v_n) &= m(v_1 + \dots + v_n) \\ &- \sum_{i=1}^n m(v_1 + \dots + \hat{v}_i + \dots + v_n) \\ &+ \sum_{i < j} m(v_1 + \dots + \hat{v}_i + \dots + \hat{v}_j + \dots + v_n) \\ &\mp \dots \\ &+ (-1)^{n-2} \sum_{i < j} m(v_i + v_j) \\ &+ (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n m(v_i). \end{aligned}$$

BEWEIS. Damit sich die Notation vereinfacht schreiben wir statt $m(v_1, \dots, v_n)$ das Produkt $v_1 \cdots v_n$. Damit bekommt (4) folgende Gestalt

$$\begin{aligned} n! v_1 \cdots v_n &= (v_1 + \dots + v_n)^n \\ &- \sum_{i=1}^n (v_1 + \dots + \hat{v}_i + \dots + v_n)^n \\ &\mp \dots \\ &+ (-1)^{n-2} \sum_{i < j} (v_i + v_j)^n \\ &+ (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n v_i^n. \end{aligned}$$

Um die Gleichheit zu zeigen, betrachten wir zunächst, in welchen Termen v_1^n auftritt. Im ersten Term der rechten Seite tritt v_1^n einmal auf, im nächsten $(n-1)$ -mal, im dritten $\binom{n-1}{2}$ -mal, usw. Insgesamt erhalten wir als Koeffizient von v_1^n

$$\begin{aligned} &1 - (n-1) + \binom{n-1}{2} - / + \dots \\ &\dots + (-1)^{n-3} \binom{n-1}{n-3} + (-1)^{n-2} (n-1) + (-1)^{n-1} = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n-1}{i} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (-1)^i 1^{(n-1)-i} \\ &= (-1+1)^{n-1} = 0. \end{aligned}$$

Wir können die analoge Rechnung auch für $v_1^{n-1} v_2$ durchführen und kommen zum selben Ergebnis. Das einzige Produkt, mit dem dieses Verfahren nicht funktioniert, ist erwartungsgemäß $v_1 \cdots v_n$. Denn dieses tritt nur im ersten Term der rechten Seite auf (in allen anderen Termen der rechten Seite wird mindestens ein v_i für $i \in \{1, \dots, n\}$ weggelassen). Wir zeigen nun mittels einfacher Induktion, daß $v_1 \cdots v_n$ genau $n!$ Mal auf der rechten Seite, das heißt, im ersten Term der rechten Seite auftritt. Für $n=1$ gilt diese Aussage klarerweise. Für den Induktionsschritt $n-1 \mapsto n$ zerlegen wir $(v_1 + \dots + v_n)^n = ((v_1 + \dots + v_{n-1}) + v_n)^n$ und erhalten durch Anwenden der binomischen Formel $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (v_1 + \dots + v_{n-1})^i v_n^{n-i}$. Der

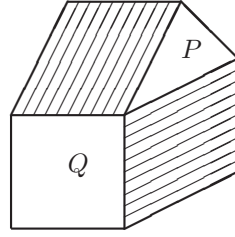


ABBILDUNG 4. Das Minkowskivolumen im Fall $n = 2$ eines Dreiecks P und Quadrates Q (schraffierte Fläche).

einzigste Term dieser Summe, wo v_n nur als linearer Faktor auftritt, ist $n(v_1 + \dots + v_{n-1})^{n-1}v_n$. Nach Induktionsvoraussetzung kommt in $(v_1 + \dots + v_{n-1})^{n-1}$ das Produkt $v_1 \cdots v_{n-1}$ genau $(n-1)!$ vor. Damit folgt die Behauptung. \square

Die zweite gebräuchliche Definition ist somit eine direkte Folgerung der Polarisierungsformel.

SATZ 4. Für $MV(P_1, \dots, P_n)$ gibt es folgende Darstellung als Linearkombination von Volumina von Minkowskisummen der P_i , $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} n! MV(P_1, \dots, P_n) &= \mathcal{V}(P_1 + \dots + P_n) \\ &- \sum_{i=1}^n \mathcal{V}(P_1 + \dots + \hat{P}_i + \dots + P_n) \\ &+ \sum_{i < j} \mathcal{V}(P_1 + \dots + \hat{P}_i + \dots + \hat{P}_j + \dots + P_n) \\ &\mp \dots \\ &+ (-1)^{n-2} \sum_{i < j} \mathcal{V}(P_i + P_j) \\ &+ (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n \mathcal{V}(P_i) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich sofort

FOLGERUNG 4.1. Das Minkowskivolumen ist invariant unter Translation der einzelnen Polytope. Genauer: seien $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \in \mathbb{R}^n$, dann ist

$$MV(\mathbf{p}_1 + P_1, \dots, \mathbf{p}_n + P_n) = MV(P_1, \dots, P_n).$$

FOLGERUNG 4.2. Das Minkowskivolumen ist invariant unter gemeinsamer Drehung aller Polytope. Genauer: sei $U \in \mathcal{O}(\mathbb{R}, n)$, dann ist

$$MV(U(P_1), \dots, U(P_n)) = MV(P_1, \dots, P_n).$$

Für $n = 2$ erhalten wir mit Satz 4 eine einfache Formel für das Minkowskivolumen (siehe Abbildung 4)

$$MV(P, Q) = \frac{1}{2} (\mathcal{V}(P + Q) - \mathcal{V}(P) - \mathcal{V}(Q)) = V(P + Q) - V(P) - V(Q).$$

Abschließend noch zwei Sätze, die hier gut hereinpassen und die wir im Kapitel 6 benötigen werden.

Wir benötigen dafür noch zwei Begriffe. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein $(n-1)$ -dimensionales Polytop und $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$. Dann nennen wir die Minkowskisumme $P = G + \text{conv}(\mathbf{0}, \mathbf{q})$ ein *Prisma*, dessen Volumen ist $\mathcal{V}(p) = n \mathcal{V}_{n-1}(G) h$, wobei h der Abstand von der

Spitze \mathbf{q} zum von G aufgespannten affinen Unterraum ist. Wir nennen h die *Höhe* von P .

Sei $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ und $K \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakte, konvexe Menge. Dann ist

$$d(\mathbf{q}, K) := \min\{\|\mathbf{q} - \mathbf{p}\| : \mathbf{p} \in K\}$$

wohldefiniert, da K abgeschlossen, und heißt *Abstand* von \mathbf{p} zu K . Aufgrund der Konvexität von K gibt es ein eindeutiges $\mathbf{q}' \in K$ mit $d(\mathbf{q}, K) = \|\mathbf{q} - \mathbf{q}'\|$.

SATZ 5. *Seien $P, Q \subset \mathbb{R}^n$ Polytope. Mit F_1, \dots, F_m wollen wir die Facetten Seiten von Q bezeichnen, sowie mit $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ die zugehörigen äußeren Normalen, wobei deren Länge 1 sein soll. Dann ist*

$$\text{MV}(P, Q, \dots, Q) = \sum_{i=1}^m h_P(\mathbf{u}_i) \mathcal{V}_{n-1}(F_i).$$

BEWEIS. Wir werden für den Beweis das normalisierte Volumen $\mathcal{V}(Q + \lambda \cdot P)$ auf zwei Arten zerlegen und daraus unsere Behauptung gewinnen. Für die erste Art werden wir dieselbe Methode verwenden wie im Beweis zum Satz 3, und zwar daß sich $\text{MV}(P_1, \dots, P_n)$ als multilineare, symmetrische Abbildung genauso verhält wie $m(v_1, \dots, v_n) = v_1 \cdots v_n$. Es ist $\mathcal{V}(Q + \lambda \cdot P) = \text{MV}(Q + \lambda \cdot P, \dots, Q + \lambda \cdot P)$. Dafür schreiben wir nun $(q + \lambda p)^n$. Durch Ausmultiplizieren erhalten wir

$$(q + \lambda p)^n = \sum_{i=0}^n \lambda^i \binom{n}{i} q^{n-i} p^i.$$

Übersetzen wir diesen Ausdruck wieder zurück, so erhalten wir

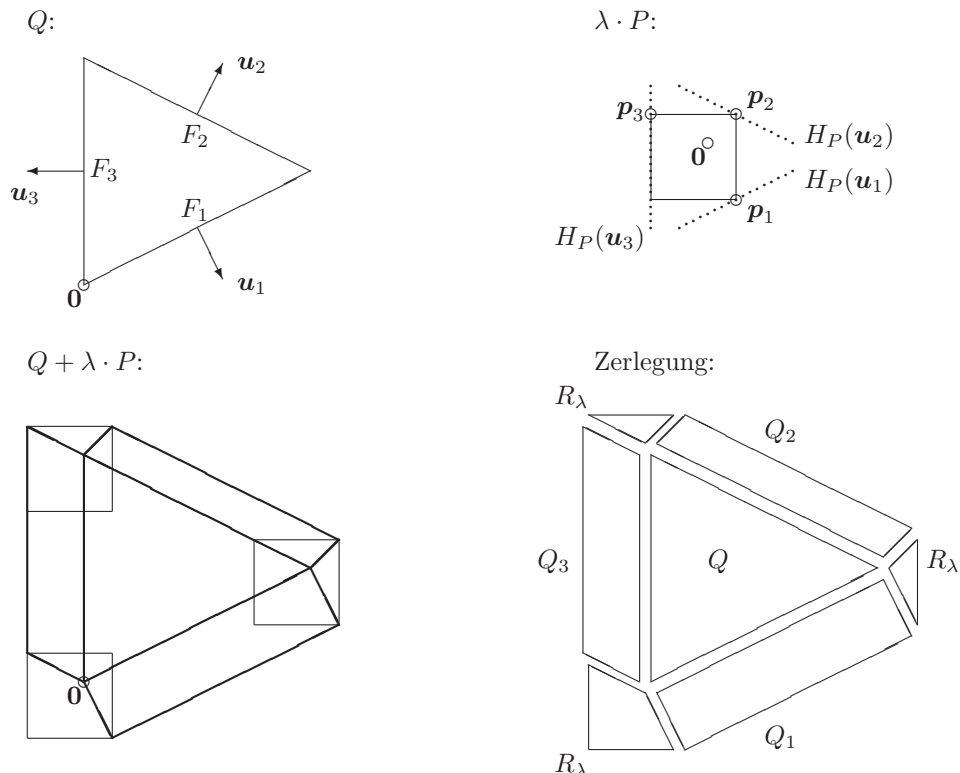
$$\begin{aligned} \mathcal{V}(Q + \lambda \cdot P) &= \mathcal{V}(Q) + \\ &+ \lambda \binom{n}{1} \text{MV}(Q, \dots, Q, P) + \\ (5) \quad &+ \lambda^2 \binom{n}{2} \text{MV}(Q, \dots, Q, P, P) + \\ &+ \dots \\ &+ \lambda^{n-1} \binom{n}{n-1} \text{MV}(Q, P, \dots, P) + \\ &+ \lambda^n \mathcal{V}(P). \end{aligned}$$

Für die andere Art untersuchen wir, wie das Polytop $Q + \lambda \cdot P$ aus den Seiten von Q entsteht (siehe Abbildung 5). OBdA. dürfen wir annehmen, daß sowohl $\mathbf{0} \in \lambda \cdot P$ als auch $\mathbf{0} \in Q$ ist.

Eine triviale Seite von Q ist Q selbst. Addieren wir hierzu noch die $\mathbf{0} \in \lambda \cdot P$, so erhalten wir einen Teil von $Q + \lambda \cdot P$, der $\mathcal{V}(Q)$ zum Gesamtvolumen beiträgt.

Als nächstes betrachten wir die Facetten von Q . Sei $i \in \{1, \dots, m\}$. Zunächst bezeichnen wir mit $\lambda \cdot \mathbf{p}_i$ einen Punkt von $\lambda \cdot P$, der auf der Stützebene $H_P(\mathbf{u}_i)$ liegt (dieser Punkt ist nicht notwendigerweise eindeutig). Nun bilden wir die Minkowskisumme $Q_i := F_i + \text{conv}(\mathbf{0}, \lambda \cdot \mathbf{p}_i)$. Dieses Prisma hat die Basis F_i und die Höhe $\lambda h_P(\mathbf{u}_i)$. Die Höhe läßt sich bestimmen, indem wir $\text{conv}(\mathbf{0}, \lambda \cdot \mathbf{p}_i)$ auf den Normalenkegel der Seite F_i projizieren. Es ist $N(F_i) = \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot \mathbf{u}_i$ und die Projektion von $\text{conv}(\mathbf{0}, \lambda \cdot \mathbf{p}_i)$ auf $N(F_i)$ ist $\text{conv}(\mathbf{0}, \lambda h_P(\mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{u}_i)$. Damit ist

$$\mathcal{V}(Q_i) = n \mathcal{V}_{n-1}(F_i) \lambda h_P(\mathbf{u}_i).$$

ABBILDUNG 5. Die Zerlegung von $Q + \lambda \cdot P$.

Es entstehen dadurch m Prismen, deren paarweiser Durchschnitt und Durchschnitt mit Q höchstens $(n - 1)$ -dimensional ist, aber die innerhalb von $Q + \lambda \cdot P$ liegen. Deren Beitrag zum Gesamtvolumen ist

$$\lambda n \sum_{i=1}^m h_P(\mathbf{u}_i) \mathcal{V}_{n-1}(F_i).$$

Was gilt nun für die Punkte der Restmenge R_λ ? Wir können voranschreiten und die $(n - 2)$ -dimensionalen Seiten G_1, \dots, G_k von Q betrachten.

Sei $M = \max\{h_P(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|\mathbf{u}\| = 1\}$. Da $\mathbf{0} \in P$, ist $M \geq 0$. Für alle $\mathbf{p} \in R_\lambda$ gibt es eine $(n - 2)$ -dimensionale Seite G , sodaß $d(\mathbf{p}, G) \leq \lambda M$. Für $i \in \{1, \dots, k\}$ definieren wir die Menge

$$K_\lambda(G_i) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n : d(\mathbf{p}, G_i) \leq \lambda M\}.$$

Da $R_\lambda \subseteq \bigcup_{i=1}^k K_\lambda(G_i)$, ist

$$(6) \quad \mathcal{V}(R_\lambda) \leq \sum_{i=1}^k \mathcal{V}(K_\lambda(G_i)).$$

Für $n = 2$ sind die $(n - 2)$ -dimensionalen Seiten G von Q Punkte und damit $K_\lambda(G)$ eine Kreisscheibe. Deren Volumen ist $\lambda^2 M^2 \pi$. Damit ist die Summe der Volumina ein Polynom in λ der Gestalt $c\lambda^2$ mit $c \in \mathbb{R}$. Da die Restmenge eine

Vereinigung von Polytopen ist, deren Durchschnitt höchstens eindimensional ist, folgt aus Satz 2, daß $\mathcal{V}(R_\lambda)$ ein Polynom g in λ ist. Nach Gleichung (6) ist für alle $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$0 \leq g(\lambda) \leq c\lambda^2.$$

Damit ist $g = b\lambda^2$ für ein $b \in \mathbb{R}$, insbesondere hat g den Untergrad $\text{udeg}(g) = 2$.

Für den Induktionsschritt $n \mapsto n + 1$ werden wir die rechte Seite von Gleichung (6) weiter nach oben abschätzen. Sei $i \in \{1, \dots, k\}$ und oBdA. $G_i \subset \mathbb{R}^{n-2} \times \{0\}^2$. Da für $\mathbf{p} \in K_\lambda(G_i)$ der Abstand $d(\mathbf{p}, G_i) \leq \lambda M$ ist, ist insbesondere für $\tilde{K}_\lambda(G_i) := K_\lambda(G_i) \cap \mathbb{R}^{n-2} \times \{0\}^2 \subseteq K_\lambda(G_i)$ der Abstand $d(\mathbf{p}, \tilde{K}_\lambda(G_i)) \leq \lambda M$. Damit ist $K_\lambda(G_i)$ enthalten in

$$\mathcal{K}_\lambda(G_i) := \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n : d(\mathbf{p}, \tilde{K}_\lambda(G_i)) \leq \lambda M\}.$$

Sei nun $H_\mu \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperebene der Gestalt $\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{p}, \mathbf{u} \rangle = \mu\}$ mit der Normalen \mathbf{u} in $\mathbb{R}^{n-2} \times \{0\}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ und $\mu \in \mathbb{R}$. Dann ist der Schnitt $H_\mu \cap \mathcal{K}_\lambda(G_i)$ höchstens $(n-1)$ -dimensional. Diesen können wir schreiben, als die Menge der Punkte $\mathbf{p} \in H_\mu$, die von einem $(n-3)$ -dimensionalen Polytop maximal den Abstand λM haben. Nach Induktionsvoraussetzung ist deren Volumen ein Polynom mit Untergrad 2. Integrieren wir

$$\int_{\mu \in \mathbb{R}} \mathcal{V}(H_\mu \cap \mathcal{K}_\lambda(G_i)) d\mu,$$

so erhalten wir, daß $\sum_{i=1}^k \mathcal{V}(\mathcal{K}_\lambda(G_i))$ ein Polynom f in λ mit $\text{udeg } g = 2$ ist. Wie wir uns schon im Fall $n = 2$ überlegt haben, ist das Volumen von R_λ ein Polynom g in λ . Da $g(0) = 0$, ist $\text{udeg } g \geq 1$. Damit hat g die Gestalt $\sum_{i \geq 1} c_i \lambda^i$. Für alle $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist also

$$0 \leq \sum_{i \geq 1} c_i \lambda^i \leq f(\lambda) = \sum_{i \geq 2} d_i \lambda^i.$$

Für $\lambda > 0$ formen wir um zu

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 1} c_i \lambda^{i-1} &\leq \sum_{i \geq 2} d_i \lambda^{i-1} \\ c_1 &\leq \sum_{i \geq 2} (d_i - c_i) \lambda^{i-1} \\ c_1 &\leq \lambda \left(\sum_{i \geq 2} (d_i - c_i) \lambda^{i-2} \right). \end{aligned}$$

Da λ beliebig klein sein kann, muß $c_1 \leq 0$ sein. Da das Volumen mit wachsendem λ größer wird, erhalten wir

$$\frac{dg}{d\lambda}(0) = c_1 \geq 0.$$

Damit ist $c_1 = 0$ und $\text{udeg } g \geq 2$.

Insgesamt läßt sich $\mathcal{V}(Q + \lambda \cdot P)$ schreiben als

$$(7) \quad \begin{aligned} \mathcal{V}(Q + \lambda \cdot P) &= \mathcal{V}(Q) \\ &+ \lambda n \sum_{i=1}^m h_P(\mathbf{u}_i) \mathcal{V}_{n-1}(F_i) \\ &+ \text{höhere Terme.} \end{aligned}$$

Wir können die Gleichungen (5) und (7) als Polynome in λ koeffizientenweise vergleichen und erhalten die Behauptung. \square

SATZ 6. Für Polytope $P_1, P'_1, P_2, \dots, P_n \subset \mathbb{R}^n$ mit $P_1 \subseteq P'_1$ ist

$$\text{MV}(P_1, \dots, P_n) \leq \text{MV}(P'_1, P_2, \dots, P_n).$$

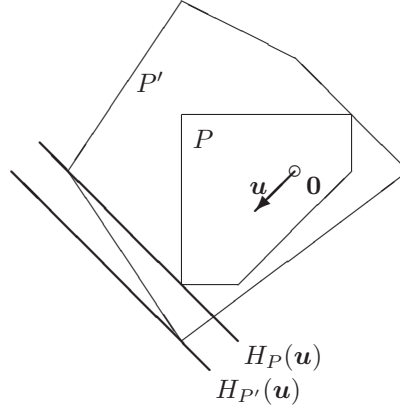


ABBILDUNG 6. Zwei Polytope $P \subseteq P'$ und $H_P(\mathbf{u})$ und $H_{P'}(\mathbf{u})$.

BEWEIS. OBdA. können wir annehmen, daß $\mathbf{0} \in P_1 \subseteq P'_1$.

