'power law logistic function'

1 a $\frac{dU}{dT} = U - U^{(s+1)}$ Ratengleichung

bei folgenden Substitutionen: 1b

$\boxed{U = \frac{N}{N_\infty}}$ bzw. $\boxed{U = \frac{Y}{Y_\infty}}$ und $\boxed{T = a \cdot t}$

t, T ... Zeit

$\boxed{U_\varphi = \frac{Y_\varphi}{Y_\infty}}$

$\boxed{n = s+1 \text{ und } s = n-1}$

Es sind:
N, N_∞ im Falle von Populationswachstum
Y_0, N_∞ ... Carrying capacity

2 $\frac{dU}{dT} - U = -U^{\overset{n}{(s+1)}}$

3a $U' - U = -U^n$

(Anm.: U' ... erste Ableitung)

3b a $z = U^{1-n} = U^{-s}$ (Substitutionen)

b $\frac{dz}{dU} = z' = (1-n)\, U^{-n} \cdot U'$

c $U' = \frac{dz}{dU} \cdot \frac{1}{(1-n)\, U^{-n} \cdot 1}$

3c $U' - U = -U^n \;\Big|\cdot U^{-n}$

3d $U' \cdot U^{-n} - U^{(1-n)} = -1$

4a $\frac{dz}{dU} \cdot \frac{1}{(1-n)\, U^{-n}} \cdot U^{(-n)} - U^{(1-n)} = -1 \;\Big|\; (1-n)$ Multiplikation d. Gleichung mit

4b $z' - (1-n) \cdot z = -(1-n)$

4c $\boxed{z' + (n-1) \cdot z = (n-1)}$ Bernoulli DG

I.F.

5 'integrating factor': (integrierender Faktor) $e^{(n-1)\int dT} = e^{(n-1) \cdot T} \hat{=} IF$

6a $\quad \mathbb{F}\cdot z' + (n-1)\cdot \mathbb{F}\cdot z = (n-1)\cdot \mathbb{F}$

6b $\quad \underbrace{e^{(n-1)T}}_{v}\cdot \underbrace{z'}_{u'} + \underbrace{(n-1)\cdot e^{(n-1)T}}_{v'}\cdot \underbrace{z}_{u} = (n-1)\cdot e^{(n-1)\cdot T}$

6c $\quad \Big[\underbrace{e^{(n-1)T}\cdot z}_{(u\cdot v)'}\Big]' = (n-1)\cdot e^{(n-1)\cdot T}$

Konstante d. Integration

Erweiterung: Multiplikation mit:

7 $\quad e^{(n-1)T}\cdot z = (n-1)\int e^{(n-1)\cdot T}\cdot dT = e^{(n-1)\cdot T} + C \quad \Big| \; e^{-(n-1)\cdot T} = e^{(1-n)\cdot T}$

8a $\quad z = 1 + c\cdot e^{(1-n)\cdot T}$

8b $\quad U^{(1-n)} = 1 + c\cdot e^{(1-n)\cdot T}$

8c $\quad U = \left[1 + c\cdot e^{(1-n)\cdot T}\right]^{\left(\frac{1}{1-n}\right)}$

Anm.: es gilt ja $s = n-1$ und $-s = 1-n$

8d $\quad U = \left[1 + c\cdot e^{-s\cdot T}\right]^{\left(-\frac{1}{s}\right)}$

9 Ermitteln d. Konstante c: bei $T = \emptyset$

9a $\quad U_\emptyset^{(1-n)} = 1 + c \quad \Rightarrow$

9b $\quad \boxed{c = U_\emptyset^{(1-n)} - 1 = U_\emptyset^{-s} - 1}$

10 'Power logistic'-Wachstumsgleichung $\Rightarrow$ MODELL-GLEICHUNG

$$\boxed{U_i = \left[1 + (U_\emptyset^{-s} - 1)\cdot e^{-s\cdot T_i}\right]^{\left(-\frac{1}{s}\right)} = \left[1 + (U_\emptyset^{-s} - 1)\cdot e^{-s\cdot a\cdot t_i}\right]^{\left(-\frac{1}{s}\right)}}$$

Anm. mit U_i und T_i, t_i individualisiert

11 Carrying Capacity:

Von der Rate ausgehend $\frac{dU}{dT} = \phi = U - U^{(s+1)} \rightarrow U^{(s+1)} = U$ für den Fall, daß $\boxed{T \to \infty}$

und $\boxed{U \stackrel{!}{=} U_\infty = 1}$ und da gilt $\boxed{U = \frac{y}{y_\infty}} \rightarrow U_\infty = 1 = \frac{y}{y_\infty}$ und $y = y_\infty$ für $T \to \infty$