Für $n = 1$ gilt, daß $MV(P_1) = \mathcal{V}(P_1) \leq \mathcal{V}(P'_1) = MV(P'_1)$. Für $n = 2$ werden wir anders argumentieren. Für ein beliebiges $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\mathbf{u}\| = 1$ gilt wegen $\mathbf{0} \in P_1 \subseteq P'_1$ für die Stützfunktionen $0 \leq h_{P_1}(\mathbf{u}) \leq h_{P'_1}(\mathbf{u})$ (siehe Abbildung 6). Damit ergibt Satz 5 $MV(P_1, P_2) \leq MV(P'_1, P_2)$. Um das einzusehen, seien G_1, \dots, G_k die Facetten von P_2 . Dann ist

$$MV(P_1, P_2) = \sum_{i=1}^k h_{P_1}(\mathbf{u}_i) \mathcal{V}_{n-1}(G_i) \leq \sum_{i=1}^k h_{P'_1}(\mathbf{u}_i) \mathcal{V}_{n-1}(G_i) = MV(P'_1, P_2).$$

Für den allgemeinen Fall bilden wir die Minkowskisumme $P = \sum_{i=2}^n \lambda_i \cdot P_i$. Es seien F_1, \dots, F_m die Facetten von P sowie $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ die zugehörigen äußeren Normalen mit Länge 1. Nach Satz 5 wissen wir

$$MV(P_1, P, \dots, P) = \sum_{j=1}^m h_{P_1}(\mathbf{u}_j) \mathcal{V}(F_j).$$

Die Facetten F_j lassen sich schreiben als $\sum_{i=2}^n \lambda_i \cdot P_i \cap H_{P_i}(\mathbf{u}_j)$ für $j \in \{1, \dots, m\}$. Eingesetzt ergibt sich

$$(8) \quad MV(P_1, P, \dots, P) = \sum_{j=1}^m h_{P_1}(\mathbf{u}_j) \mathcal{V}_{n-1} \left(\sum_{i=2}^n \lambda_i \cdot P_i \cap H_{P_i}(\mathbf{u}_j) \right).$$

Nach Satz 2 ist für $j \in \{1, \dots, m\}$ das Volumen der Facette F_j ein homogenes Polynom in $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ mit Grad $n - 1$. Damit ist die Gleichung (8) eine Gleichheit von Polynomen. Wir dürfen also den Koeffizienten von $\lambda_2 \cdots \lambda_n$ vergleichen und erhalten

$$MV(P_1, P_2, \dots, P_n) = \sum_{j=1}^m h_{P_1}(\mathbf{u}_j) MV_{n-1}(P_2 \cap H_{P_2}(\mathbf{u}_j), \dots, P_n \cap H_{P_n}(\mathbf{u}_j)).$$

Da $h_{P_1}(\mathbf{u}) \leq h_{P'_1}(\mathbf{u})$ folgt nun die Behauptung. \square

Der Satz von Bernstein

Nachdem wir uns mit einigen Begriffen der konvexen Geometrie befaßt haben, kommen wir zum Thema dieser Diplomarbeit: dem Satz von Bernstein.

Sei $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ ein n -Tupel von Polynomen aus $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$. Wir werden die Nullstellenmenge $Z(\mathbf{f})$ von \mathbf{f} in $\mathfrak{T}^n := (\mathbb{C}^*)^n$ untersuchen. Da \mathbf{f} als polynomiales Gleichungssystem mit n Gleichungen in n Unbekannten aufgefaßt werden kann, können wir erwarten, daß $Z(\mathbf{f})$ "meistens" endlich ist (dieses "meistens" werden wir später genau definieren).

Um Anzahl $\mathcal{L}(\mathbf{f})$ der Nullstellen von \mathbf{f} in \mathfrak{T}^n zu bestimmen, betrachten wir für $i \in \{1, \dots, n\}$ den Träger $\text{supp } f_i$ von $f_i = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_{i\alpha} \mathbf{X}^\alpha$, das ist

$$\text{supp } f_i = \{\alpha \in \mathbb{N}^n : c_{i\alpha} \neq 0\}.$$

Mit $\mathcal{N}(f_i) := \text{conv}(\text{supp } f_i)$ wird das *Newtonpolytop* bezeichnet (siehe Abbildung 7).

Wir werden zeigen, daß zu einem vorgegebenen n -Tupel von Trägern $\mathbf{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ für fast alle \mathbf{f} mit $\text{supp } f_i \subseteq \text{conv}(A_i)$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ die Anzahl $\mathcal{L}(\mathbf{f})$ der Nullstellen in \mathfrak{T}^n endlich ist und allein durch die Gestalt des n -Tupels $(\text{conv}(A_1), \dots, \text{conv}(A_n))$ bestimmt wird. Diese Zahl $\mathcal{L}(\mathbf{f})$ ist das *Minkowskivolumen* von $\text{conv}(A_1), \dots, \text{conv}(A_n)$.

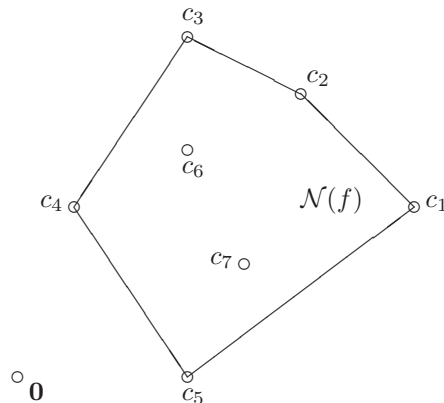


ABBILDUNG 7. Das Newtonpolytop zu $f = c_1 X^7 Y^3 + c_2 X^5 Y^5 + c_3 X^3 Y^6 + c_4 X y^3 + c_5 X^3 + c_6 X^3 Y^4 + c_7 X^4 Y^2$.

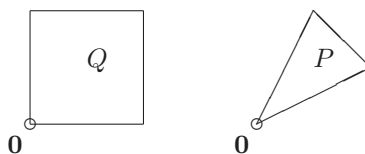


ABBILDUNG 8. Die Newtonpolytope P und Q zu den Polynomen f und g .

SATZ 7 (Satz von Bernstein). Für fast alle¹ $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ mit $\text{supp } f_i \subseteq \text{conv}(A_i)$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ ist die Anzahl der Nullstellen in \mathfrak{T}^n gleich dem Minkowskivolumen von $\text{conv}(A_1), \dots, \text{conv}(A_n)$.

BEISPIEL 2. Sei $f = c_0 + c_1X^2Y + c_2XY^2$ und $g = d_0 + d_1X^2 + d_2Y^2 + d_3X^2Y^2$. Die Newtonpolytope seien P und Q (siehe Abbildung 8). Dann haben f und g in \mathfrak{T}^2 “meistens” genau

$$\text{MV}(P, Q) = V(P + Q) - V(P) - V(Q) = \frac{15}{4} - 1 - \frac{3}{4} = 2$$

Nullstellen (siehe auch Abbildung 4).

LITERATUR. Wir werden den Satz von Bernstein auf zwei verschiedene Arten in den Kapiteln 3 und 4 zeigen. Im Kapitel 3 beschreiten wir den Weg, den auch Bernstein selbst in seinem Artikel [1] wählte. In Kapitel 4 hingegen bemühen wir *torische Varietäten*, um die Aussage zu zeigen, als Basis dienen Rojas’ Artikel [11], das Buch von Gel’fand, Kapranov und Zelevinsky [6] (Kapitel 5 und 6) und Ewalds Buch [5] (Teil 2, Kapitel VI).

Im Kapitel 5 werden wir eine Verallgemeinerung des Satzes von Bernstein vorstellen: eine Schranke für die Anzahl der Nullstellen in \mathbb{C}^n (der sogenannte *affine* Fall).

SATZ 8. Für $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ mit $\text{supp } f_i \subseteq \text{conv}(A_i)$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ ist die Anzahl der isolierten Nullstellen in \mathbb{C}^n kleiner oder gleich dem Minkowskivolumen von $\text{conv}(\{\mathbf{0}\} \cup A_1), \dots, \text{conv}(\{\mathbf{0}\} \cup A_n)$.

Diese Schranke ist nicht immer bestmöglich. Eine Schranke, die für generische Koeffizienten scharf ist, liefert das I -stabile gemischte Volumen $\text{SM}_I(A_1, \dots, A_n)$, auf das wir im Abschnitt 3 von Kapitel 5 eingehen werden. Dieses Kapitel abschließend gehen wir kurz auf die Frage ein, wofür der Satz von Bernstein wichtig ist.

BEMERKUNG 2. Bei Polytopen wird ab sofort immer die *innere* Normale verwendet. Infolgedessen müssen wir die Stützfunktion aus Gleichung (1) in Kapitel 1 abändern zu

$$h_P(\mathbf{u}) = \min \{ \lambda \in \mathbb{R} : H_\lambda(\mathbf{u}) \cap P \neq \emptyset \}.$$

Andernfalls wären einige Minuszeichen notwendig.

¹Was mit diesem “fast alle” gemeint ist, werden wir im folgenden Kapitel 3 genau klären.

Weil die Multiplikation eines Polynoms von f mit \mathbf{X}^α für $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ die Nullstellen von f in \mathfrak{T}^n nicht verändert, werden wir nicht nur Polynome (mit Exponenten in \mathbb{N}^n), sondern allgemeiner *Laurentpolynome* zulassen, das heißt, $f \in \mathbb{C}[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_n, X_n^{-1}] =: \mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_n \rangle = \mathbb{C}\langle \mathbf{X} \rangle$. Allerdings werden wir uns oft auf den Fall von Polynomen zurückziehen.

Eine wichtige Rolle wird im folgenden die *Initialform* $f_{\mathbf{r}}$ in Richtung $\mathbf{r} \in \mathbb{Q}^n$ zu einem (Laurent)polynom

$$f = \sum_{\alpha \in \text{supp}(f)} c_\alpha X^\alpha \in \mathbb{C}\langle \mathbf{X} \rangle$$

spielen. Sei $A := \text{supp}(f)$ und $F_{\mathbf{r}}$ die Seite des Newtonpolytops $\text{conv}(A)$ von f mit innerer Normalen \mathbf{r} . Dann ist die Initialform von f definiert durch

$$f_{\mathbf{r}} = \sum_{\alpha \in F_{\mathbf{r}}} c_\alpha X^\alpha = \sum_{\substack{\alpha \in A \\ \langle \alpha, \mathbf{r} \rangle \text{ minimal}}} c_\alpha X^\alpha.$$

BEISPIEL 3. Sei f aus Abbildung 7. Dann ist für $\mathbf{r} = (1, 0)$

$$f_{\mathbf{r}} = c_4 XY^3$$

und für $\mathbf{r} = (-1, -1)$

$$f_{\mathbf{r}} = c_1 X^7 Y^3 + c_2 X^5 Y^5$$

(siehe auch Abbildung 2).

Beweis nach Bernstein

1. Vorbemerkungen

Sei $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ ein n -Tupel von Laurentpolynomen. Sei $\text{supp } f_i \subseteq A_i$ mit $A_i \subset \mathbb{Z}^n$ endlich, das heißt, $f_i \in \mathbb{C}^{A_i}$. Somit kann \mathbf{f} als ein Punkt im Raum $\mathbb{C}^{\mathbf{A}} := \prod_{i=1}^n \mathbb{C}^{A_i}$ mit $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_n)$ aufgefaßt werden. Wenn wir die Koeffizienten der f_i als unbestimmt ansehen (und damit \mathbf{f} in $\mathbb{C}^{\mathbf{A}}$ variieren). Wir können beobachten, daß die Anzahl der Nullstellen von \mathbf{f} *fast immer* endlich und unabhängig davon ist, welchen konkreten Punkt wir in $\mathbb{C}^{\mathbf{A}}$ wählen. Es gibt allerdings *schlechte* Punkte in $\mathbb{C}^{\mathbf{A}}$, auf die das nicht zutrifft. Wir wollen nun ein Kriterium vorstellen, daß uns mathematisch präzise angibt, wann wir mit endlich vielen Nullstellen, deren Anzahl sogar unabhängig von der Wahl der Koeffizienten ist, rechnen können.

BEMERKUNG 3. Für $i \in \{1, \dots, n\}$ können wir durch Multiplikation mit einem geeigneten \mathbf{X}^{q_i} erreichen, daß $\mathbf{X}^{q_i} \cdot f_i$ ein Polynom in $\mathbb{C}[\mathbf{X}]$ ist. Dadurch verändert sich die Nullstellen von \mathbf{f} in \mathfrak{T}^n nicht. Deshalb werden wir uns im folgenden oft darauf beschränken, nur Aussagen über n -Tupel von *Polynomen* zu machen. Für die Träger $A_i = \text{supp } f_i$ heißt das, daß wir uns auf $A_i \subset \mathbb{N}^n$ beschränken.

Wir sagen, eine Aussage \mathfrak{A} gilt *generisch* für n -Tupel von Polynomen \mathbf{f} aus $\mathbb{C}^{\mathbf{A}}$, wenn es eine Hyperfläche in $\mathbb{C}^{\mathbf{A}}$ gibt, sodaß auf alle \mathbf{f} außerhalb dieser Hyperfläche die Aussage \mathfrak{A} zutrifft.

Die Hyperfläche wird dabei folgendermaßen definiert. Als Vektorraum ist $\mathbb{C}^{\mathbf{A}}$ isomorph zu $\mathbb{C}^{m_1 + \dots + m_n}$ ($\#(A_i) = m_i$). Das Polynom $D_{\mathbf{A}}$ ist dann aus $\mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_m]$ ($m = \sum_{i=1}^n m_i$), und ein n -Tupel von Polynomen \mathbf{f} , aufgefaßt als Punkt in $\mathbb{C}^{\mathbf{A}}$, kann dann in $D_{\mathbf{A}}$ eingesetzt werden. Eine Aussage gilt also generisch, wenn die Aussage für alle \mathbf{f} mit $D_{\mathbf{A}}(\mathbf{f}) \neq 0$ gilt.

BEISPIEL 4. Mithilfe dieser Definition läßt sich sagen, daß das Polynom $f = ax^2 + bx + c$ generisch 2 Nullstellen hat. Denn es gibt ein Polynom aus $\mathbb{C}[a, b, c]$, das sogar *genau* dann ungleich Null ist, wenn zwei Nullstellen vorliegen. Wenn wir die Vielfachheit der Nullstellen berücksichtigen, reicht das Polynom $a \in \mathbb{C}[a, b, c]$, sonst benötigen wir die Diskriminante $a(b^2 - 4ac)$. Wenn wir zusätzlich nur an Lösungen in \mathbb{C}^* interessiert sind, müssen wir ausschließen, daß f einen Faktor x hat. Das ist gleichbedeutend damit, daß $c \neq 0$ sein soll. Abhängig davon, ob wir die Vielfachheiten der Nullstellen berücksichtigen, liefert uns also das Polynom ac respektive $a(b^2 - 4ac)c$ die gewünschte Information.

SATZ 9. *Die Anzahl der Nullstellen eines n -Tupels von Polynomen ist im generischen Fall endlich und unabhängig von der Wahl der Koeffizienten.*

Damit hängt die Anzahl der Nullstellen in \mathfrak{T}^n im generischen Fall nur von der Gestalt der Träger $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_n)$ ab. Wir bezeichnen im folgenden diese Anzahl

mit $\mathcal{L}(\mathbf{A})$. Sprechen wir von der Anzahl der Nullstellen in \mathfrak{T}^n von einem konkreten \mathbf{f} , so schreiben wir dafür $\mathcal{L}(\mathbf{f})$.

BEWEIS. Die Aussage ergibt sich aus folgenden Lemmas. \square

LEMMA 2. *Es gibt ein Polynom $D_{\mathbf{A}} \in \mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_m]$ mit folgender Eigenschaft: Hat ein n -Tupel von Polynomen $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n) \in \mathbb{C}^{\mathbf{A}}$ nicht-isolierte Nullstellen, dann ist $D_{\mathbf{A}}(\mathbf{f}) = 0$.*

BEWEIS. Sei \mathbf{x} eine Nullstelle von \mathbf{f} . Wenn die Jacobimatrix

$$J_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial X_n} \end{pmatrix}$$

an der Stelle \mathbf{x} maximalen Rang hat, dann ist die durch diese Polynome definierte Mannigfaltigkeit glatt und deren Dimension 0. Mit anderen Worten, ist \mathbf{x} eine isolierte und einfache Nullstelle von \mathbf{f} . Umgekehrt gilt somit für einen nicht-isolierten Punkt \mathbf{x} , daß der Rang von $J_{\mathbf{f}}$ nicht maximal sein kann. Da es sich um eine $n \times n$ -Matrix handelt, ist dies gleichbedeutend damit, daß $\det(J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})) = 0$ ist. Also ist eine nicht-isolierte Nullstelle \mathbf{x} eine Nullstelle der $n + 1$ Polynome in n Variablen

$$\begin{aligned} f_0 &:= \det(J_{\mathbf{f}}(\mathbf{X})) \\ &f_1(\mathbf{X}) \\ &\vdots \\ &f_n(\mathbf{X}). \end{aligned}$$

Es gibt ein Kriterium, das uns angibt, ob dieses $n + 1$ -Tupel \mathbf{f}' eine gemeinsame Nullstelle aufweist: die *Resultante*. Sie ist ein ganzzahliges Polynom in den Koeffizienten von \mathbf{f}' . Da die Koeffizienten von $f_0 = \det(J_{\mathbf{f}})$ auch ganzzahlige Polynome in den Koeffizienten von \mathbf{f} sind, erhalten wir sogar, daß die Resultante ein ganzzahliges Polynom in den Koeffizienten von \mathbf{f} ist. Die Resultante ist *genau* dann Null, wenn \mathbf{f}' (mindestens) eine Nullstelle hat. Daß die Resultante existiert und diese Eigenschaften hat, kann in [6], Kapitel 13 nachgelesen werden.

Wir werden im nächsten Abschnitt ein einfacher herzuleitendes Polynom $D_{\mathbf{A}}$ kennenlernen, das dann Null ist, wenn \mathbf{f} nicht-isolierte Nullstellen hat und damit dieses Lemma beweist. Damit ist die Aussagekraft von diesem $D_{\mathbf{A}}$ schwächer als die der Resultante, denn bei der Resultante können wir auch in die umgekehrte Richtung schließen. \square

LEMMA 3. *Die Anzahl der isolierten Punkte einer Varietät ist endlich.*

BEWEIS. Die Nullstellenmenge besteht aus isolierten Punkten, diese sind irreduzible Komponenten. Eine algebraische Menge kann aber nur aus endlich vielen solchen irreduziblen Komponenten bestehen (sonst erhalten wir einen Widerspruch zu noethersch: jede aufsteigende Kette von Idealen wird stationär). \square

LEMMA 4. *In $\mathbb{C}^{\mathbf{A}} \setminus D_{\mathbf{A}}^{-1}(0)$ ist die Anzahl der Nullstellen unabhängig von den Koeffizienten.*

BEWEIS. Die isolierten Nullstellen hängen (bzgl. gewöhnlicher Topologie) stetig von den Koeffizienten ab. Deshalb ist deren Anzahl lokal konstant. Nun ist $\mathbb{C}^{\mathbf{A}} \setminus$

$D_{\mathbf{A}}^{-1}(0)$ wegzusammenhängend, wie wir im folgenden Lemma zeigen werden. Damit ist die Anzahl der Nullstellen auf $\mathbb{C}^{\mathbf{A}} \setminus D_{\mathbf{A}}^{-1}(0)$ global konstant. \square

LEMMA 5. *Es ist $\mathbb{C}^{\mathbf{A}} \setminus D_{\mathbf{A}}^{-1}(0)$ offen, dicht in $\mathbb{C}^{\mathbf{A}}$ und wegzusammenhängend.*

BEWEIS. Die Offenheit und Dichtheit (bzgl. üblicher und Zariski-Topologie) ist klar. Seien $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbb{C}^{\mathbf{A}} \setminus D_{\mathbf{A}}^{-1}(0)$ zwei Punkte, die wir miteinander verbinden wollen. Zunächst sei $\mathfrak{l} = \{t \cdot \mathbf{f} + (1-t) \cdot \mathbf{g} : t \in \mathbb{C}\}$ die komplexe Gerade die \mathbf{f} und \mathbf{g} verbindet. Diese schneidet $D_{\mathbf{A}}^{-1}(0)$ in höchstens endlich vielen Punkten, nämlich: $\{\mathfrak{l}(t) \in \mathbb{C} : D_{\mathbf{A}}(\mathfrak{l}(t)) = 0\}$. Betrachten wir nun diese Situation im Reellen, so haben wir eine Ebene \mathfrak{l} vorliegen, die $D_{\mathbf{A}}$ in nur endlich vielen Punkten schneidet. Wir können auf dieser Ebene eine Kurve wählen, die \mathbf{f} und \mathbf{g} verbindet und die endlich vielen Schnittpunkte mit $D_{\mathbf{A}}^{-1}(0)$ umgeht. \square

1.1. Das Polynom $D_{\mathbf{A}}$. Das Ziel dieses Abschnittes ist es, ein Kriterium anzugeben, wann $n+1$ Polynomen f_0, \dots, f_n in n Unbekannten X_1, \dots, X_n eine gemeinsame Nullstelle haben. Zu einem Polynom $f = \sum c_{\mathbf{q}} \mathbf{x}^{\mathbf{q}} \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ mit $\deg(f) = d$ definieren wir das *homogenisierte* Polynom \bar{f} folgendermaßen

$$\bar{f} := X_0^d \cdot f\left(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\right) \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n].$$

\bar{f} ist dann ein homogenes Polynom vom Grad d .

BEISPIEL 5. Betrachten wir hier das Polynom $f = X^2 + Y^2 - 1 \in \mathbb{C}[X, Y]$. Im Reellen ist die Nullstellenmenge von f ein Kreis. Homogenisieren wir, so erhalten wir $\bar{f} = X^2 + Y^2 - Z^2 \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$, die Gleichung für den Kegel.

Wir untersuchen nun die Nullstellenmenge von \bar{f} in $\mathbb{P}^2 = \{(x : y : z)\}$. Im Bereich $z \neq 0$ erhalten wir die Gleichung

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1,$$

also den ursprünglichen Kreis. Im Bereich $y \neq 0$ (und analog in $x \neq 0$) ergibt sich

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \left(\frac{z}{y}\right)^2 = 1.$$

Das ist die Hyperbel. Führen wir die Koordinatentransformation $u = x + iy$ und $v = x - iy$ durch, so ist

$$uv = z^2.$$

Im Bereich $v = x - iy \neq 0$ erhalten wir nach Division durch v^2

$$\frac{u}{v} = \left(\frac{z}{v}\right)^2$$

die Parabel, den dritten Kegelschnitt.

Nun betrachten wir zu unseren Ausgangspolynomen f_0, \dots, f_n die homogenisierten Polynome $\bar{f}_0, \dots, \bar{f}_n$ mit Graden d_0, \dots, d_n . Wir setzen $\tilde{d} := \sum_{i=0}^n d_i - n$. Dieses \tilde{d} hat folgende Eigenschaft.

BEMERKUNG 4. Monome in \mathbf{X} mit Grad \tilde{d} sind teilbar durch mindestens ein $X_i^{d_i}$.

BEWEIS. Angenommen kein $X_i^{d_i}$ teilt das Monom $\mathbf{X}^{\mathbf{q}}$ mit Grad \tilde{d} . Dann ist $q_i < d_i$ und es gilt, daß $\tilde{d} = \sum_{i=0}^n q_i \leq \sum_{i=0}^n (d_i - 1) = \sum_{i=0}^n d_i - (n + 1) < \tilde{d}$, Widerspruch. \square

Wir unterteilen jetzt die Menge der Monome $\mathbf{X}^{\mathbf{q}}$ mit Grad \tilde{d} in n disjunkte Mengen:

$$\begin{aligned} S_0 &= \{\mathbf{X}^{\mathbf{q}} \text{ mit Grad } \tilde{d} : X_0^{d_0} \text{ teilt } \mathbf{X}^{\mathbf{q}}\} \\ S_1 &= \{\mathbf{X}^{\mathbf{q}} \text{ mit Grad } \tilde{d} : X_1^{d_1} \text{ teilt } \mathbf{X}^{\mathbf{q}}\} \setminus S_0 \\ &\vdots \\ S_n &= \{\mathbf{X}^{\mathbf{q}} \text{ mit Grad } \tilde{d} : X_n^{d_n} \text{ teilt } \mathbf{X}^{\mathbf{q}}\} \setminus S_0 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} S_{n-1}. \end{aligned}$$

Nach Bemerkung 4 ist $\bigcup S_i$ die Menge aller Monome mit Grad \tilde{d} , nach Konstruktion sind diese paarweise disjunkt. Außerdem läßt sich ein $\mathbf{X}^{\mathbf{q}} \in S_i$ schreiben als $\mathbf{X}^{\mathbf{q}} = X_i^{d_i} \cdot \frac{\mathbf{X}^{\mathbf{q}}}{X_i^{d_i}}$, wobei $\frac{\mathbf{X}^{\mathbf{q}}}{X_i^{d_i}}$ ein Monom mit Grad $\tilde{d} - d_i$ ist.

Wir betrachten nun die Gleichungen

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{\mathbf{X}^{\mathbf{q}}}{X_0^{d_0}} \cdot \bar{f}_0 &= 0 \quad \text{für alle } \mathbf{X}^{\mathbf{q}} \in S_0 \\ &\vdots \\ \frac{\mathbf{X}^{\mathbf{q}}}{X_n^{d_n}} \cdot \bar{f}_n &= 0 \quad \text{für alle } \mathbf{X}^{\mathbf{q}} \in S_n \end{aligned}$$

Da für $i \in \{0, \dots, n\}$ das Polynom \bar{f}_i homogen vom Grad d_i ist, folgt, daß jede Gleichung in (9) homogen vom Grad \tilde{d} ist. Also kann jedes Polynom der linken Seite geschrieben werden als Linearkombination der Monome mit Grad \tilde{d} . Außerdem gibt es zu jedem Monom vom Grad \tilde{d} genau eine Gleichung. Also haben wir $N := \binom{\tilde{d} + n}{n}$ lineare Gleichungen in ebenso vielen Unbekannten (den Monomen vom Grad \tilde{d}). Also können wir (9) umschreiben in:

$$M \cdot (\mathbf{X}^{\mathbf{q}}) = 0$$

Hier ist M eine Matrix aus $\mathbb{C}^{N \times N}$ und $(\mathbf{X}^{\mathbf{q}})$ die $N \times 1$ Spalte aller Monome mit Grad \tilde{d} .

SATZ 10. *Die Determinante $D := \det(M)$ ist ein ganzzahliges Polynom in den Koeffizienten der Polynome $\bar{f}_0, \dots, \bar{f}_n$ (und damit auch f_0, \dots, f_n). Falls D ungleich Null ist, so gibt es für das Gleichungssystem $\bar{f}_0 = \dots = \bar{f}_n = 0$ nur die triviale Lösung $\mathbf{0}$.*

BEWEIS. Der erste Teil der Behauptung folgt aus der Tatsache, daß D die Determinante der Matrix M ist, deren Einträge entweder Koeffizienten der Polynome $\bar{f}_0, \dots, \bar{f}_n$ sind oder 0. Der zweite Teil der Behauptung folgt aus Standardeigenschaften der Determinante. \square

LITERATUR. Als Basis diene [4]. Das Standardwerk zur Resultante ist [6], Kapitel 13.

1.2. Eigenschaften von $\mathcal{L}(f)$ und $\mathcal{L}(A)$. Für die Eigenschaften von $\mathcal{L}(f)$ und $\mathcal{L}(A)$ benötigen wir folgende Notation. Sei U eine ganzzahlige orthonormale

Matrix, das heißt $U \in \mathcal{O}(\mathbb{Z}, n)$. Damit können wir folgenden Isomorphismus konstruieren

$$\begin{aligned} U^* : \mathbb{C}\langle \mathbf{X} \rangle &\rightarrow \mathbb{C}\langle \mathbf{X} \rangle \\ \mathbf{X} &\mapsto \mathbf{X}^U := \prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^n X_i^{U_{ij}}. \end{aligned}$$

SATZ 11. Sei σ eine Permutation der Zahlen $\{1, \dots, n\}$ und $U \in \mathcal{O}(\mathbb{Z}, n)$. Dann gilt:

- (1) $\mathcal{L}(f_1, \dots, f_n) = \mathcal{L}(f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(n)})$,
 $\mathcal{L}(A_1, \dots, A_n) = \mathcal{L}(A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(n)})$.
- (2) $\mathcal{L}(f_1 \cdot f'_1, f_2, \dots, f_n) = \mathcal{L}(f_1, \dots, f_n) + \mathcal{L}(f'_1, f_2, \dots, f_n)$,
 $\mathcal{L}(A_1 + A'_1, A_2, \dots, A_n) = \mathcal{L}(A_1, \dots, A_n) + \mathcal{L}(A'_1, A_2, \dots, A_n)$.
- (3) $\mathcal{L}(f_1, \dots, f_n) = \mathcal{L}(U^*(f_1), \dots, U^*(f_n))$,
 $\mathcal{L}(A_1, \dots, A_n) = \mathcal{L}(U(A_1), \dots, U(A_n))$.

BEWEIS. Punkt (1) ist klar. Punkt (2) folgt daraus, daß die Multiplikation von zwei Polynomen $f_1 \cdot f'_1$ eine Addition der Träger $A_1 + A'_1$ bewirkt. Dabei kann es aber passieren, daß für bestimmte Koeffizienten von \mathbf{f} sich einzelne Monome wegheben können. Die Bedingung an die Koeffizienten, damit das nicht geschieht, läßt sich als endliche Vereinigung von Hyperflächen in $\mathbb{C}^{\mathbf{A}}$ darstellen. Da $\mathbb{C}^{\mathbf{A}}$ ohne diese Hyperflächen immer noch dicht in $\mathbb{C}^{\mathbf{A}}$ ist, folgt dieser Teil der Aussage. Für den Punkt (3) bemerken wir, daß U^* die inverse Abbildung $(U^{-1})^*$ besitzt. \square

FOLGERUNG 11.1. \mathcal{L} ist eine symmetrische, multilineare Abbildung, die einem n -Tupel von Polytopen eine ganze Zahl zuordnet. Damit wird sie vollständig durch die Funktionswerte auf der Diagonalen bestimmt (siehe Satz 3).

FOLGERUNG 11.2. \mathcal{L} ist invariant unter Translation der einzelnen Polynome um $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, genauer: $\mathcal{L}(\mathbf{X}^{\alpha_1} \cdot f_1, \dots, \mathbf{X}^{\alpha_n} \cdot f_n) = \mathcal{L}(f_1, \dots, f_n)$.

BEWEIS. Es ist

$$\mathcal{L}(\mathbf{X}^{\alpha_1} \cdot f_1, f_2, \dots, f_n) = \underbrace{\mathcal{L}(\mathbf{X}^{\alpha_1}, f_2, \dots, f_n)}_0 + \mathcal{L}(f_1, \dots, f_n).$$

\square

Die Analogien zu Eigenschaften des Minkowskivolumens (siehe Folgerungen 2.1, 2.2, 4.1 und 4.2) sind nicht zufällig.

2. Eigentlicher Beweis des Satzes

Als erstes werden wir ein Kriterium vorstellen, daß genauer als $D_{\mathbf{A}}$ angibt, wann wir mit endlich vielen Nullstellen rechnen können. Wir nennen ein polynomiales System \mathbf{f} *Bernstein-generisch*, wenn für alle $\mathbf{r} \in \mathbb{Q}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ unser $\mathbf{f}_{\mathbf{r}}$ keine Nullstelle in \mathfrak{T}^n hat.

BEMERKUNG 5. Wir werden in diesem Kapitel viel mit der Initialform $\mathbf{f}_{\mathbf{r}}$ argumentieren. Wir können folgende Vereinfachung machen. Da Drehungen der Polytope die Anzahl der Nullstellen unverändert lassen, können wir versuchen, durch eine Drehung \mathbf{r} in die Gestalt $r_1 \cdot \mathbf{e}_1$ mit $r_1 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ zu bringen. Allerdings funktioniert das mit ganzzahligen Matrizen nicht immer. Wenn wir Drehungen U mit rationalen Einträgen zulassen, werden die Elemente von A_i im Allgemeinen rationale Einträge haben. Durch eine Streckung um einen Faktor $m \in \mathbb{N}$ werden die Einträge der

Transformationsmatrix \tilde{U} ganzzahlig. Damit wird \mathbf{r} zu einem Vielfachen von \mathbf{e}_1 . Aus Satz 11 folgt

$$\mathcal{L}(\tilde{U}^*(f_1), \dots, \tilde{U}^*(f_n)) = m^n \mathcal{L}(\mathbf{f}).$$

LITERATUR. Im folgenden werden wir Puiseux-Reihen verwenden. Mit ihnen lassen sich Kurven darstellen, die die Lösung von n Gleichungen in $n+1$ Variablen sind. Allerdings wird zumeist nur der Fall $n=1$ in Büchern ausführlich behandelt (zum Beispiel Kapitel 1 in dem Buch [3] von Casas-Alvero). Für höhere Dimensionen verweisen wir auf den Artikel [10] von Maurer. Dort wird ein Algorithmus zur Berechnung der Puiseux-Reihen besprochen, der eine bemerkenswerte Ähnlichkeit zum Satz 13 unten hat.

SATZ 12. Wenn \mathbf{f} Bernstein-generisch ist, dann sind

- (a) alle Nullstellen von \mathbf{f} isoliert, und
- (b) $\mathcal{L}(\mathbf{f}) = \mathcal{L}(\mathbf{A})$.

BEWEIS. Wir werden beide Aussagen mittels indirektem Beweis zeigen.

- (a) Annahme: \mathbf{f} hat nicht-isolierte Nullstellen.

Zeige: Es gibt $\mathbf{r} \in \mathbb{Q}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, sodaß $\mathbf{f}_{\mathbf{r}}$ eine Nullstelle hat.

Wir können auf der Nullstellenmenge von \mathbf{f} eine glatte, nicht-konstante Kurve $\gamma(t)$ wählen, die sich als Puiseux-Reihe darstellen läßt. Diese hat dann die Gestalt

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) = (a_1 t^{r_1} + o(t^{r_1}), \dots, a_n t^{r_n} + o(t^{r_n}))$$

mit $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathfrak{T}^n$ und $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{Q}^n$. Falls $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ ist führen wir eine Transformation des Parameters $t \mapsto \gamma_1(t)$ durch. Damit wird r_1 zu 1 und $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$.

Für $i \in \{1, \dots, n\}$ können wir nun $\gamma(t)$ in f_i einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= f_i(\gamma(t)) \\ &= \sum_{\alpha \in A_i} c_{\alpha}(\gamma(t))^{\alpha} \\ &= \left(\sum_{\alpha \in A_{i,r}} c_{\alpha} \mathbf{a}^{\alpha} \right) t^{\langle \mathbf{r}, \alpha \rangle} + \text{höhere Terme} \\ &= f_{i,r}(\mathbf{a}) t^{\langle \mathbf{r}, \alpha \rangle} + \text{höhere Terme.} \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt, daß $f_{i,r}(\mathbf{a}) = 0$ ist. Also ist \mathbf{a} eine Nullstelle von $\mathbf{f}_{\mathbf{r}}$.

- (b) Annahme: $\mathcal{L}(\mathbf{f}) \neq \mathcal{L}(\mathbf{A})$.

Zeige: Es gibt $\mathbf{r} \in \mathbb{Q}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, sodaß $\mathbf{f}_{\mathbf{r}}$ eine Nullstelle hat.

Sei $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n)$ ein generisches Gleichungssystem aus $\mathbb{C}^{\mathbf{A}}$, das heißt, $\mathcal{L}(\mathbf{g}) = \mathcal{L}(\mathbf{A})$. Dann betrachten wir folgende Gerade in $\mathbb{C}^{\mathbf{A}}$

$$t \mapsto \mathbf{f}^t : f_i^t := f_i + t \cdot g_i \quad \text{für } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Wie wir schon im Beweis von Lemma 5 gesehen haben, schneidet diese Gerade die Hyperfläche $D_{\mathbf{A}}^{-1}(0)$ in höchstens endlich vielen Punkten $\{0, t_1, \dots, t_r\}$. Für $t \notin \{0, t_1, \dots, t_r\}$ ist somit $\mathcal{L}(\mathbf{f}^t) = \mathcal{L}(\mathbf{A})$, das heißt, die Nullstellenmenge von $t \mapsto \mathbf{f}^t$ besteht hier aus $\mathcal{L}(\mathbf{A})$ Zweigen. Diese können wir als Puiseux-Reihen darstellen: $\gamma_l(t) = \mathbf{a}_l t^{r_l} (1 + o(1))$ mit $l \in \{1, \dots, \mathcal{L}(\mathbf{A})\}$ und $\mathbf{a}_l \in \mathfrak{T}^n$. Nun können wir für jedes l folgende Fälle unterscheiden.

- Für alle l ist $\mathbf{r}_l = \mathbf{0}$. Dann haben die Puiseux-Reihen die Form $\gamma_l(t) = \mathbf{a}_l (1 + o(1))$. Da diese die Nullstellen von \mathbf{f}^t angeben, erhalten wir durch

Einsetzen von $t = 0$, daß \mathbf{f} genau $\mathcal{L}(\mathbf{A})$ Nullstellen $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{\mathcal{L}(\mathbf{A})}\}$ hat. Widerspruch zur Annahme.

- Es gibt ein l mit $\mathbf{r}_l \neq \mathbf{0}$. Mit derselben Methode wie in Teil (a) können wir zeigen, daß $\mathbf{f}_{\mathbf{r}_l}$ die Nullstelle \mathbf{a}_l hat.

□

SATZ 13. *Wenn \mathbf{f} nicht Bernstein-generisch ist, dann ist die Anzahl der isolierten Nullstellen von \mathbf{f} echt kleiner als $\mathcal{L}(\mathbf{A})$, falls $\mathcal{L}(\mathbf{A}) > 0$, und Null sonst.*

BEWEIS. Wir unterscheiden zwei Fälle.

(a) $\mathcal{L}(\mathbf{A}) > 0$.

Da \mathbf{f} nicht Bernstein-generisch ist, gibt es ein \mathbf{r} , sodaß \mathbf{a} eine Nullstelle von $\mathbf{f}_{\mathbf{r}}$ ist. Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Wir können nun nach Bemerkung 5 annehmen, daß $\mathbf{r} = (r_1, 0, \dots, 0)$ mit $r_1 > 0$ ist und nach eventueller Verschiebung, daß $h_{A_i}(\mathbf{r}) = 0$ ist.

Es ist somit f_{ir} ein Polynom in den Unbekannten X_2, \dots, X_n und $f_i = f_{ir} + X_1 \tilde{f}_i$ für ein Polynom \tilde{f}_i . Wir setzen $\mathbf{a}' := (0, a_2, \dots, a_n)$. Dann ist

$$f_i(\mathbf{a}') = f_{ir}(\mathbf{a}') + 0 \cdot \tilde{f}_i(\mathbf{a}') = f_{ir}(\mathbf{a}') = 0.$$

Wir wählen ein generisches n -Tupel $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n)$ von Polynomen mit folgenden Eigenschaften:

- Es gibt eine Nullstelle \mathbf{b} von \mathbf{g} , die keine Nullstelle von \mathbf{f} ist.
- \mathbf{a} ist keine Nullstelle von \mathbf{g} .
- Es gibt ein $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $g_i(\mathbf{a}') \neq 0 \neq f_i(\mathbf{b})$.

Sei nun \mathfrak{l} die Gerade die \mathbf{a}' und \mathbf{b} verbindet, das heißt, $\mathfrak{l}(t) = t\mathbf{a}' + (t-1)\mathbf{b}$. Wir konstruieren eine Kurve in \mathbb{C}^A

$$t \longmapsto \mathbf{f}^t : f_i^t := f_i g_i(\mathfrak{l}(t)) - g_i f_i(\mathfrak{l}(t)) \quad \text{für } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Für $t = 1$ entspricht \mathbf{f}^t im wesentlichen \mathbf{g} , also schneidet $t \mapsto \mathbf{f}^t$ die Hyperfläche $D_{\mathbf{A}}^{-1}(0)$ in höchstens endlich vielen Punkten. Für alle anderen Werte von t haben wir $\mathcal{L}(\mathbf{A})$ Nullstellen.

Lassen wir nun $t \rightarrow 0$ gehen, so geht auch $\mathbf{f}^t \rightarrow \mathbf{f}$. Somit sind die isolierten Nullstellen von \mathbf{f} Limites von isolierten Nullstellen von \mathbf{f}^t . Umgekehrt betrachten wir die Nullstelle $\mathfrak{l}(t)$ von \mathbf{f}^t . Diese wandert für $t \rightarrow 0$ gegen \mathbf{a}' , verläßt also den Torus \mathfrak{T}^n . Damit haben wir für \mathbf{f} mindestens eine isolierte Nullstelle weniger als für \mathbf{f}^t für fast alle Werte von t .

(b) $\mathcal{L}(\mathbf{A}) = 0$.

Wir nehmen an, \mathbf{f} habe eine isolierte Nullstelle $\mathbf{x} \in \mathfrak{T}^n$. Dann hängt diese stetig (bzgl. der gewöhnlichen Topologie) von den Koeffizienten ab. Da sich aber in jeder Umgebung von \mathbf{f} in \mathbb{C}^A Elemente aus $\mathbb{C}^A \setminus D_{\mathbf{A}}^{-1}(0)$ befinden, die keine Nullstelle in \mathfrak{T}^n haben, ergibt sich ein Widerspruch. □

BEMERKUNG 6. Mit den beiden Sätzen 12 und 13 ist ein Bernstein-generisches \mathbf{f} auch in $\mathbb{C}^A \setminus D_{\mathbf{A}}^{-1}(0)$. Außerdem reicht es aus, daß wir für ein *einziges* Bernstein-generisches \mathbf{f} zeigen, daß $\mathcal{L}(\mathbf{f}) = \text{MV}(A_1, \dots, A_n)$. Aufgrund der beiden Sätze gilt dann der Satz von Bernstein für alle Bernstein-generischen \mathbf{f} . Wir werden diese Beobachtung insofern nützen, daß wir uns im Beweis auf \mathbf{f} mit speziellen Eigenschaften beschränken.

SATZ 14 (Satz von Bernstein). $\mathcal{L}(\mathbf{A}) = \text{MV}(A_1, \dots, A_n)$.

BEWEIS. Wir beweisen den Satz mittels Induktion über die Anzahl n der Laurentpolynome in $\mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_n \rangle$. Nach eventueller Multiplikation mit Monomen können wir oBdA. annehmen, daß es sich um Polynome aus $\mathbb{C}[\mathbf{X}]$ handelt.

Aufgrund der Polarisierungsformel aus Satz 3 genügt es, daß wir den Spezialfall $A = A_1 = \dots = A_n$ zu betrachten, das heißt, $\mathcal{L}(\mathbf{A}) = \mathcal{V}(A)$ (dieser Spezialfall trägt auch den Namen *Satz von Kushnirenko*). Wegen der vorangegangenen Bemerkung dürfen wir außerdem annehmen, daß \mathbf{f} nur einfache Nullstellen hat.

Zuerst eine kleine Übersicht, wie wir vorgehen werden.

Im Schritt (a) zeigen wir den Induktionsstart $n = 1$.