12 Ausdrücken nach der Zeit: A

12a $U^{-s} = 1 + (U_\phi^{-s} - 1) \cdot e^{-s \cdot T}$

12b $(U_\phi^{-s} - 1) \cdot e^{-s \cdot T} = U^{-s} - 1$

12c $e^{-s \cdot T} = \frac{(U^{-s} - 1)}{(U_\phi^{-s} - 1)}$ bzw. 12d $e^{s \cdot T} = \frac{(U_\phi^{-s} - 1)}{(U^{-s} - 1)}$

12e $s \cdot T = \ln\left[\frac{(U_\phi^{-s} - 1)}{(U^{-s} - 1)}\right]$ bei $T = at$ gilt:

12f $T = \frac{1}{s} \cdot \ln\left[\frac{(U_\phi^{-s} - 1)}{(U^{-s} - 1)}\right]$

12g $\boxed{t = \frac{1}{a \cdot s} \cdot \ln\left[\frac{(U_\phi^{-s} - 1)}{(U^{-s} - 1)}\right]}$

Modellgleichung nach der Zeit ausgedrückt

13 Ausdrücken nach der Zeit B:

13a $U^{-s} = \left(\frac{y}{y_\infty}\right)^{-s} = 1 + \left[\left(\frac{y_\phi}{y_\infty}\right)^{-s} - 1\right] \cdot e^{-sT}$

13b $y^{-s} = y_\infty^{-s} + \left[y_\phi^{-s} - y_\infty^{-s}\right] \cdot e^{-sT}$

13c $$y^{-s} - y_\infty^{-s} = \left[y_\phi^{-s} - y_\infty^{-s}\right] \cdot e^{-s \cdot T}$$

13d $$e^{sT} = \frac{-\left[y_\infty^{-s} - y_\phi^{-s}\right]}{-\left[y_\infty^{-s} - y^{-s}\right]}$$

oder: $$e^{sT} = e^{s \cdot at}$$

13e $$\boxed{t = \frac{1}{a \cdot s} \cdot \ln\left[\frac{\left(y_\infty^{-s} - y_\phi^{-s}\right)}{\left(y_\infty^{-s} - y^{-s}\right)}\right]}$$

Sonderfälle des Modells

A) Logistische Funktion: $\boxed{s=1}$

1a $$V = \left[1 + \left(U_\phi^{-1} - 1\right) \cdot e^{-T}\right]^{-1}$$

1b $$\frac{y}{y_\infty} = \frac{1}{1 + \left(U_\phi^{-1} - 1\right) \cdot e^{-at}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y_\infty}{y_\phi} - 1\right) \cdot e^{-at}}$$

2 $$\boxed{y = \frac{y_\infty}{1 + \left(\frac{y_\infty}{y_\phi} - 1\right) \cdot e^{-at}}}$$: logistische Funktion

(B) 'confined exponential function': $\boxed{\delta = -1}$

(1a) $U = \left[1 + (U_\phi - 1)\cdot e^{T}\right] \Rightarrow$ (1b) $\frac{y}{y_\infty} = \left[1 + \left(\frac{y_\phi}{y_\infty} - 1\right)\cdot e^{at}\right]$

(2a)
$$\boxed{y = y_\infty + (y_\phi - y_\infty)\cdot e^{at} = y_\infty - (y_\infty - y_\phi)\cdot e^{at}}$$

confined exponential function

(C) v. Bertalanffy-Funktion: $\boxed{\delta = -\frac{1}{3}}$

(1a) $U = \left[1 + (U_\phi^{\frac{1}{3}} - 1)\cdot e^{\frac{1}{3}at}\right]^3 =$ (1b) $\left\{1 + \left[\left(\frac{y_\phi}{y_\infty}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right]\cdot e^{\frac{a}{3}t}\right\}^3$

(2a) $U = \frac{y}{y_\infty}$; (2b)
$$\boxed{y = y_\infty \cdot \left\{1 - \left[1 - \left(\frac{y_\phi}{y_\infty}\right)^{\frac{1}{3}}\right]\cdot e^{\frac{a}{3}t}\right\}^3}$$

L.v. Bertalanffy-Funktion (klassische Form)