Ab dem Schritt (b) wenden wir uns dem Induktionsschritt zu. Wir modifizieren \mathbf{f} zu einer Kurve $t \mapsto \mathbf{f}^t$ in \mathbb{C}^A , deren Nullstellenmenge wir durch Puiseux-Reihen darstellen. Deren Anzahl ist für fast alle $t \in \mathbb{C}$ gerade $\mathcal{L}(\mathbf{A})$.

Im Schritt (c) werden wir sehen, daß die Anfangsterme der Puiseux-Reihen sich durch die Nullstellen von $\mathbf{f}'_{\mathbf{u}} = (f'_{2\mathbf{u}}, \dots, f'_{n\mathbf{u}})$ für $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\mathbf{u}\| = 1$ bestimmen lassen. Es wird sich herausstellen, daß

$$\mathcal{L}(\mathbf{A}) = \sum_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{u}\|=1} h_A(\mathbf{u}) \mathcal{L}(\mathbf{A}_{\mathbf{u}}).$$

Mit Satz 1 und der Induktionsvoraussetzung folgt dann der Satz.

Im letzten Schritt werden wir noch zeigen, daß die Anfangsterme die auftretenden Puiseux-Reihen eindeutig bestimmen.

(a) Der Induktionsstart $n = 1$.

Wir haben ein Polynom $f = \sum_{i \in A} c_i x^i$ mit $A = \{k_1, \dots, k_l\} \subset \mathbb{Z}$, wobei $k_i < k_{i+1}$ für $i \in \{1, \dots, l\}$. Bernstein-generisch bedeutet hier, daß $f_{(-1)}(x) = c_{k_1} x^{k_1} \neq 0 \neq f_{(1)}(x) = c_{k_l} x^{k_l}$ für $x \in \mathbb{C}^*$. Das ist gleichbedeutend mit $c_{k_1} \neq 0 \neq c_{k_l}$. Damit gilt die Aussage für $n = 1$, denn $MV(A) = \mathcal{V}(A) = k_1 - k_l$ ist die Anzahl der Nullstellen von f in \mathfrak{T} .

(b) Der Induktionsschritt $n - 1 \mapsto n$.

Wir betrachten nun wieder eine Kurve in \mathbb{C}^A

$$t \mapsto \mathbf{f}^t : \begin{aligned} f_1^t &:= f_1 + t^{-1} \mathbf{X}^\beta & \text{mit } \beta \in \text{conv}(A) \cap \mathbb{Z}^n, \\ f_i^t &:= f_i & \text{für } i \in \{2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Der Schnitt von $t \mapsto \mathbf{f}^t$ mit $D_{\mathbf{A}}^{-1}(0)$ liefert höchstens endlich viele Punkte. Für alle übrigen Werte von t erhalten wir genau $\mathcal{L}(\mathbf{A})$ Nullstellen. Also besteht die Nullstellenmenge von \mathbf{f}^t bis auf endlich viele Ausnahmen aus $\mathcal{L}(\mathbf{A})$ Zweigen, die wir durch Puiseux-Reihen $\gamma_l(t) = \mathbf{a}_l t^{r_l} (1 + o(1))$ mit $l \in \{1, \dots, \mathcal{L}(\mathbf{A})\}$ und $\mathbf{a}_l \in \mathfrak{T}^n$ darstellen können.

Außerdem ist $r_l \neq \mathbf{0}$. Andernfalls hätte γ_l die Gestalt $\mathbf{p}_l + \mathbf{a}_l t^{r_l} (1 + o(1))$ mit $\mathbf{p}_l \in \mathfrak{T}^n$. Setzen wir diese in f_1^t ein, so erhalten wir

$$0 = f_1^t(\gamma_l) = f_1(\mathbf{p}_l + \mathbf{a}_l t^{r_l} (1 + o(1))) + t^{-1} (\mathbf{p}_l + \mathbf{a}_l t^{r_l} (1 + o(1)))^\beta.$$

Wir formen diese Gleichung um zu

$$f_1(\mathbf{p}_l + \mathbf{a}_l t^{r_l} (1 + o(1))) = -t^{-1} (\mathbf{p}_l + \mathbf{a}_l t^{r_l} (1 + o(1)))^\beta.$$

Auf der rechten Seite steht ein Term der Gestalt $-t^{-1} \mathbf{p}^\beta$, der keine Entsprechung auf der linken Seite hat (da f_1 ein Polynom ist). Also muß für ein $i \in \{1, \dots, n\}$ $p_i = 0$ gelten, was im Widerspruch zu $\mathbf{p} \in \mathfrak{T}^n$ steht.

(c) Der Zusammenhang zwischen Puiseux-Reihe und $\mathbf{f}'_{\mathbf{u}}$.

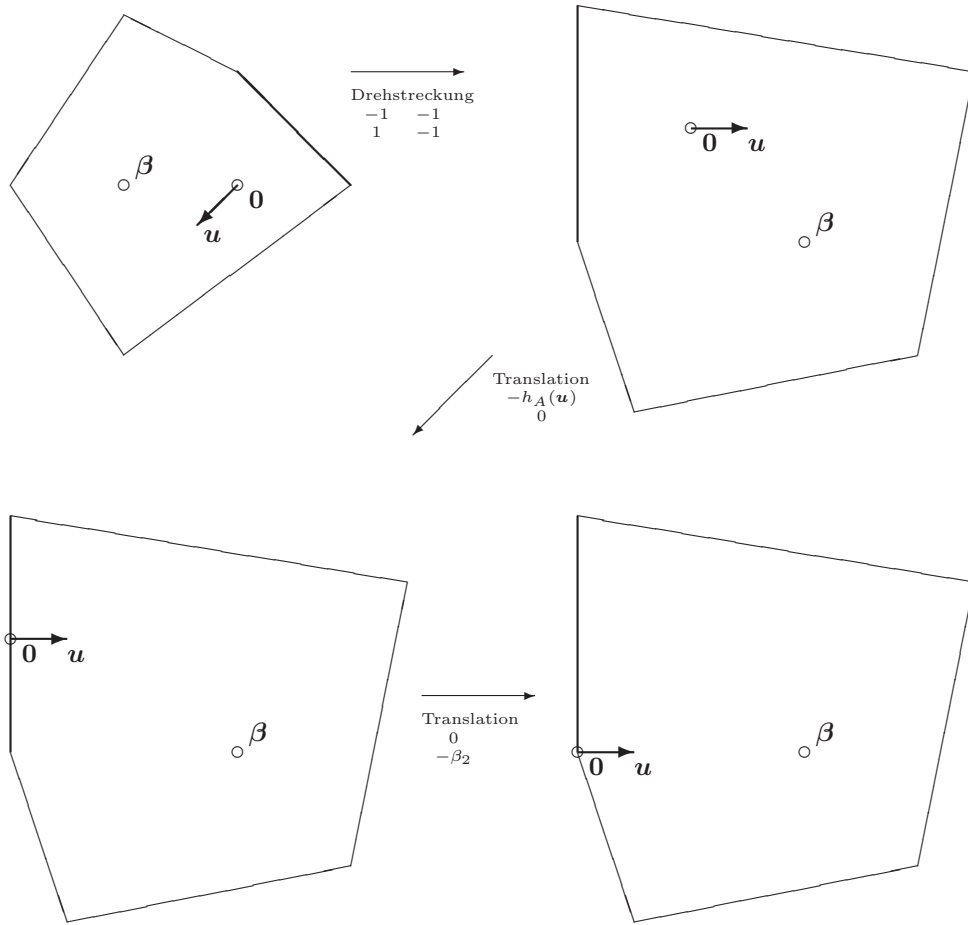


ABBILDUNG 9. Transformation eines Polytops in "Standardgestalt".

Zu jeder Richtung $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\mathbf{u}\| = 1$ werden wir die Anzahl der Puiseux-Reihen $\gamma(t) = \mathbf{a}t^{\mathbf{r}}(1 + o(1))$ bestimmen, für die $\mathbf{r} \in \mathbb{Q}_{>0} \cdot \mathbf{u}$ ist. Es reicht hier aus, nur ein \mathbf{u} pro Normalenkegel zu jeder echten Seite von A zu betrachten.

Nach Bemerkung 5 können wir annehmen, daß $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1$. Auch können wir A so verschieben, daß $h_A(\mathbf{u}) = 0$ gilt und zusätzlich $\beta = (h_A(\mathbf{u}), 0, \dots, 0)$ ist (siehe Abbildung 9).

Sei also $\gamma(t) = \mathbf{a}t^{\mathbf{r}}(1 + o(1))$ mit $\mathbf{r} = (r_1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}_{>0} \cdot \mathbf{u}$. Nun ist $\mathbf{f}_{\mathbf{u}}$ ein polynomiales System in den $n-1$ Variablen X_2, \dots, X_n . Somit ist $\mathbf{a}' = (a_2, \dots, a_n)$ eine Nullstelle von $\mathbf{f}'_{\mathbf{u}} = (f'_{2\mathbf{u}}, \dots, f'_{n\mathbf{u}})$ (selbes Argument wie im Beweis zu Satz 13). Damit ist $f_{1\mathbf{u}}(\mathbf{a}') \neq 0$ (sonst Widerspruch zur Voraussetzung, daß \mathbf{f} Bernstein-generisch, siehe Satz 13).

Nach Bemerkung 6 können wir annehmen, daß alle Nullstellen \mathbf{a}' einfache Nullstellen von $\mathbf{f}'_{\mathbf{u}}$ sind. Deren Anzahl ist $\mathcal{L}(\mathbf{A}_{\mathbf{u}})$. Nach Induktionsvoraussetzung entspricht diese $MV_{n-1}(A_{\mathbf{u}}, \dots, A_{\mathbf{u}}) = \mathcal{V}_{n-1}(A_{\mathbf{u}})$.

Wir setzen nun $\gamma(t) = \mathbf{a}t^{\mathbf{r}}(1 + o(1))$ in f_1^t ein. Wir erhalten

$$0 = f_1^t(\gamma(t)) = t^{-1+h_A(\mathbf{u})r_1} a_1^{h_A(\mathbf{u})} + f_{1\mathbf{u}}(\mathbf{a}') + o(1).$$

Da $f_{1\mathbf{u}}(\mathbf{a}') \neq 0$ ist, muß sich diese Konstante mit $t^{-1+h_A(\mathbf{u})r_1} a_1^{h_A(\mathbf{u})}$ wegheben. Es muß $-1 + h_A(\mathbf{u})r_1 = 0$, also $r_1 = \frac{1}{h_A(\mathbf{u})}$ gelten, und damit $a_1^{h_A(\mathbf{u})} + f_{1\mathbf{u}}(\mathbf{a}') = 0$ sein. Damit gibt es für \mathbf{r} nur eine Möglichkeit, nämlich $\mathbf{r} = \left(\frac{1}{h_A(\mathbf{u})}, \dots, 0\right)$ und für a_1 (also auch für \mathbf{a}) genau $h_A(\mathbf{u})$ Möglichkeiten. Wir haben also für die Puiseux-Reihen genau $h_A(\mathbf{u})\mathcal{L}(\mathbf{A}_{\mathbf{u}}) = h_A(\mathbf{u})\mathcal{V}_{n-1}(A_{\mathbf{u}})$ mögliche Anfangsterme. Summieren wir nun über alle Richtungen \mathbf{u} mit Länge $\|\mathbf{u}\| = 1$ so erhalten wir die Anzahl aller Nullstellen von \mathbf{f} . Mit Satz 1 ergibt sich

$$\mathcal{L}(\mathbf{A}) = \sum_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \\ \|\mathbf{u}\|=1}} h_A(\mathbf{u}) \mathcal{V}_{n-1}(A_{\mathbf{u}}) = \mathcal{V}(A).$$

(d) Jeder Anfangsterm entspricht genau einer Puiseux-Reihe.

Wir ändern dazu die Puiseux-Reihe etwas ab (eine Art Variablentransformation), und zwar gehen wir zu $\boldsymbol{\eta}(t)$ über mit $\eta_1(t) = \gamma_1(t)t^{-r_1}$ und $\eta_i(t) = \gamma_i(t)$ für $i \in \{2, \dots, n\}$. Damit ist

$$\begin{aligned} f_1^t(\boldsymbol{\gamma}(t)) &= \left(f_1 + t^{-1}X^{h_A(\mathbf{u})}\right)(\boldsymbol{\gamma}(t)) \\ &= f_1(\boldsymbol{\gamma}(t)) + t^{-1}\gamma_1(t)^{h_A(\mathbf{u})} \\ &= f_1(\boldsymbol{\gamma}(t)) + t^{-1+r_1 h_A(\mathbf{u})}\eta_1(t)^{h_A(\mathbf{u})} \\ &= f_1(\boldsymbol{\gamma}(t)) + \eta_1(t)^{h_A(\mathbf{u})}. \end{aligned}$$

Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Wir zerlegen $f_i = f_{i\mathbf{u}} + g_i$, wobei $f_{i\mathbf{u}}$ ein Polynom in X_2, \dots, X_n und g_i von X_1 geteilt wird. Damit ist

$$\begin{aligned} f_i(\boldsymbol{\gamma}(t)) &= f_{i\mathbf{u}}(\boldsymbol{\gamma}(t)) + g_i(\boldsymbol{\gamma}(t)) \\ &= f_{i\mathbf{u}}(\gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)) + g_i(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \\ &= f_{i\mathbf{u}}(\eta_2(t), \dots, \eta_n(t)) + g_i(t^{r_1}\eta_1(t), \eta_2(t), \dots, \eta_n(t)) \\ &= f_{i\mathbf{u}}(\boldsymbol{\eta}'(t)) + \tilde{g}_i(\boldsymbol{\eta}(t)), \end{aligned}$$

wobei $\boldsymbol{\eta}'(t) = (\eta_2(t), \dots, \eta_n(t))$. Da g_i von X_1 geteilt wird, ist $\tilde{g}_i(\boldsymbol{\eta}(t))$ mindestens $o(1)$. Wir erhalten insgesamt

$$\mathbf{g}^t(\boldsymbol{\eta}(t)) = \mathbf{f}^t(\boldsymbol{\gamma}(t)) : \quad g_1^t(\boldsymbol{\eta}(t)) := \eta_1^{h_A(\mathbf{u})}(t) + f_{1\mathbf{u}}(\boldsymbol{\eta}'(t)) + \tilde{g}_1^t(\boldsymbol{\eta}(t)), \\ g_i^t(\boldsymbol{\eta}(t)) := f_{i\mathbf{u}}(\boldsymbol{\eta}'(t)) + \tilde{g}_i^t(\boldsymbol{\eta}(t)) \quad \text{für } i \in \{2, \dots, n\}.$$

Wir betrachten den Fall $t = 0$. Dann wird $\tilde{g}_i^t(\boldsymbol{\eta}(t))$ zu Null. Deshalb hat \mathbf{g}^t aufgefaßt als n -Tupel von Polynomen in $\boldsymbol{\eta}(0)$ genau $h_A(\mathbf{u})\mathcal{V}(A_{\mathbf{u}})$ einfache Nullstellen der Form (a_1, \mathbf{a}') . Das Implizite Funktionen Theorem besagt, daß wir diese Nullstellen in einer Umgebung von $t = 0$ als Funktionen von t darstellen können, das sind gerade unsere Puiseux-Reihen. \square

Beweis mit torischen Varietäten

1. Vorbemerkungen

Der torische Ansatz zum Beweis des Satzes von Bernstein bedient sich folgender Ideen.

Sei $f = \sum_{\alpha \in A} c_{\alpha} \mathbf{X}^{\alpha}$ ein Laurentpolynom mit $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subset \mathbb{Z}^n$. Wir werden im folgenden annehmen, daß $\text{conv}(A)$ n -dimensional ist, denn sonst kann f nach eventuellem Koordinatenwechsel als Polynom in weniger als n Unbekannten geschrieben werden. Dazu definieren wir die Menge \mathcal{X}_A als Zariski-Abschluß von

$$\mathcal{X}_A^0 = \{(\mathbf{x}^{\alpha_1} : \dots : \mathbf{x}^{\alpha_m}) : \mathbf{x} \in \mathfrak{T}^n\} \subset \mathbb{P}^{m-1}.$$

Diese Menge \mathcal{X}_A ist eine *torische Varietät*. Zu f betrachten wir

$$\begin{aligned} L : \mathcal{X}_A &\rightarrow \mathbb{C} \\ (y_1 : \dots : y_m) &\mapsto c_{\alpha_1} y_1 + \dots + c_{\alpha_m} y_m. \end{aligned}$$

Für $\mathbf{y} \in \mathcal{X}_A^0$ haben wir die Darstellung $\mathbf{y} = (\mathbf{x}^{\alpha_1} : \dots : \mathbf{x}^{\alpha_m})$ und in \mathcal{X}_A^0 entspricht die Gleichung $L(\mathbf{y}) = 0$ genau $f(\mathbf{x}) = 0$.

Sei $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n) \in \mathbb{C}^A$ mit $\mathbf{A} = (A, \dots, A)$. Zu einer Abbildung $\omega : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ können wir für $\alpha \in A$ das Monom \mathbf{X}^{α} durch $\mathbf{X}^{\alpha} T^{\omega(\alpha)}$ ersetzen, wobei T eine neue Variable ist. Dadurch erhalten wir ein *geliftetes* $\hat{\mathbf{f}}$, das aus n Polynomen in den $n+1$ Variablen \mathbf{X} und T besteht. Setzen wir für $T=1$ in $\hat{\mathbf{f}}$ ein, so erhalten wir $\hat{\mathbf{f}}|_{T=1} = \mathbf{f}$. Wie wir uns schon früher überlegt haben, ist für fast alle Werte $t \in \mathbb{C}$ die Anzahl der Nullstellen von \mathbf{f} gleich der von $\hat{\mathbf{f}}|_{T=t}$. Im Beweis des Satzes von Bernstein werden wir den Fall $T=0$ untersuchen.

1.1. Eigenschaften von \mathcal{X}_A . Sei $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subset \mathbb{Z}^n$. Wir definieren die *allgemeine Veronese-Einbettung* bezüglich A als

$$\begin{aligned} \phi_A : \mathfrak{T}^n &\rightarrow \mathbb{P}^{m-1} \\ \mathbf{x} &\mapsto (\mathbf{x}^{\alpha_1} : \dots : \mathbf{x}^{\alpha_m}). \end{aligned}$$

Damit ist $\mathcal{X}_A = \overline{\text{Bi } \phi_A}$ und \mathcal{X}_A kann als Kompaktifizierung des in \mathbb{P}^{m-1} eingebetteten \mathfrak{T}^n betrachtet werden. Wir werden im folgenden die Frage beantworten, welche Punkte durch diese Kompaktifizierung hinzukommt.

BEMERKUNG 7. Der Name “allgemeine Veronese-Einbettung” suggeriert, daß ϕ_A injektiv ist. Im Allgemeinen ist das aber nicht der Fall, sondern die Anzahl der Urbilder ist für jedes Bildelement von ϕ_A konstant und hängt nur von A ab. Das werden wir im folgenden zeigen.

BEMERKUNG 8. Eine andere Betrachtungsweise ergibt sich dadurch, daß \mathfrak{T}^n mit der komponentenweisen Multiplikation eine Gruppe bildet. Wir erhalten sogar

eine Operation auf \mathbb{P}^{m-1} vermöge

$$\begin{aligned} \bullet_A = \bullet : \mathfrak{T}^n \times \mathbb{P}^{m-1} &\rightarrow \mathbb{P}^{m-1} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\mapsto \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = (\mathbf{x}^{\alpha_1} \cdot y_1 : \cdots : \mathbf{x}^{\alpha_m} \cdot y_m). \end{aligned}$$

Hier ist $\mathcal{X}_A = \overline{\mathfrak{T}^n \bullet (1 : \cdots : 1)}$. \mathfrak{T}^n heißt (algebraischer) *Torus*, der vermöge \bullet_A auf \mathbb{P}^{m-1} operiert.

Allgemein wird eine *torische Varietät* folgendermaßen definiert. Der n -dimensionale Torus operiere auf \mathbb{P}^m vermöge “ \cdot ”. Dann heißt $\mathfrak{T}^n \cdot \mathbf{x}$ für $\mathbf{x} \in \mathbb{P}^m$ *torische Varietät*.

Wir wollen nun \mathcal{X}_A durch Gleichungen beschreiben (als Zariski-abgeschlossene Menge muß \mathcal{X}_A durch Gleichungen beschreibbar sein). Dazu bemerken wir zuerst, daß \mathfrak{T}^n eine abelsche Gruppe ist. Die Gruppenoperation ist hier die komponentenweise Multiplikation mit dem neutralen Element $(1, \dots, 1)$ und die Skalarmultiplikation $k \cdot \mathbf{x} = (x_1^k, \dots, x_n^k)$.

Für Punkte $\mathbf{y} \in \mathcal{X}_A^0$ ist $y_i = \mathbf{x}^{\alpha_i}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. Betten wir $\mathfrak{T}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ vermöge $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, 1)$ ein, so können wir schreiben

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} & 1 \end{pmatrix}}_{=: \bar{E}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da wir angenommen haben, daß $\text{conv}(A)$ n -dimensional ist, wissen wir nun, daß $\alpha_1 - \alpha_m, \dots, \alpha_{m-1} - \alpha_m$ ein Erzeugendensystem des \mathbb{R}^n ist. Wenn wir für $i \in \{1, \dots, m-1\}$ von der i -ten Zeile die m -te Zeile abziehen,

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \alpha_{11} - \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{1n} - \alpha_{mn} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m-1,1} - \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{m-1,n} - \alpha_{mn} & 0 \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} & 1 \end{pmatrix},$$

so erkennen wir, daß \bar{E} vollen Spaltenrang hat, nämlich $n+1$. Wir können \bar{E} in die Hermitesche Normalform überführen. Damit ist $\bar{U} \cdot \bar{E} = \bar{H}$, wobei $\bar{U} \in \text{Gl}(\mathbb{Z}, m)$ und $\bar{H} \in \mathbb{Z}^{m \times (n+1)}$ eine obere Dreiecksmatrix ist,

$$(10) \quad \begin{pmatrix} \bar{U}_{1,-} \\ \vdots \\ \bar{U}_{n+1,-} \\ \hline \bar{U}_{n+2,-} \\ \vdots \\ \bar{U}_{m,-} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{H}_{11} & \cdots & \bar{H}_{1n+1} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{H}_{n+1,n+1} \\ \hline 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sei $i \in \{n+2, \dots, m\}$. Wir erhalten durch die Zeilen $\mathbf{u}_i := \bar{U}_{i,-} \in \mathbb{Z}^m$ folgende Gleichungen

$$y_1^{u_i^1} \cdots y_m^{u_i^m} = x_1^0 \cdots x_n^0 1^0 = 1.$$

Wir können $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i^+ - \mathbf{u}_i^-$ mit $\mathbf{u}_i^\pm \in \mathbb{N}^m$ schreiben. Damit ist

$$\mathcal{X}_A = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{P}^{m-1} : \mathbf{y}^{\mathbf{u}_i^+} - \mathbf{y}^{\mathbf{u}_i^-} = 0 \text{ für } i \in \{n+2, \dots, m\} \right\}.$$

Wir müssen noch untersuchen, ob $\mathbf{y}^{u_i^+} - \mathbf{y}^{u_i^-}$ für $i \in \{n+2, \dots, m\}$ homogen ist. Es ist

$$\mathbf{y} = \bar{E} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei \mathbf{y} und \mathbf{x} Spalten sind. Somit ist für $i \in \{n+2, \dots, m\}$ nach Gleichung (10)

$$\mathbf{u}_i \cdot \bar{E} = (0, \dots, 0) \text{ bzw. } \mathbf{u}_i^+ \cdot \bar{E} = \mathbf{u}_i^- \cdot \bar{E}.$$

Da die $(m+1)$ -te Spalte von \bar{E} aus lauter Einsen besteht, ergibt sich die Homogenität von $\mathbf{y}^{u_i^+} - \mathbf{y}^{u_i^-}$.

Auch ϕ_A können wir mit einer Matrix beschreiben.

$$\begin{aligned} \phi_A : \mathfrak{T}^n &\rightarrow \mathbb{P}^{m-1} \\ \mathbf{x} &\mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}}_{=: E} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wieder können wir E in Hermitesche Normalform überführen, und erhalten $E = U^{-1}H$, mit $U \in \text{Gl}(\mathbb{Z}, m)$ und $H \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ obere Dreiecksmatrix. Wir spalten ϕ_A auf

$$\begin{aligned} \phi_A : \mathfrak{T}^n &\xrightarrow{H \cdot} \mathbb{P}^{m-1} \xrightarrow{U^{-1}} \mathbb{P}^{m-1} \\ \mathbf{x} &\mapsto \begin{pmatrix} x_1^{H_{11}} & \cdots & x_n^{H_{1n}} \\ & \ddots & \vdots \\ & & x_n^{H_{nn}} \\ & & 1 \\ & & \vdots \\ & & 1 \end{pmatrix} \mapsto \phi_A(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Sei $\mathbf{y} = H \cdot \mathbf{x}$. Für $y_n = x_n^{H_{nn}}$ gibt es nun H_{nn} Urbilder, nämlich

$$\left\{ x_n e^{\frac{2\pi k}{H_{nn}}} : k \in \{1, \dots, H_{nn}\} \right\}.$$

Zu jedem dieser Urbilder von y_n ergibt die analoge Überlegung, daß es $H_{n-1, n-1}$ Urbilder zu y_{n-1} gibt. Führen wir das induktiv weiter und benützen wir die Bijektivität der Multiplikation mit U^{-1} , so ergibt sich, daß jedes Bildelement von ϕ_A genau $h := H_{11} \cdots H_{nn}$ Urbilder hat.

BEMERKUNG 9. Diese Überlegungen zeigen, daß es eine Basis $\underline{\mathbf{v}} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ des Gitters \mathbb{Z}^n gibt, sodaß sich die Elemente von A als ganzzahlige Linearkombinationen von $H \cdot \underline{\mathbf{v}}$ schreiben lassen. Nehmen wir nun das Gitter, das von $H \cdot \underline{\mathbf{v}}$ erzeugt wird, so hat jedes Bildelement von ϕ_A genau ein Urbild. Deshalb können wir im folgenden annehmen, daß $h = 1$ ist.

Sei F eine nicht leere Seite von $\text{conv}(A)$. Dann definieren wir die *Bahn* O_F von \mathcal{X}_A bzgl. F als die Teilmenge

$$O_F = \{ \mathbf{y} \in \mathcal{X}_A : \alpha_i \notin F \Leftrightarrow p_i = 0 \}.$$

Ist F zusätzlich eine echte Seite von $\text{conv}(A)$, dann sagen wir, daß $\mathbf{y} \in O_F$ eine Nullstelle im *torischen Unendlichen* ist. Für $i \in \{1, \dots, n\}$ sei $f_i = \sum_{\alpha \in A} c_{i, \alpha} \mathbf{X}^\alpha$,

$A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ und $\mathbf{A} = (A, \dots, A)$. Die Nullstellenmenge von $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^{\mathbf{A}}$ in \mathcal{X}_A definieren wir dann als die Menge

$$\{\mathbf{y} \in \mathcal{X}_A : c_{i, \alpha_1} y_1 + \dots + c_{i, \alpha_m} y_m = 0 \text{ für } i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

SATZ 15. Sei F eine d -dimensionale Seite von $\text{conv}(A)$. Dann ist O_F eine d -dimensionale algebraische Teilmenge des \mathbb{P}^{m-1} . Außerdem ist

$$\mathcal{X}_A = \bigcup_{\substack{F \text{ Seite} \\ \text{von } \text{conv}(A)}} O_F \quad \text{und} \quad \mathcal{X}_A \setminus \phi_A(\mathfrak{T}^n) = \bigcup_{\substack{F \text{ echte Seite} \\ \text{von } \text{conv}(A)}} O_F.$$

BEWEIS. Sei F eine nicht-leere Seite von $\text{conv}(A)$. Dazu definieren wir $\delta_F = (\delta_{F,1} : \dots : \delta_{F,m}) \in \mathbb{P}^{m-1}$ durch

$$\delta_{F,i} = \begin{cases} 1 & \alpha_i \in F \\ 0 & \alpha_i \notin F \end{cases} \quad \text{für } i \in \{1, \dots, m\}.$$

Wie wir schon früher bemerkt haben, ist $\mathcal{X}_A^0 = \mathfrak{T}^n \bullet (1 : \dots : 1) = \mathfrak{T}^n \bullet \delta_{\text{conv}(A)}$. Wir werden im folgenden zeigen, daß allgemeiner

$$O_F = \mathfrak{T}^n \bullet \delta_F \cong \mathcal{X}_{A \cap F}^0.$$

Sei dazu

$$\begin{aligned} \gamma : \{t \in \mathfrak{T} : |t| < \varepsilon\} &\rightarrow \mathfrak{T}^n \\ t &\mapsto (a_1 t^{r_1} + o(t^{r_1}), \dots, a_n t^{r_n} + o(t^{r_n})) \end{aligned}$$

mit $\mathbf{a} \in \mathfrak{T}^n$ und $\mathbf{r} \in \mathbb{Z}^n$. Zu jedem Punkt \mathbf{x} in \mathcal{X}_A gibt es eine analytische Funktion γ , sodaß

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t) \bullet \delta_{\text{conv}(A)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (a_1 t^{r_1} + o(t^{r_1}), \dots, a_n t^{r_n} + o(t^{r_n})) \bullet (1 : \dots : 1) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (\mathbf{a}^{\alpha_1} t^{\langle \alpha_1, \mathbf{r} \rangle} + o(t^{\langle \alpha_1, \mathbf{r} \rangle}) : \dots : \mathbf{a}^{\alpha_m} t^{\langle \alpha_m, \mathbf{r} \rangle} + o(t^{\langle \alpha_m, \mathbf{r} \rangle})). \end{aligned}$$

Sei $F_{\mathbf{r}}$ die Seite von $\text{conv}(A)$ mit innerer Normalen \mathbf{r} . Damit nimmt die Funktion

$$\begin{aligned} \mathbf{r} : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{p} &\mapsto \langle \mathbf{p}, \mathbf{r} \rangle \end{aligned}$$

auf $F_{\mathbf{r}}$ ihr Minimum $h_{\mathbf{r}}$ an. Damit ist

$$x_i = t^{h_{\mathbf{r}}} \cdot \begin{cases} (\mathbf{a}^{\alpha_i} + t \cdot (\dots)) & \text{für } \delta_{F_{\mathbf{r}},i} = 1 \\ t \cdot (\dots) & \text{für } \delta_{F_{\mathbf{r}},i} = 0 \end{cases} \quad \text{für } i \in \{1, \dots, m\}.$$

Da wir uns im \mathbb{P}^{m-1} befinden, spielt der gemeinsame Faktor $t^{h_{\mathbf{r}}}$ keine Rolle und kann weggelassen werden. Für $t \rightarrow 0$ erhalten wir deshalb

$$x_i = \begin{cases} \mathbf{a}^{\alpha_i} & \text{für } \delta_{F_{\mathbf{r}},i} = 1 \\ 0 & \text{für } \delta_{F_{\mathbf{r}},i} = 0 \end{cases} \quad \text{für } i \in \{1, \dots, m\}.$$

Damit ist $\mathbf{x} = \mathbf{a} \bullet \delta_{F_{\mathbf{r}}}$. Also liegt jedes \mathbf{x} in genau einer Bahn $O_{F_{\mathbf{r}}}$ (für $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ ist $O_{\text{conv}(A)} = \mathcal{X}_A^0$). Wir sehen auch, daß jede nicht-leere Seite F von $\text{conv}(A)$ genau der Bahn O_F entspricht.

OBdA. sei $A \cap F = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ für ein $k \in \{1, \dots, m\}$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} O_F &\rightarrow \mathcal{X}_{A \cap F}^0 \subseteq \mathbb{P}^{k-1} \\ \mathbf{x} = (x_1 : \dots : x_k : 0 : \dots : 0) &\mapsto (x_1 : \dots : x_k) \end{aligned}$$

ist klarerweise ein Isomorphismus, also ist $O_F = \mathfrak{T}^n \bullet \delta_F$ (und die Bezeichnung ‘‘Bahn’’ gerechtfertigt).

Aus Gleichung (10) folgt, daß \mathcal{X}_A^0 sich durch $(t_1 : \dots : t_{n+1})$ parametrisieren läßt (und auch, daß soviele Parameter notwendig sind). Damit ist \mathcal{X}_A^0 n -dimensional. Die entsprechende Aussage für O_F ergibt sich aus dem Isomorphismus. \square

FOLGERUNG 15.1. *Sei $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^A$ mit $\mathbf{A} = (A, \dots, A)$ und F eine Seite von A mit innerer Normalen \mathbf{r} . Genau dann hat \mathbf{f} eine Nullstelle in O_F , wenn $\mathbf{f}_{\mathbf{r}}$ eine Nullstelle in \mathfrak{T}^n hat.*

BEWEIS. Nach Definition ist die Nullstellenmenge von \mathbf{f} in O_F

$$\{\mathbf{y} \in O_F : c_{i, \alpha_1} y_1 + \dots + c_{i, \alpha_m} y_m = 0 \text{ für } i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Da y_j für $j \in \{1, \dots, m\}$ genau dann ungleich 0 ist, wenn $\alpha_j \in F$ ist, ist diese Menge gleich

$$\left\{ \mathbf{y} \in O_F : \sum_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \in F}}^m c_{i, \alpha_j} y_j = 0 \text{ für } i \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Aus dem Beweis von Satz 15 folgt nun, daß diese Menge isomorph zur Nullstellenmenge von $\mathbf{f}_{\mathbf{r}}$ in $\mathcal{X}_{A \cap F}^0$ ist (da $y_j \neq 0$ für $j \in \{1, \dots, m\}$ mit $\alpha_j \in F$). Damit lassen sich diese y_j durch \mathbf{x}^{α_j} darstellen und wir erhalten die Nullstellen von $\mathbf{f}_{\mathbf{r}}$ in \mathfrak{T}^n . Die umgekehrte Richtung in diesem letzten Schritt im Beweis ist klar. \square

Wir bezeichnen im folgenden die Nullstellen von \mathbf{f} in \mathcal{X}_A mit Z .

BEMERKUNG 10. Damit können wir sagen, daß \mathbf{f} genau dann Bernstein-generisch ist, wenn die Nullstellen Z von \mathbf{f} in \mathcal{X}_A schon in $\phi_A(\mathfrak{T}^n)$ liegen. Da jedes Bildelement von ϕ_A genau ein Urbild hat (siehe Bemerkung 9), ist

$$\left(\mathcal{L}(\mathbf{f}) = \right) \mathcal{L}(\mathbf{A}) = \#(Z).$$

Außerdem ist \mathcal{X}_A^0 bzgl. der gewöhnlichen Topologie des P^{m-1} tatsächlich der Kern von \mathcal{X}_A .

1.2. Eigenschaften des Liftens. Unter einem *Lift* von $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subset \mathbb{Z}^n$ wollen wir hier eine Abbildung $\omega : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ verstehen. Die *geliftete* Menge ist dann

$$\hat{A} = \{(\alpha, \omega(\alpha)) : \alpha \in A\} \subset \mathbb{Z}^{n+1}.$$

Wir benötigen im folgenden einen Lift mit noch einer weiteren Eigenschaft.

Alle Seiten von $\text{conv}(\hat{A})$, die eine innere Normale der Gestalt $(\mathbf{u}, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ haben, bilden zusammen die sogenannte *untere Hülle* von $\text{conv}(\hat{A})$. Diese steht in Bijektion mit $\text{conv}(A)$ vermöge der Projektion auf die ersten n Komponenten $\text{pr} : \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}^n$ (siehe Abbildung 10).

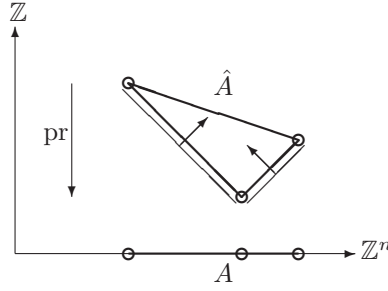
Jede Seite \hat{F} der unteren Hülle von $\text{conv}(\hat{A})$ hat die Gestalt

$$\text{conv}((\alpha_i, \omega(\alpha_i)) : i \in I) \text{ für ein } I \subseteq \{1, \dots, m\}.$$

Die Menge

$$S = \left\{ \text{pr}(\hat{F}) : \hat{F} \text{ Seite der unteren Hülle von } \text{conv}(\hat{A}) \right\} \cup \{\emptyset\}$$

hat folgende Eigenschaften.

ABBILDUNG 10. Beispiel für A und \hat{A} .

- (1) $\bigcup_{C \in S} C = \text{conv}(A)$,
- (2) Für $C_1, C_2 \in S$ ist $C_1 \cap C_2$ eine Seite von C_1 und C_2 ,
- (3) Für $C_1, C_2 \in S$ ist $C_1 \cap C_2 \in S$.

Die Menge S heißt *Unterteilung* von $\text{conv}(A)$ und ihre Elemente *Zellen*. Sind zusätzlich die n -dimensionalen Zellen von der Gestalt $\text{conv}((\alpha_i, \omega(\alpha_i)) : i \in I)$ mit $\#(I) = n + 1$ (Simplizes), so sprechen wir von S als eine *Triangulierung* von $\text{conv}(A)$.

Wir verlangen vom Lift ω von A die zusätzliche Eigenschaft, daß er eine Triangulierung von $\text{conv}(A)$ induziert. Wir nennen dann ω einen Δ -Lift von A .

Ein Δ -Lift ω von A tritt in einem gewissen Sinn sogar generisch auf. Es beinhaltet $(\omega(\alpha_1), \dots, \omega(\alpha_m)) \in \mathbb{Z}^m$ alle notwendige Information, um aus A das geliftete \hat{A} zu erhalten. Das heißt, ω kann als Punkt in \mathbb{Z}^m aufgefaßt werden. Wir werden nun ein Polynom $D \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]$ angeben, sodaß wenn $D(\omega(\alpha_1), \dots, \omega(\alpha_m)) \neq 0$ ist, ω ein Δ -Lift von A .

Für eine Triangulierung von $\text{conv}(A)$ darf jede Seite der unteren Hülle von $\text{conv}(\hat{A})$ aus höchstens $n + 1$ gelifteten Punkten von A bestehen. Wenn wir also von ω verlangen, daß je $n + 2$ Punkte von A nicht auf eine Hyperebene in \mathbb{Z}^{n+1} geliftet werden, so erhalten wir eine Triangulierung von $\text{conv}(A)$.

Für jede $(n + 2)$ -elementige Teilmenge $I \subseteq A$ soll also gelten, daß die Menge

$$\{\beta_i - \beta_{i_0} : i \in I \setminus \{i_0\}\}$$

linear unabhängig ist, wobei i_0 aus I fix gewählt und $\beta_i = (\alpha_i, \omega(\alpha_i))$ für $i \in I$ ist. Das heißt,

$$\det \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_{i_1} - \beta_{i_0} \\ \vdots \\ \beta_{i_{n+1}} - \beta_{i_0} \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{Z}^{(n+1) \times (n+1)}} \neq 0$$

Es gibt insgesamt $\binom{m}{n+1}$ solche Determinanten, deren Produkt D ist das gesuchte ganzzahlige Polynom in den Unbekannten $\omega(\alpha_1), \dots, \omega(\alpha_m)$.

2. Eigentlicher Beweis des Satzes

LEMMA 6. Sei Γ eine glatte, algebraische Kurve in \mathbb{P}^l und $\psi : \Gamma \rightarrow \mathbb{P}^1$ ein Morphismus (das heißt, $\psi(\mathbf{x}) = (\psi_1(\mathbf{x}) : \psi_2(\mathbf{x}))$, wobei ψ_1 und ψ_2 homogene Polynome vom selben Grad sind). Dann ist $\text{Bi } \psi$ endlich oder ganz \mathbb{P}^1 . Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ und eine endliche Menge $K \subset \mathbb{P}^1$ (die kritischen Werte von ψ), sodaß für $\mathbf{y} \in \mathbb{P}^1$ gilt:

$$\#\psi^{-1}(\mathbf{y}) = k \Leftrightarrow \mathbf{y} \in \mathbb{P}^1 \setminus K.$$

BEWEIS. Das Bild einer projektiven Varietät ist unter einem Morphismus bzgl. der Zariski-Topologie abgeschlossen (siehe Shavarevichs Buch [13], Kapitel I, Punkt 5.2). Damit ist $\text{Bi } \psi$ abgeschlossen bzgl. der Zariski-Topologie. Es gibt aber nur 3 Typen von abgeschlossenen Mengen im 1-dimensionalen \mathbb{P}^1 : \emptyset , endliche Mengen oder der ganze Raum.

Aber auch das Urbild von abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen. Da Γ 1-dimensional ist, ist $\#\psi^{-1}(\mathbf{y})$ leer, endlich oder eine Komponente der Kurve Γ . Da Γ nur aus endlich vielen Komponenten besteht, \mathbb{P}^1 auch nach der Entfernung endlich vieler Punkte wegzusammenhängend bleibt und die Zahl der Urbilder von \mathbf{y} lokal konstant ist, folgt die Aussage. \square

LEMMA 7. Sei $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^A$ generisch mit $A = (A, \dots, A)$, wobei $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}\}$ sei. Dann ist $\mathcal{L}(A) = \mathcal{V}(A)$.

BEWEIS. Zunächst betrachten wir den Fall, daß A ein n -dimensionaler Simplex ist. Eine Nullstelle $\mathbf{x} \in \mathfrak{T}^n$ von \mathbf{f} erfüllt die Gleichungen

$$\begin{array}{rcl} c_{11} \cdot \mathbf{x}^{\alpha_1} & + \dots + & c_{1,n+1} \cdot \mathbf{x}^{\alpha_{n+1}} = 0 \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} \cdot \mathbf{x}^{\alpha_1} & + \dots + & c_{n,n+1} \cdot \mathbf{x}^{\alpha_{n+1}} = 0 \end{array}$$

Da wir uns in \mathfrak{T}^n befinden, dürfen wir durch $\mathbf{x}^{\alpha_{n+1}}$ dividieren. Wir schreiben für $\mathbf{x}^{\beta_i} := \frac{\mathbf{x}^{\alpha_i}}{\mathbf{x}^{\alpha_{n+1}}}$ im folgenden y_i (mit $i \in \{1, \dots, n\}$) und erhalten das lineare Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{n,n} \end{pmatrix}}_{=:C} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_{1,n+1} \\ \vdots \\ -c_{n,n+1} \end{pmatrix}.$$

Damit \mathbf{f} generisch ist, muß also $\det(C) \neq 0$ erfüllt sein. Dann gibt es eine eindeutige Lösung $\mathbf{y} \in \mathfrak{T}^n$. Für diese gilt

$$\begin{array}{rcl} x_1^{\beta_{11}} & \dots & x_n^{\beta_{1n}} = y_1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{\beta_{n1}} & \dots & x_n^{\beta_{nn}} = y_n \end{array}$$

Sei $E \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ die Matrix mit $E_{i-} = \beta_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. Dazu berechnen wir die Hermitesche Normalform $U \cdot E = H$ und erhalten

$$\begin{array}{rcl} x_1^{h_{11}} & \dots & x_n^{h_{1n}} = y_1^{u_{11}} \dots y_n^{u_{1n}} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^{h_{nn}} & = & y_1^{u_{n1}} \dots y_n^{u_{nn}} \end{array}$$

Die Matrizen H und E haben vollen Rang, da A einen n -dimensionalen Simplex ist. Damit ist die Anzahl der Lösungen

$$\begin{aligned} h_{11} \cdots h_{nn} &= \det(H) = \det(E) \\ &= V(\operatorname{conv}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\beta}_1) \times \cdots \times \operatorname{conv}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\beta}_1)) \\ &= n!V(\operatorname{conv}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_n)) \\ &= \mathcal{V}(\operatorname{conv}(\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_{n+1})) \\ &= \mathcal{V}(A). \end{aligned}$$

Falls A nicht n -dimensional ist, dann besteht \mathbf{f} nach eventueller Koordinatentransformation aus n Polynomen in weniger als n Unbekannten. Also hat \mathbf{f} mit generischen Koeffizienten keine Nullstellen. Damit ist $\mathcal{L}(\mathbf{A}) = \mathcal{V}(A) = 0$. \square

SATZ 16 (Satz von Kushnirenko). *Sei $A = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m\} \subset \mathbb{Z}^n$ und $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^A$ Bernstein-generisch, wobei $\mathbf{A} = (A, \dots, A)$. Dann ist $\mathcal{L}(\mathbf{A}) = \mathcal{V}(A)$.*

BEWEIS. Wir werden im Beweis folgendermaßen vorgehen. Im Schritt (a) bilden wir ausgehend von $A \subset \mathbb{Z}^n$ ein geliftetes $\hat{A} \subset \mathbb{Z}^{n+1}$, das wir zu einem $\tilde{A} \subset \mathbb{Z}^{n+1}$ modifizieren. Dabei hat $\operatorname{conv}(\tilde{A})$ dieselbe untere Hülle wie $\operatorname{conv}(\hat{A})$. Wir berechnen die definierenden Gleichungen von $\mathcal{X}_{\tilde{A}}$. Anschließend definieren wir die Nullstellenmenge von \mathbf{f} in $\mathcal{X}_{\tilde{A}}$. Diese ist eine Kurve (der Ersatz für die Puiseux-Reihen in der Beweismethode von Bernstein).

Im Schritt (b) untersuchen wir eine Abbildung $\pi : \mathcal{X}_A \rightarrow \mathbb{P}^1$. Eingeschränkt auf \tilde{Z} ist π ein Morphismus. Wir werden unter Benützung von Lemma 6 zeigen, daß die Anzahl der Urbilder von $\pi|_{\tilde{Z}}$ für fast alle $(s_1 : s_2) \in \mathbb{P}^1$ gleich $\mathcal{L}(\mathbf{A})$ ist. Außerdem können wir uns auf \mathbf{f} mit solchen Koeffizienten beschränken, daß $(1 : 0)$ kein kritischer Wert von $\pi|_{\tilde{Z}}$ ist.

Im letzten Schritt werden wir zeigen, daß $\pi|_{\tilde{Z}}^{-1}(1 : 0) = \mathcal{V}(\mathbf{A})$ ist. Aufgrund der Konstruktion von \tilde{A} haben alle Punkte von $\pi|_{\tilde{Z}}^{-1}(1 : 0)$ eine besondere Eigenschaft. Sie liegen in Bahnen der Gestalt O_F , wobei F eine Seite der unteren Hülle von $\operatorname{conv}(\hat{A})$ und damit von $\operatorname{conv}(\tilde{A})$ ist. Projizieren wir diese auf \mathbb{Z}^n , so erhalten wir eine Triangulierung von A . Wir werden zeigen, daß $\mathcal{L}(\mathbf{A})$ die Summe der $\mathcal{L}(\mathbf{pr}(F))$ ist, wobei $\mathbf{pr}(F) = (\operatorname{pr}(F), \dots, \operatorname{pr}(F))$ und F eine Seite der unteren Hülle von $\operatorname{conv}(\hat{A})$ ist. Nach Lemma 7 ist $\mathcal{L}(\mathbf{pr}(F)) = \mathcal{V}(\operatorname{pr}(F))$. Also ist $\mathcal{L}(\mathbf{A}) = \sum \mathcal{V}(\operatorname{pr}(F)) = \mathcal{V}(A)$.

(a) Die Varietäten $\mathcal{X}_{\hat{A}}$ und $\mathcal{X}_{\tilde{A}}$.

Sei $\omega : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ ein Δ -Lift zu A . Wir erhalten ein Polytop $\hat{A} \subset \mathbb{Z}^{n+1}$. Wir definieren $\tilde{A} = \hat{A} \cup \{(\boldsymbol{\alpha}, \omega(\boldsymbol{\alpha}) + 1) : \boldsymbol{\alpha} \in A\}$. Wir bilden die torischen Varietäten $\mathcal{X}_{\hat{A}}$ und $\mathcal{X}_{\tilde{A}}$ mit den Abbildungen

$$\begin{aligned} \phi_{\hat{A}} : \mathfrak{T}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{P}^{m-1} \\ (\mathbf{x}, t) &\mapsto (\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}_1} t^{\omega(\boldsymbol{\alpha}_1)} : \dots : \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}_m} t^{\omega(\boldsymbol{\alpha}_m)}) \\ &\text{und} \\ \phi_{\tilde{A}} : \mathfrak{T}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{P}^{2m-1} \\ (\mathbf{x}, t) &\mapsto (\mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}_1} t^{\omega(\boldsymbol{\alpha}_1)} : \dots : \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}_m} t^{\omega(\boldsymbol{\alpha}_m)} : \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}_1} t^{\omega(\boldsymbol{\alpha}_1)+1} : \dots : \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}_m} t^{\omega(\boldsymbol{\alpha}_m)+1}). \end{aligned}$$

Sei I die Menge der definierenden Gleichungen $\mathbf{y}^{\mathbf{u}^+} - \mathbf{y}^{\mathbf{u}^-}$ von $\mathcal{X}_{\hat{A}}$. Wir berechnen nun die definierenden Gleichungen von $\mathcal{X}_{\tilde{A}}$ unter Verwendung von I . Dazu sei \hat{E}

Somit sind die definierenden Gleichungen von $\mathcal{X}_{\hat{A}}$

$$(11) \quad I \cup \{y_{m+1}y_i - y_1y_{m+i} : i \in \{1, \dots, m\}\}.$$

Die Nullstellenmenge von \mathbf{f} in \mathcal{X}_A bzw. $\hat{\mathbf{f}}$ in $\mathcal{X}_{\hat{A}}$ ist nach Definition

$$\begin{aligned} Z &:= \{\mathbf{y} \in \mathcal{X}_A : c_{i,\alpha_1}y_1 + \dots + c_{i,\alpha_m}y_m = 0 \text{ für } i \in \{1, \dots, n\}\} \quad \text{bzw.} \\ \hat{Z} &:= \{\mathbf{y} \in \mathcal{X}_{\hat{A}} : c_{i,\alpha_1}y_1 + \dots + c_{i,\alpha_m}y_m = 0 \text{ für } i \in \{1, \dots, n\}\}. \end{aligned}$$

In $\mathcal{X}_{\hat{A}}$ definieren wir die Nullstellenmenge von $\hat{\mathbf{f}}$ in $\mathcal{X}_{\hat{A}}$ ganz analog als

$$\tilde{Z} := \{\mathbf{y} \in \mathcal{X}_{\hat{A}} : c_{i,\alpha_1}y_1 + \dots + c_{i,\alpha_m}y_m = 0 \text{ für } i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Nach Satz 15 ist $\mathcal{X}_{\hat{A}}$ $(n+1)$ -dimensional. Da \tilde{Z} nichts anderes als der Schnitt von $\mathcal{X}_{\hat{A}}$ mit den n Hyperflächen

$$\{\mathbf{y} \in \mathbb{P}^{2m-1} : c_{i,\alpha_1}y_1 + \dots + c_{i,\alpha_m}y_m = 0\} \quad \text{für } i \in \{1, \dots, n\}$$

ist, ist \tilde{Z} eine glatte, algebraische Kurve im \mathbb{P}^{2m-1} (im Allgemeinen besteht diese aus mehreren Komponenten).

(b) Die Abbildung $\pi : \mathcal{X}_{\hat{A}} \rightarrow \mathbb{P}^1$.

Nach Satz 12 ist die Anzahl der Nullstellen von \mathbf{f} in \mathfrak{T}^n endlich und gleich $\mathcal{L}(\mathbf{A})$. Nach Bemerkung 10 ist keine der Nullstellen von \mathbf{f} in X_A im torischen Unendlichen, das heißt, $Z \subset \phi_A(\mathfrak{T}^n)$, und $\mathcal{L}(\mathbf{A}) = \#(Z)$.

Das geliftete $\hat{\mathbf{f}}$ kann als Kurve in \mathbb{C}^A aufgefaßt werden

$$s \mapsto \hat{\mathbf{f}}|_{T=s}.$$

Wie wir schon im Kapitel 3 gesehen haben, ist die Anzahl der Nullstellen von $\hat{\mathbf{f}}|_{T=s}$ in \mathfrak{T}^n dieselbe wie von \mathbf{f} , für fast alle $s \in \mathfrak{T}$. Allerdings können die Nullstellen im torischen Unendlichen liegen.

Wir definieren nun $\pi : \mathcal{X}_{\hat{A}} \rightarrow \mathbb{P}^1$. Für $\mathbf{y} = (y_1 : \dots : y_{2m}) \in \mathcal{X}_{\hat{A}}$ definieren wir im Bereich $y_{i_0} \neq 0$ für $i_0 \in \{1, \dots, m\}$

$$\pi(\mathbf{y}) = (y_{i_0} : y_{m+i_0}).$$

Für $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$ mit $y_i \neq 0$ ist $(y_{i_0} : y_{m+i_0}) = (y_i : y_{m+i})$ wegen der Gestalt der definierenden Gleichungen aus (11). Also stimmt der Funktionswert von π auf dem Durchschnitt der Bereiche $y_{i_0} \neq 0$ und $y_i \neq 0$ überein. Falls $y_i = 0$ ist für alle $i \in \{1, \dots, m\}$, so definieren wir für $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ mit $y_{m+i_0} \neq 0$

$$\pi(\mathbf{y}) = (y_{i_0} : y_{m+i_0}) = (0 : y_{m+i_0}).$$

Mit derselben Überlegung wie vorhin ergibt sich, daß π eine wohldefinierte Abbildung ist.

Wir untersuchen nun $\pi^{-1}(1 : s) \cap \tilde{Z}$. Zu einem \mathbf{y} aus $\pi^{-1}(1 : s)$ gibt es ein $i_0 \in \{1, \dots, m\}$, sodaß $(y_{i_0} : y_{m+i_0}) = (1 : s)$, das heißt $sy_{i_0} = y_{m+i_0}$. Wegen (11) ist $(y_i : y_{m+i}) = (1 : s)$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$.

Es ist also $\mathbf{y} = (y_1 : \dots : y_m : sy_1 : \dots : sy_m)$. Ist zusätzlich $\mathbf{y} \in \tilde{Z}$, so erfüllt \mathbf{y}

$$c_{i,\alpha_1}y_1 + \dots + c_{i,\alpha_m}y_m = 0 \text{ für } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Es ist $(y_1 : \dots : y_m)$ eine Nullstelle von $\hat{\mathbf{f}}$ in $\mathcal{X}_{\hat{A}}$. Wir erhalten eine Surjektion

$$(12) \quad \begin{array}{ccc} \pi^{-1}(1 : s) \cap \tilde{Z} & \xrightarrow{\pi_s^*} & \hat{Z} \\ \mathbf{y} = (y_1 : \dots : y_m : sy_1 : \dots : sy_m) & \mapsto & (y_1 : \dots : y_m). \end{array}$$

Nach Satz 15 liegt $\pi_s^*(\mathbf{y}) \in \hat{Z}$ in O_F für eine nicht-leere Seite F von $\text{conv}(A)$. Also ist $y_i \neq 0$ genau dann, wenn $\alpha_i \in F$ für $i \in \{1, \dots, m\}$. Für diese Komponenten ungleich Null gibt es die Darstellung $y_i = \mathbf{x}^{\alpha_i} t_{\mathbf{y}}^{\omega(\alpha_i)}$ für ein $\mathbf{x} \in \mathfrak{T}^n$ und $t_{\mathbf{y}} \in \mathfrak{T}$. Damit wird (12) zu einer Bijektion

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(1 : s) \cap \tilde{Z} &\rightarrow \hat{Z} \cap \{\pi_s^*(\mathbf{y}) : t_{\mathbf{y}} = s\} \\ \mathbf{y} = (y_1 : \dots : y_m : sy_1 : \dots : sy_m) &\mapsto (y_1 : \dots : y_m). \end{aligned}$$

Es entspricht $\hat{Z} \cap \{\pi_s^*(\mathbf{y}) : t_{\mathbf{y}} = s\}$ den Nullstellen von $\hat{\mathbf{f}}|_{T=s}$ in \mathcal{X}_A . Die Anzahl der Nullstellen ist für fast alle s konstant. Es ist $\hat{\mathbf{f}}|_{T=1} = \mathbf{f}$ und somit

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(1 : 1) \cap \tilde{Z} &\rightarrow Z \\ \mathbf{y} = (y_1 : \dots : y_m : y_1 : \dots : y_m) &\mapsto (y_1 : \dots : y_m) \end{aligned}$$

eine Bijektion. Also ist für fast alle $s \in \mathfrak{T}$

$$(13) \quad \mathcal{L}(\mathbf{A}) = \#(Z) = \#(\pi^{-1}(1 : 1) \cap \tilde{Z}) = \#(\pi^{-1}(1 : s) \cap \tilde{Z}).$$

Wir wenden nun Lemma 6 auf den Morphismus $\pi|_{\tilde{Z}} : \tilde{Z} \rightarrow \mathbb{P}^1$ an. Wegen Gleichung (13) muß

$$\#(\pi^{-1}(\mathbf{s}) \cap \tilde{Z}) = \mathcal{L}(\mathbf{A})$$

für alle $\mathbf{s} = (s_1 : s_2)$ sein, bis auf endlich viele kritische Werte $\{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_k\} \subset \mathbb{P}^1$. Diese Punkte wandern aber mit Veränderung der Koeffizienten von \mathbf{f} . Wegen Bemerkung 6 können wir uns im folgenden auf solche \mathbf{f} beschränken, für die $(1 : 0) \notin \{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_k\}$ ist.

Also ist

$$\mathcal{L}(\mathbf{A}) = \#(\pi^{-1}(1 : 0) \cap \tilde{Z}).$$

$$(c) \quad \mathcal{L}(\mathbf{A}) = \#(\pi^{-1}(1 : 0) \cap \tilde{Z}) = \mathcal{V}(A).$$

Die Punkte in $\pi^{-1}(1 : 0) \cap \tilde{Z}$ haben die Gestalt $\mathbf{y} = (y_1 : \dots : y_m : 0 : \dots : 0)$. Somit ist nach Satz 15 \mathbf{y} nicht in der Bahn $O_{\text{conv}(\tilde{A})}$, sondern in O_F für eine Seite F der unteren Hülle von \tilde{A} . Sei \mathcal{F} die Menge der Seiten F der unteren Hülle von \tilde{A} . Damit ist die Anzahl der Nullstellen

$$(14) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{A}) &= \pi^{-1}(1 : 0) \cap \tilde{Z} = \\ &= \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \# \left\{ \mathbf{y} \in O_F : \sum_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \in F}}^m c_{i, \alpha_j} y_j = 0 \text{ für } i \in \{1, \dots, n\} \right\} \end{aligned}$$

Sei $F \in \mathcal{F}$. Es gibt eine k -elementige Teilmenge $\{j_1, \dots, j_k\} \subseteq \{1, \dots, m\}$, sodaß $F = \text{conv}((\alpha_{j_1}, \omega(\alpha_{j_1})), \dots, (\alpha_{j_k}, \omega(\alpha_{j_k})))$.

Wir behaupten nun, daß die Anzahl der Nullstellen in O_F genau $\mathcal{V}(\text{pr}(F))$ ist. Wenn wir unsere Rechnung mit einem anderen Δ -Lift $\tilde{\omega}$ machen, der dieselbe Triangulierung von $\text{conv}(A)$ induziert, dann erhalten wir ebenso die Gleichung (14). Wir können also zu jeder Seite F einen Δ -Lift $\tilde{\omega}$ wählen, sodaß F bzgl. $\tilde{\omega}$ (kurz: \check{F}) parallel zu $\mathbb{Z}^n \times \{0\}$ ist (siehe Abbildung 11). Es gilt dann

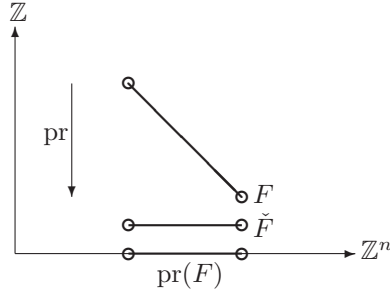


ABBILDUNG 11

$$\begin{aligned} \# \left\{ \mathbf{y} \in O_F : \sum_{l=1}^k c_{i, \alpha_{j_l}} y_{j_l} = 0 \text{ für } i \in \{1, \dots, n\} \right\} &= \\ &= \# \left\{ \mathbf{y} \in O_{\tilde{F}} : \sum_{l=1}^k c_{i, \alpha_{j_l}} y_{j_l} = 0 \text{ für } i \in \{1, \dots, n\} \right\} \end{aligned}$$

Für alle $l \in \{j_1, \dots, j_k\}$ ist $y_l \neq 0$. Damit läßt sich $y_l = \mathbf{x}^{\alpha_l} t^{\omega(\alpha_l)}$ schreiben, mit $\mathbf{x} \in \mathfrak{T}^n$ und $t \in \mathfrak{T}$. Wir erhalten die Gleichungen

$$\sum_{l=1}^k c_{i, \alpha_{j_l}} \mathbf{x}^{\alpha_{j_l}} t^{\omega(\alpha_{j_l})} = 0 \text{ für } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Da \tilde{F} parallel zu $\mathbb{Z}^n \times \{0\}$ ist, kommt t immer mit derselben Potenz h vor. Somit

$$t^h \cdot \sum_{l=1}^k c_{i, \alpha_{j_l}} \mathbf{x}^{\alpha_{j_l}} = 0 \text{ für } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Da wir in Lösungen in \mathfrak{T}^n interessiert sind, können wir den Faktor t^h weglassen. Nach Lemma 7 ist die Anzahl der Lösungen $\mathcal{V}(\text{pr}(F))$, wenn F n -dimensional ist.

Da A die Vereinigung aller $\text{pr}(F)$ ist und die untere Hülle in Bijektion mit A steht, ist

$$\mathcal{L}(A) = \sum_{F \in \mathcal{F}} \mathcal{V}(\text{pr}(F)) = \mathcal{V}(A).$$

□

Mithilfe der Polarisierungsformel folgt nun auch der Satz von Bernstein.

Satz von Bernstein für den affinen Fall

Ansätze, wie wir die Anzahl der Nullstellen von $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ in \mathbb{C}^n bestimmen können, liefert der Fall $n = 1$. Dort besagt der Satz von Bernstein, daß die Anzahl der Nullstellen mit Vielfachheit in \mathbb{C}^* von

$$(15) \quad f = \sum_{i=l}^k c_i X^i \quad \text{mit } c_l \neq 0 \neq c_k$$

gerade $k - l$ ist. Dieses Ergebnis können wir auch mithilfe des Fundamentalsatzes der Algebra gewinnen.

BEMERKUNG 11. Die Multiplikation mit einem Monom \mathbf{X}^α verändert die Anzahl der Nullstellen in \mathbb{C}^n sehr wohl. In einem gewissen Sinn ist es also hier wichtig, daß wir die $\mathbf{0}$ in bezug auf die Newtonpolytope "fixieren". Auch macht es nur noch Sinn, Polynome aus $\mathbb{C}[\mathbf{X}]$ zu betrachten (und nicht mehr allgemein Laurentpolynome).

Eine Schranke für die Anzahl der Nullstellen in \mathbb{C}^n ist

SATZ 17 (Satz von Bézout). *Seien f_1, \dots, f_n Polynome. Falls die Anzahl der gemeinsamen Nullstellen endlich ist, so ist sie beschränkt durch $\deg(f_1) \cdots \deg(f_n)$.*

BEWEIS. Für jedes Polynom ist $\mathcal{N}(f) \subseteq \deg(f) \cdot \mathcal{S}_n$, wobei $\mathcal{S}_n = \text{conv}(\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ der n -dimensionale Standardsimplex ist. Wir werden verleitet zu argumentieren, daß mit dem Satz von Bernstein die Anzahl der Nullstellen höchstens

$$\begin{aligned} \text{MV}(\mathcal{N}(f_1), \dots, \mathcal{N}(f_n)) &\leq \text{MV}(\deg(f_1) \cdot \mathcal{S}_n, \dots, \deg(f_n) \cdot \mathcal{S}_n) \\ &= \deg(f_1) \cdots \deg(f_n) \text{MV}(\mathcal{S}_n, \dots, \mathcal{S}_n) \\ &= \deg(f_1) \cdots \deg(f_n) \end{aligned}$$

ist und daraus der Satz von Bézout folgt. Nur stimmt das so nicht ganz, denn der Satz von Bernstein gibt nur die Anzahl der Nullstellen in $\mathfrak{T}^n \subseteq \mathbb{C}^n$ an. Im folgenden Beispiel 6 werden wir sehen, daß trotz generischer Koeffizienten Nullstellen außerhalb von \mathfrak{T}^n liegen können. Im Abschnitt 1 dieses Kapitels werden wir dann den Satz von Bézout beweisen. \square

BEISPIEL 6. Wir betrachten die beiden Polynome $f, g \in \mathbb{C}[X, Y]$

$$\begin{aligned} f &= a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 Y \\ g &= b_1 Y + b_2 Y^2 + b_3 X Y^3. \end{aligned}$$

Für jede Wahl der Koeffizienten ist $\mathbf{0}$ eine Nullstelle von (f, g) (das ist noch nichts besonderes, da beide Polynome keinen konstanten Term haben). Außerdem gibt es

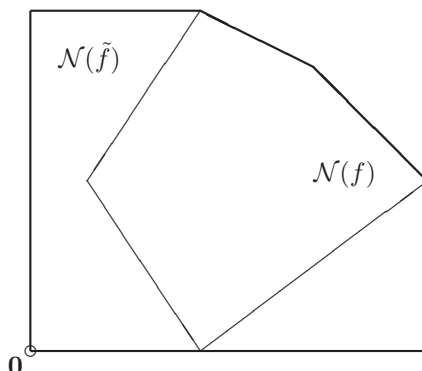


ABBILDUNG 12. Die Newtonpolytope von $f = c_1X^7Y^3 + c_2X^5Y^5 + c_3X^3Y^6 + c_4XY^3 + c_5X^3 + c_6X^3Y^4 + c_7X^4Y^2$ und \tilde{f} .

Nullstellen der Form $(0, -\frac{b_1}{b_2})$ und $(-\frac{a_1}{a_2}, 0)$, denn

$$\begin{aligned} f(-\frac{a_1}{a_2}, 0) &= -\frac{a_1}{a_2} \left(a_1 + a_2(-\frac{a_1}{a_2}) \right) = 0, \\ g(0, -\frac{b_1}{b_2}) &= -\frac{b_1}{b_2} \left(b_1 + b_2(-\frac{b_1}{b_2}) \right) = 0 \quad \text{und} \\ f(0, p) &= 0 = g(q, 0). \end{aligned}$$

Wir haben also 3 Nullstellen in den Koordinatenhyperebenen für jede Wahl der $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ mit $a_2 \neq 0 \neq b_2$.

1. Translationsansatz

Unser erster Ansatz bedient sich folgender Überlegung. Bei dem Polynom f aus Gleichung (15) ist 0 eine Nullstelle mit Vielfachheit l . Wenn wir nun für ein $x_0 \in \mathfrak{T}$, das keine Nullstelle von f ist, die Variablentransformation $X \rightsquigarrow X - x_0$ durchführen, so erhalten wir ein Polynom $\tilde{f} = \sum_{i=0}^k \tilde{c}_i X^i$ vom selben Grad, aber mit $\tilde{c}_0 = f(x_0) \neq 0$. Alle Nullstellen von f befinden sich nun in \mathfrak{T} . Der Satz von Bernstein liefert die gewünschte Anzahl aller Nullstellen in \mathbb{C} $k - 0 = \deg(\tilde{f}) = \deg(f)$.

Wir übertragen diese Überlegung auf den Fall von beliebigem n . Wir benötigen ein \mathbf{x}_0 , das zum einen keine Nullstelle von \mathbf{f} ist und für das $p_i \neq x_i$ für alle Nullstellen $\mathbf{p} \in \mathfrak{T}^n$ von \mathbf{f} und $i \in \{1, \dots, n\}$ ist (sonst wandert diese Nullstelle auf die entsprechende Koordinatenhyperebene). Durch die Translation

$$\mathbf{X} \rightsquigarrow \mathbf{X} - \mathbf{x}$$

sind nun alle Nullstellen des transformierten $\tilde{\mathbf{f}}$ in \mathfrak{T}^n . Allerdings haben sich die Newtonpolytope sehr verändert und ihre ursprüngliche Gestalt fast gänzlich verloren. Wir erhalten zu jedem Monom \mathbf{X}^α die Teilmenge eines ganzen "Quaders" $\{\mathbf{X}^\beta : \beta_i \in \{0, \dots, \alpha_i\} \text{ für } i \in \{1, \dots, n\}\}$ (als Beispiel siehe Abbildung 12).

Da alle Nullstellen von $\tilde{\mathbf{f}}$ in \mathfrak{T}^n sind und $\mathcal{N}(\tilde{f}_i) \subseteq \deg(f_i) \cdot \mathcal{S}_n$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ ist, folgt nun mit Bernstein der Satz von Bézout.

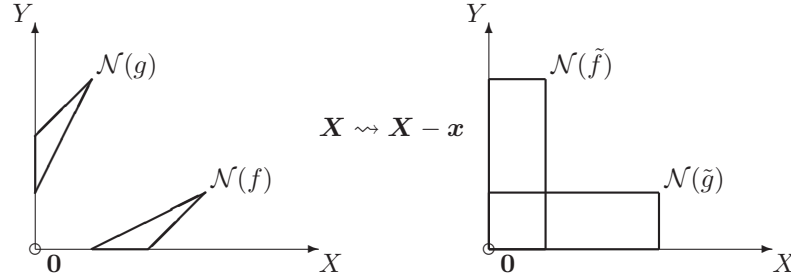


ABBILDUNG 13. Die Newtonpolytope zweier Polynome f und g sowie von \tilde{f} und \tilde{g} .

BEISPIEL 7 (Fortsetzung von Beispiel 6). In Abbildung 13 sehen wir, wie sich die Träger von f und g unter Translation der Koordinaten verändern. Die Anzahl der Nullstellen in \mathbb{C}^n ist somit kleiner oder gleich

$$\text{MV}(\mathcal{N}(\tilde{f}), \mathcal{N}(\tilde{g})) = 16 - 3 - 3 = 10.$$

Der Satz von Bézout liefert hier als Schranke $\deg(f) \deg(g) = 4 \cdot 4 = 16$. Wir haben hier also eine deutliche Verbesserung erreicht.

Die Anzahl der Nullstellen von (f, g) in \mathfrak{T}^n ist

$$\text{MV}(\mathcal{N}(f), \mathcal{N}(g)) = 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 3,$$

also befinden sich maximal 7 Nullstellen auf den Koordinatenhyperebenen. Wie wir uns aber schon früher überlegt haben, gibt es nur 3 Nullstellen auf den Koordinatenhyperebenen. Die gesuchte Anzahl der Nullstellen in \mathbb{C}^2 ist damit 6.

2. Hinzufügen der 0

Einen anderen Ansatz liefert folgende Überlegung. Ersetzen wir f aus Gleichung (15) durch $f + c_0$ mit $c_0 \in \mathfrak{T}$, dann können wir hoffen, daß sich für kleines c_0 sich die Nullstellen nicht gravierend verändern, das heißt, daß deren Anzahl gleich bleibt. Durch dieses c_0 wird verhindert, daß 0 eine Nullstelle von $f + c_0$ ist. Dieses veränderte $f + c_0$ liefert die gewünschte Zahl $l - 0 = \deg(f)$. Wir haben hier das Newtonpolytop $\mathcal{N}(f)$ verändert zu $\text{conv}(\{0\} \cup \mathcal{N}(f))$.

Für beliebiges n ergibt sich

SATZ 18. Die Anzahl der Nullstellen von \mathbf{f} in \mathbb{C}^n ist beschränkt durch

$$\text{MV}(\text{conv}(\{0\} \cup \mathcal{N}(f_1)), \dots, \text{conv}(\{0\} \cup \mathcal{N}(f_n))).$$

Der Beweis für diese Aussage ist in Artikel [9] von Li und Wang. Im Artikel [12] von Rojas und Wang wird auch besprochen, wann diese Schranke exakt ist. Im folgenden Abschnitt werden wir eine schärfere Schranke kennenlernen, aus der die Schranke aus Satz 18 folgt.

BEISPIEL 8 (Fortsetzung von Beispiel 6). Mit Satz 18 ist die Anzahl der Nullstellen von (f, g) in \mathbb{C}^n beschränkt durch

$$\text{MV}(\text{conv}(\{\mathbf{0}\} \cup \mathcal{N}(f)), \text{conv}(\{\mathbf{0}\} \cup \mathcal{N}(g))) = 10 - 1 - 1 = 8.$$

Wir sehen, daß wir hier noch zwei Nullstellen zuviel zählen. Eine Schranke, die für generische Koeffizienten exakt ist, liefert das *stabile gemischte Volumen* im folgenden Abschnitt, dessen Berechnung aber deutlich aufwendiger als die Berechnung des Minkowskivolumens der leicht veränderten Newtonpolytope ist.

3. Das I -stabile gemischte Volumen

LITERATUR. Die Basis für diesen Abschnitt bilden die Artikel [7] und [8] von Huber und Sturmfels.

Wir gehen in diesem Abschnitt ein bißchen allgemeiner vor. Sei $I \subseteq \{1, \dots, n\}$. Wir definieren

$$\mathbb{C}_I^n := \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n : x_i \neq 0 \text{ für } i \in \{1, \dots, n\} \setminus I\}.$$

Für $I = \{1, \dots, n\}$ ist $\mathbb{C}_I^n = \mathbb{C}^n$ und für $I = \emptyset$ ist $\mathbb{C}_I^n = \mathfrak{T}^n$.

LEMMA 8. Sei $I \subseteq \{1, \dots, n\}$. Dann hat $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^{\mathbf{A}}$ endlich viele Nullstellen in \mathbb{C}_I für eine generische Wahl der Koeffizienten, wenn für jede Teilmenge $J \subseteq I$ gilt

$$(16) \quad \#(J) \geq \#\{i \in \{1, \dots, n\} : f_i \in \langle X_j : j \in J \rangle\} =: n_J.$$

BEWEIS. Wir setzen $\mathbb{C}_{(J)} := \{\mathbf{X} \in \mathbb{C}^n : X_j = 0 \Leftrightarrow j \in J\} \cong \mathfrak{T}^{n-\#(J)}$. Klarerweise ist $\mathbb{C}_I = \bigcup_{J \subseteq I} \mathbb{C}_{(J)}$. Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Die Einschränkung der polynomialen Funktion f_i auf $\mathbb{C}_{(J)}$ ist genau dann die Nullfunktion, wenn f_i im Ideal $\langle X_j : j \in J \rangle$ liegt. Die Anzahl der f_i , die eingeschränkt auf $\mathbb{C}_{(J)}$ die Nullfunktion sind, ist deshalb n_J . Dadurch ist die Einschränkung von \mathbf{f} auf $\mathbb{C}_{(J)}$ im wesentlichen ein Gleichungssystem in $n - n_J$ Gleichungen und $n - \#(J)$ Variablen. Nach (16) ist $n - \#(J) \leq n - n_J$, das heißt, das eingeschränkte Gleichungssystem besteht aus mindestens so viele Gleichungen wie Variablen. Deshalb hat dieses Gleichungssystem für eine generische Wahl der Koeffizienten nach dem Satz von Bernstein nur endlich viele Nullstellen. Da es nur endlich viele Teilmengen J von I gibt, folgt die Behauptung. \square

BEISPIEL 9 (Fortsetzung von Beispiel 6). Nach Lemma 8 ist die Anzahl der Nullstellen von (f, g) in $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}_I$ mit $I = \{1, 2\}$ endlich. Denn für $J = \{1\}$ ist nur $f \in \langle X \rangle$ bzw. für $J = \{2\}$ nur $g \in \langle Y \rangle$. Für $J = I$ ist Bedingung (16) klarerweise erfüllt.

Wir definieren das *I -stabile gemischte Volumen* folgendermaßen. Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Dann sei $P_i = \text{conv}(\{\mathbf{0}\} \cup A_i) \subset \mathbb{R}^n$ und $\hat{P}_i = \text{conv}(\{\mathbf{0}\} \cup \hat{A}_i) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, wobei $\hat{A}_i = \{(\boldsymbol{\alpha}, \omega_i(\boldsymbol{\alpha})) : \boldsymbol{\alpha} \in \{\mathbf{0}\} \cup A_i\}$ vermöge $\omega_i : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ mit

$$\omega_i(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{\alpha} \in A_i \\ 1 & \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \notin A_i \end{cases}$$

geliftet wurde.

Sei $P = \sum_{i=1}^n P_i$ bzw. $\hat{P} = \sum_{i=1}^n \hat{P}_i$. Wie wir uns schon in Abschnitt 1.2 von Kapitel 4 überlegt haben, steht die untere Hülle von \hat{P} in Bijektion mit P vermöge der Projektion $\text{pr} : \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}^n$ auf die ersten n Komponenten. Damit

erhalten wir eine Unterteilung $S = \left\{ \text{pr}(\hat{F}) : \hat{F} \text{ Seite der unteren Hülle von } \hat{P} \right\}$ von P . Mit $\mathbf{u}_{\hat{F}} \in \mathbb{R}^{n+1}$ bezeichnen wir die innere Normale von \hat{F} . OBdA. sei die letzte Komponente von $\mathbf{u}_{\hat{F}}$ gleich 1. Wir nennen $\text{pr}(\hat{F}) \in S$ I -stabil, wenn $\mathbf{u}_{\hat{F}}$ keine negativen Einträge hat und für $i \notin I$ die i -te Komponente von $\mathbf{u}_{\hat{F}}$ gleich 0 ist.

Aufgrund Lemma 1 läßt sich \hat{F} in eindeutiger Weise schreiben als $\sum_{i=1}^n \hat{F}_i$ mit \hat{F}_i Seite der unteren Hülle von \hat{P}_i für $i \in \{1, \dots, n\}$. Damit ist

$$\text{pr}(\hat{F}) = \sum_{i=1}^n \text{pr}(\hat{F}_i).$$

Wir definieren das I -stabile gemischte Volumen $\text{SM}_I(\mathbf{A})$ als Summe der Minkowskivolumina $\text{MV}(\text{pr}(\hat{F}_1), \dots, \text{pr}(\hat{F}_n))$, wobei $\text{pr}(\hat{F}) = \sum_{i=1}^n \text{pr}(\hat{F}_i)$ I -stabil ist.

SATZ 19. *Die Anzahl der isolierten Nullstellen von $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^{\mathbf{A}}$ in \mathbb{C}_I ist beschränkt durch das I -stabile gemischte Volumen $\text{SM}_I(\mathbf{A})$. Diese Schranke ist exakt, wenn \mathbf{f} für eine generische Wahl der Koeffizienten nur endlich viele Nullstellen hat.*

BEMERKUNG 12. Klarerweise ist $\sum_{i=1}^n \text{conv}(A_i)$ eine Zelle der Unterteilung S , die einzige mit der Normalen $(0, \dots, 0, 1)$. Damit ist

$$\text{MV}(\mathbf{A}) \leq \text{SM}_I(\mathbf{A}).$$

Wenn wir die Summe aller Minkowskivolumina $\text{MV}(\text{pr}(\hat{F}_1), \dots, \text{pr}(\hat{F}_n))$ mit $\text{pr}(\hat{F}) = \sum_{i=1}^n \text{pr}(\hat{F}_i) \in S$ bilden, ohne darauf Rücksicht zu nehmen, ob $\text{pr}(\hat{F})$ I -stabil ist, so erhalten wir $\text{MV}(\text{conv}(\{\mathbf{0}\} \cup A_1), \dots, \text{conv}(\{\mathbf{0}\} \cup A_n))$. Also ist

$$\text{MV}(\mathbf{A}) \leq \text{SM}_I(\mathbf{A}) \leq \text{MV}(\text{conv}(\{\mathbf{0}\} \cup A_1), \dots, \text{conv}(\{\mathbf{0}\} \cup A_n)).$$

Damit folgt Satz 18 aus Satz 19.

BEWEISSKIZZE. Sei \mathbf{f} mit generischen Koeffizienten im Sinne von Lemma 8. Wir definieren

$$t \mapsto \mathbf{f}^t : f_i^t := \begin{cases} c \cdot t + f_i & \mathbf{0} \notin A_i \\ f_i & \mathbf{0} \in A_i \end{cases} \quad \text{für } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Wir können $c \in \mathfrak{T}$ so wählen, daß $t \mapsto \mathbf{f}^t$ Bernstein-generisch ist für alle $t \in \mathfrak{T}$ bis auf endlich viele Ausnahmen. Nach dem Satz von Bernstein hat $t \mapsto \mathbf{f}^t$ für diese Werte von t genau $\text{MV}(\text{conv}(\{\mathbf{0}\} \cup A_1), \dots, \text{conv}(\{\mathbf{0}\} \cup A_n))$ Nullstellen in \mathfrak{T}^n . Außerdem sind *alle* Nullstellen von $t \mapsto \mathbf{f}^t$ in \mathfrak{T}^n für $t \in \mathfrak{T}$.

Wir stellen die Nullstellenmenge von $t \mapsto \mathbf{f}^t$ als Puiseux-Reihen

$$\gamma(t) = \mathbf{a}t^{\mathbf{r}}(1 + o(1))$$

mit $\mathbf{a} \in \mathfrak{T}^n$ und $\mathbf{r} \in \mathbb{Q}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ dar. Jede Nullstelle von \mathbf{f} ist somit der Grenzwert $\mathbf{x} := \lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t)$ für eine Puiseux-Reihe γ . Wir werden also untersuchen, welche Puiseux-Reihen für $t \rightarrow 0$ konvergieren.

Es stellt sich heraus, daß $(\mathbf{r}, 1)$ die innere Normale auf eine Seite \hat{F} der unteren Hülle von \hat{P} ist. Für $\text{pr}(\hat{F}) = \sum_{i=1}^n \text{pr}(\hat{F}_i) \in S$ ist \mathbf{a} die Nullstelle von

$$\mathbf{f}_{\text{pr}(\hat{F})} : \sum_{\alpha \in A_i \cap \text{pr}(\hat{F}_i)} c_{i,\alpha} \mathbf{X}^{\alpha} \quad \text{für } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Nach dem Satz von Bernstein liefert jedes $\text{pr}(\hat{F}) \in S$ genau $\text{MV}(\text{pr}(\hat{F}_1), \dots, \text{pr}(\hat{F}_n))$ Nullstellen.

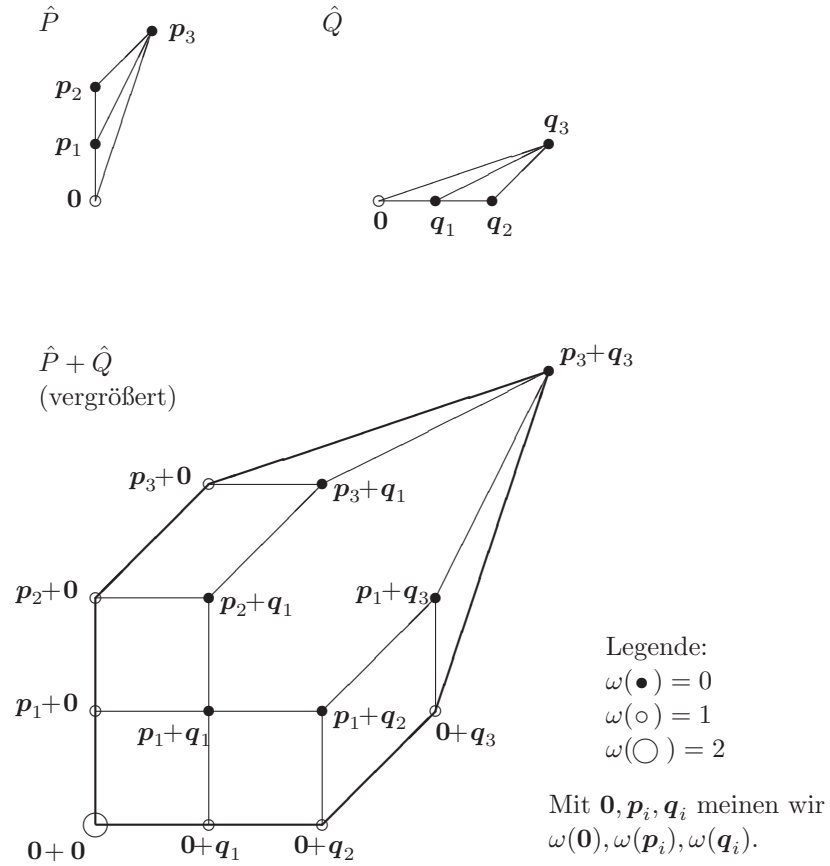


ABBILDUNG 14. Die unteren Hüllen von \hat{P} , \hat{Q} und $\hat{P} + \hat{Q}$ aus Beispiel 6.

Eine Puiseux-Reihe γ konvergiert nur für $t \rightarrow 0$, wenn alle Exponenten \mathbf{r} des Anfangsterms nicht negativ sind. Wenn $r_i > 0$ ist, dann ist die i -te Koordinate von \mathbf{x} Null. Damit liegt \mathbf{x} in C_I für $i \in I$. Da nur solche $\text{pr}(\hat{F}) \in S$, die I -stabil sind, beim I -stabilen gemischten Volumen berücksichtigt werden, folgt die Aussage. \square

BEISPIEL 10 (Fortsetzung von Beispiel 6). Sei $P = \text{conv}(\{\mathbf{0}\} \cup \mathcal{N}(f))$ und $Q = \text{conv}(\{\mathbf{0}\} \cup \mathcal{N}(g))$, sowie \hat{P} bzw. \hat{Q} das geliftete P bzw. Q . Die unteren Hüllen von \hat{P} , \hat{Q} und $\hat{P} + \hat{Q}$ sind in Abbildung 14 dargestellt. Die Unterteilung S von $P + Q$ ist aufgeführt in Tabelle 1. Das $\{1, 2\}$ -stabile gemischte Volumen von $\mathcal{N}(f)$ und $\mathcal{N}(g)$ ist somit $3 + 1 + 1 + 1 = 6$ und liefert die Anzahl der Nullstellen von (f, g) .

4. Wieso ist die Anzahl der Nullstellen wichtig?

Eine wichtige Anwendung des Satzes von Bernstein ist das explizite Berechnen der Nullstellen von \mathbf{f} mithilfe numerischer *Homotopie-Fortsetzungsmethoden*. Hier werden aus den schon bekannten Nullstellen eines n -Tupels von Polynomen \mathbf{g} die

$\text{pr } \hat{F} \in S$	Normale von \hat{F}	$\text{MV}(\text{pr}(\hat{F}_1), \dots, \text{pr}(\hat{F}_n))$	$\{1, 2\}$ -stabil?
$\mathcal{N}(f) + \mathcal{N}(g)$	$(0, 0, 1)$	3	✓
$\text{conv}(\mathbf{0}, \mathbf{p}_1) + \text{conv}(\mathbf{0}, \mathbf{q}_1)$	$(1, 1, 1)$	1	✓
$\text{conv}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) + \text{conv}(\mathbf{0}, \mathbf{q}_1)$	$(1, 0, 1)$	1	✓
$\text{conv}(\mathbf{0}, \mathbf{p}_1) + \text{conv}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$	$(0, 1, 1)$	1	✓
$\text{conv}(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) + \text{conv}(\mathbf{0}, \mathbf{q}_1)$	$(1, -1, 1)$	1	
$\text{conv}(\mathbf{0}, \mathbf{p}_1) + \text{conv}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$	$(-1, 1, 1)$	1	
$\text{conv}(\mathbf{0}, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) + \mathbf{q}_3$	$(-2, 1, 1)$	0	
$\mathbf{p}_3 + \text{conv}(\mathbf{0}, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$	$(1, -2, 1)$	0	

TABELLE 1. Unterteilung S von $P + Q$.

Nullstellen von \mathbf{f} unter Benützung der Homotopie

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, t) = c(1 - t)\mathbf{g}(\mathbf{x}) + t\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

berechnet, wobei $c \in \mathfrak{T}$ (dieses c wird generisch gewählt, damit sich \mathbf{h} "brav" verhält). Für $t = 0$ ist \mathbf{h} das \mathbf{g} mit den schon bekannten Nullstellen. Wir lassen t von 0 nach 1 wandern (t muß dabei nicht unbedingt reell sein, auch ein komplexer Weg ist möglich). Die Jacobimatrix von \mathbf{h} bzgl. \mathbf{x}

$$J(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

habe für diese Werte von t immer maximalen Rang. Wie wir uns schon im Abschnitt 1 überlegt haben, gibt es einen zumindest komplexe Wege von 0 nach 1, sodaß die Jacobimatrix immer maximalen Rang hat.

Sofern die Nullstellenmenge von \mathbf{h} entlang des Weges von t glatt ist, besagt das Implizite Funktionen Theorem, daß wir für jede Nullstelle \mathbf{x}_0 von \mathbf{g} eine Kurve $\gamma(t)$ erhalten mit $\mathbf{h}(\gamma(t), t) = 0$ und $\gamma(0) = \mathbf{x}_0$. Wir interessieren uns für $\gamma(1)$, das eine Nullstelle von \mathbf{f} sein sollte.

Da $\mathbf{h}(\gamma(t), t)$ als Funktion von t identisch Null sein soll, verschwindet ebenfalls $\frac{d}{dt}(\mathbf{h}(\gamma(t), t))$. Damit muß $\gamma(t)$ folgende Differentialgleichung erfüllen

$$0 = \frac{d}{dt}(\mathbf{h}(\gamma(t), t)) = J(\gamma(t)) \cdot \frac{d}{dt}(\gamma(t)) + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}(\gamma(t), t).$$

Wir erhalten also ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(17) \quad J(\gamma(t)) \cdot \frac{d}{dt}(\gamma(t)) = -\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}(\gamma(t), t)$$

mit der Anfangsbedingung $\gamma(0) = \mathbf{x}_0$, die sich numerisch gut behandeln läßt.

Bevor der Satz von Bernstein bekannt war, wurden für \mathbf{g} Polynome mit dem selben Grad wie \mathbf{f} gewählt, ohne Rücksicht auf die auftretenden Newtonpolytope zu nehmen. Daher hatte \mathbf{g} oft mehr Nullstellen als \mathbf{f} . All jene Nullstellen von \mathbf{g} , die zuviel sind, sorgen als Startwert dafür, daß die Lösungen der Differentialgleichungen aus Gleichung (17) für $t \rightarrow 1$ divergieren. Je besser die Schranke für die Anzahl der Nullstellen von \mathbf{f} ist, desto weniger Differentialgleichungen müssen berechnet werden, was einigen Aufwand sparen kann.

Der Satz von Bernstein und seine Verallgemeinerungen erlauben es uns in vielen Fällen, genauer als mit dem Satz von Bézout abzuschätzen, wieviele Nullstellen \mathbf{f} hat. Außerdem wissen wir, wie das Newtonpolytop von \mathbf{g} aussehen sollte.

LITERATUR. Die Informationen aus diesem Abschnitt finden sich in [4] in Kapitel 7.5. Für eine genauere Betrachtung (mit expliziten Algorithmen) verweisen wir auf [14].

Anwendung des Satzes

Gegeben sei ein Laurentpolynom $f \in \mathbb{C}\langle \mathbf{X} \rangle$. Wir untersuchen nun die Anzahl der Schnittpunkte von $Z(f)$ mit einer Geraden \mathfrak{l} in \mathfrak{T}^n und zeigen

SATZ 20. *Die Anzahl mit Vielfachheit der Schnittpunkte von $Z(f)$ und generischem \mathfrak{l} ist $\deg(f)$.*

1. Rein rechnerisch

Sei $f = \sum_{\alpha \in A} c_{\alpha} \mathbf{X}^{\alpha}$ mit $A \subset \mathbb{Z}^n$ endlich. Die Multiplikation von f mit einem Monom \mathbf{X}^{α} , $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, ändert an den Nullstellen in \mathfrak{T}^n nichts. Deswegen ist es uns erlaubt, das Polynom f durch Multiplikation mit einem Monom in eine besondere Gestalt zu transformieren. Einerseits soll f zu einem Polynom werden und andererseits für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ von X_i nicht geteilt werden. Das wird erreicht durch Multiplikation mit \mathbf{X}^{β} , wobei $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}^n$ mit $\beta_i = -\min\{\alpha_i : \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in A\}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. Geometrisch bedeutet das für den Träger A von f , daß nun $A \subset \mathbb{N}_0^n$ und

$$A \cap \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = 0\} \neq \emptyset$$

für $i \in \{1, \dots, n\}$, das heißt, auf jeder Koordinatenhyperfläche in \mathbb{Z}^n gibt es einen Punkt aus A .

Die Gerade \mathfrak{l} können wir folgendermaßen anschreiben: $\mathfrak{l} = \{\mathbf{p} + t \cdot \mathbf{q} : t \in \mathbb{C}\}$ mit $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$. Für die Schnittpunkte \mathbf{x} von $Z(f)$ und \mathfrak{l} gilt nun, daß $f(\mathbf{x}) = 0$ und $\mathbf{x} \in \mathfrak{l}$, das heißt, es gibt ein $t_0 \in \mathbb{C}$, sodaß $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t_0 \cdot \mathbf{q}$. Setzen wir diese Darstellung in das Polynom f ein und behandeln t_0 als Variable, so erhalten wir $g(t_0) = f(\mathbf{p} + t_0 \cdot \mathbf{q}) \in \mathbb{C}[t_0]$. Jeder Nullstelle von g entspricht nun ein Schnittpunkt von $Z(f)$ und \mathfrak{l} , und umgekehrt. Wir wissen, daß die Anzahl der Nullstellen von g genau dem Grad von g entspricht (gezählt mit Vielfachheit). Dieser Grad von g wiederum ist der Grad von f . Also gilt Satz 20.

BEMERKUNG 13. Die Schranke, die der Satz von Bézout in diesem Fall für f liefert (nach Multiplikation mit \mathbf{X}^{β}), ist hier exakt. Die Gerade \mathfrak{l} kann als Schnitt von $n - 1$ affinen Hyperebenen $Z(E_2), \dots, Z(E_n)$ mit $E_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j + b_i$ ($i \in \{2, \dots, n\}$) dargestellt werden. Der Satz von Bézout besagt, daß die Anzahl der gemeinsamen Nullstellen von f, E_2, \dots, E_n kleiner oder gleich dem Produkt der Grade $\deg(f) \cdot \deg(E_2) \cdots \deg(E_n) = \deg(f) \cdot 1 \cdots 1 = \deg(f)$ ist.

2. Mit Zuhilfenahme von Bernstein

Der Satz von Bernstein besagt im vorliegenden Fall, daß

$$\#\{\mathbf{x} \in \mathfrak{l} : f(\mathbf{x}) = 0\} = \text{MV}(\mathcal{N}(f), \mathcal{N}(E_2), \dots, \mathcal{N}(E_n)).$$

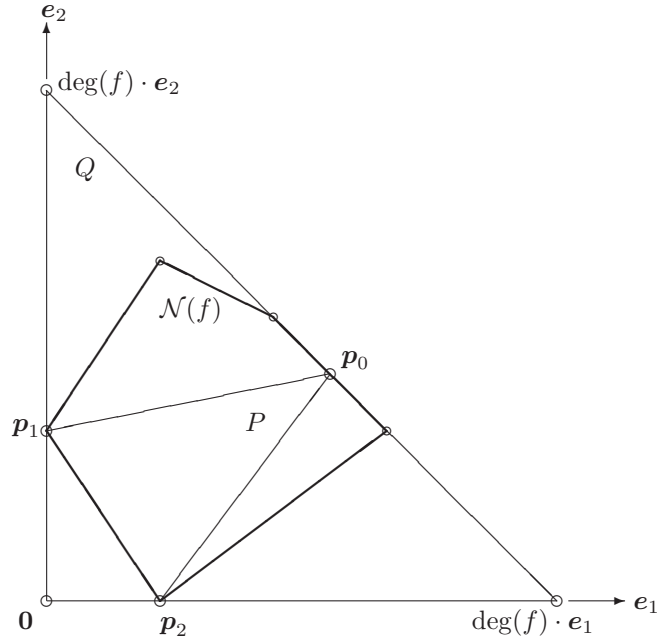


ABBILDUNG 15. Die Polytope P , \mathcal{N} und Q .

Hier haben wir $\mathcal{N}(E_i) = \text{conv}(\mathbf{0}, e_1, \dots, e_n) = \mathcal{S}_n$ für $i \in \{2, \dots, n\}$, also ist $\mathcal{N}(E_i)$ der n -dimensionale Standardsimplex. Wir wollen hier zeigen, daß $\text{MV}(\mathcal{N}(f), \mathcal{S}_n, \dots, \mathcal{S}_n) = \text{deg}(f)$. Wie im vorigen Abschnitt können wir annehmen, daß $f \in \mathbb{C}[\mathbf{X}]$ und X_i das Polynom f für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ nicht teilt.

Die erste Beobachtung ist, daß das Minkowskivolumen in unserem konkreten Fall nur vom Grad von f abhängen soll. Das Polytop $\mathcal{N}(f)$ werden wir nun nach oben und unten durch einfachere Polytope abschätzen, von denen wir zeigen, daß sie mit den $n - 1$ Standardsimplizes das Minkowskivolumen $\text{deg}(f)$ haben.

Einerseits ist $\mathcal{N}(f) \subseteq \text{deg}(f) \cdot \mathcal{S}_n =: Q$. Andererseits gibt es $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n \in \mathcal{N}(f)$ mit

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n p_{0j} &= \text{deg}(f) \\ p_{ii} &= 0 \quad \text{für } i \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Wir setzen $P := \text{conv}(\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n) \subseteq \mathcal{N}(f)$. Wir erhalten also $P \subseteq \mathcal{N}(f) \subseteq Q$ (siehe Abbildung 15) und somit nach Satz 6

$$\text{MV}(P, \mathcal{S}_n, \dots, \mathcal{S}_n) \leq \text{MV}(\mathcal{N}(f), \mathcal{S}_n, \dots, \mathcal{S}_n) \leq \text{MV}(Q, \mathcal{S}_n, \dots, \mathcal{S}_n).$$

Falls wir nun zeigen können, daß

$$\text{MV}(P, \mathcal{S}_n, \dots, \mathcal{S}_n) = \text{deg}(f) = \text{MV}(Q, \mathcal{S}_n, \dots, \mathcal{S}_n),$$

so folgt die Behauptung.

LEMMA 9. $\text{MV}(Q, \mathcal{S}_n, \dots, \mathcal{S}_n) = \text{deg}(f)$.

BEWEIS. Es ist

$$\begin{aligned} \text{MV}(Q, \mathcal{S}_n, \dots, \mathcal{S}_n) &= \text{MV}(\deg(f) \cdot \mathcal{S}_n, \mathcal{S}_n, \dots, \mathcal{S}_n) \\ &= \deg(f) \text{MV}(\mathcal{S}_n, \dots, \mathcal{S}_n) \\ &= \deg(f) \mathcal{V}(\mathcal{S}_n) \\ &= \deg(f). \end{aligned}$$

□

LEMMA 10. $\text{MV}(P, \mathcal{S}_n, \dots, \mathcal{S}_n) = \deg(f)$.

BEWEIS. Wir können hier den Satz 5 anwenden. Dazu verschieben wir als erstes P um $-\mathbf{p}_0$, erhalten also, daß $\mathbf{0} \in \text{conv}(\mathbf{0}, \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0)$. Die Facetten von \mathcal{S}_n sind

$$\begin{aligned} F_0 &= \text{conv}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \\ F_i &= \text{conv}(\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \dots, \hat{\mathbf{e}}_i, \dots, \mathbf{e}_n) \quad \text{für } i \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Die zugehörigen äußeren Normalen sind

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0 &= \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \dots, 1) \\ \mathbf{u}_i &= -\mathbf{e}_i \quad \text{für } i \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Für den Schnitt der Stützebene $H_P(\mathbf{u}_i)$ mit P ergibt sich $\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0$ für $i \in \{0, \dots, n\}$. Somit ist

$$\begin{aligned} h_P(\mathbf{u}_0) &= 0 \\ h_P(\mathbf{u}_i) &= -(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0)_i = p_{0i} - p_{ii} = p_{0i} \\ &\quad \text{für } i \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Also ist nach Satz 5

$$\begin{aligned} \text{MV}(P, \mathcal{S}_n, \dots, \mathcal{S}_n) &= \sum_{i=0}^n h_P(\mathbf{u}_i) \mathcal{V}_{n-1}(F_i) \\ &= 0 \cdot \mathcal{V}(F_0) + \sum_{i=1}^n p_{0i} \cdot 1 \\ &= \sum_{i=1}^n p_{0i} \\ &= \deg(f). \end{aligned}$$

□

Aus diesen beiden Lemmas ergibt sich nun Satz 20.

ANHANG A

Notationen

Konventionen:

Fett steht für ein n -Tupel, zB. \mathbf{x} für (x_1, \dots, x_n) .

n	Anzahl der Unbekannten, Dimension
P, Q	Polytope
F, G	Seiten von Polytopen
$h_P(\mathbf{u})$	Stützfunktion von P in Richtung \mathbf{u}
$H_P(\mathbf{u})$	Stützebene von P in Richtung \mathbf{u}
f, g	(Laurent-) Polynome
$Z(f)$	Nullstellenmenge von f
$\mathbb{C}[\mathbf{X}]$	Polynomring in \mathbf{X}
$\mathbb{C}\langle\mathbf{X}\rangle$	Laurentpolynomring in \mathbf{X}
i, j, k, l	Indizes
A	endliche Teilmenge von \mathbb{Z}^n (Menge der Exponenten)
E	ganzzahlige Matrix (Exponentenmatrix)
H, U	Hermitesche Normalform von E mit $U \cdot E = H$ (mit $U \in \mathcal{O}(\mathbb{Z}, n)$)
m	Anzahl der Elemente von A
X, Y, T	Unbekannte
\mathbb{C}^A	$\{\sum_{\alpha \in A} c_\alpha \mathbf{X}^\alpha : c_\alpha \in \mathbb{C}\}$
\mathfrak{T}^n	n -dimensionaler, algebraischer Torus $(\mathbb{C}^*)^n$
D_A	Vielfaches der Resultante
l	Gerade
$\mathcal{L}(\mathbf{f})$	Anzahl der Nullstellen eines $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^A$
$\mathcal{L}(\mathbf{A})$	Anzahl der Nullstellen eines generischen $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^A$
α, β	Elemente von \mathbb{Z}^n (Exponenten)
\mathbf{u}, \mathbf{r}	Elemente von \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{Q}^n (Richtungen)
\mathbf{p}, \mathbf{q}	Elemente von \mathbb{R}^n (Ecken von Polytopen)
\mathbf{x}, \mathbf{y}	Elemente von \mathbb{C}^n oder \mathbb{P}^n
\mathbf{e}_i	i -ter Standardbasisvektor
a, b, c	Koeffizienten
γ	Kurve in \mathbb{C}^n

Literaturverzeichnis

- [1] Bernstein, D. N. The Number of Roots of a System of Equations. *Functional Analysis and its Applications*, 9(2):183–185, 1984.
- [2] Bonnesen, T. und Fenchel, W. *Theorie der konvexen Körper*. Chelsea Publishing Company, Bronx, New York, 1971.
- [3] Casas-Alvero, E. *Singularities of Plane Curves*. Cambridge University Press, 2000.
- [4] Cox, D., Little, J. und O’Shea, D. *Using Algebraic Geometry*. Springer Verlag, 2005.
- [5] Ewald, G. *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*. Springer Verlag, 1996.
- [6] Gel’fand, I. M., Kapranov, M. M. und Zelevinsky, A.V. *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*. Birkhäuser, Boston, 1994.
- [7] Huber, B. und Sturmfels, B. A Polyhedral Method for Solving Sparse Polynomial Systems. *Mathematics of Computation*, 64:1541–1555, 1995.
- [8] Huber, B. und Sturmfels, B. Bernstein’s Theorem in Affine Space. *Discrete and Computational Geometry*, 17:137–141, 1997.
- [9] Li, T.Y. und Wang, X. The BKK Root Count in \mathbb{C}^n . *Mathematics of Computations*, 65(216):1477–1484, 1996.
- [10] Maurer, J. Puiseux Expansions for Space Curves. *Manuscripta Mathematica*, 32:91–100, 1980.
- [11] Rojas, J. M. Why Polyhedra Matter in Non-Linear Equation Solving. *Contemporary Mathematics*, 334:293–320, 2003.
- [12] Rojas, J. M. und Wang, X. Counting Affine Roots Via Pointed Newton Polytopes. *Journal of Complexity*, 12:116–133, 1996.
- [13] Shavarevich, I.R. *Basic Algebraic Geometry 1: Varieties in Projective Space*. Springer Verlag, 1994.
- [14] Verschelde, J., Verlinden, P. und Cools, R. Homotopies Exploiting Newton Polytopes for Solving Sparse Polynomial Systems. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 31(3):915–930, 1994.
- [15] Ziegler, G. M. *Lectures on Polytopes*. Springer Verlag, 1995.