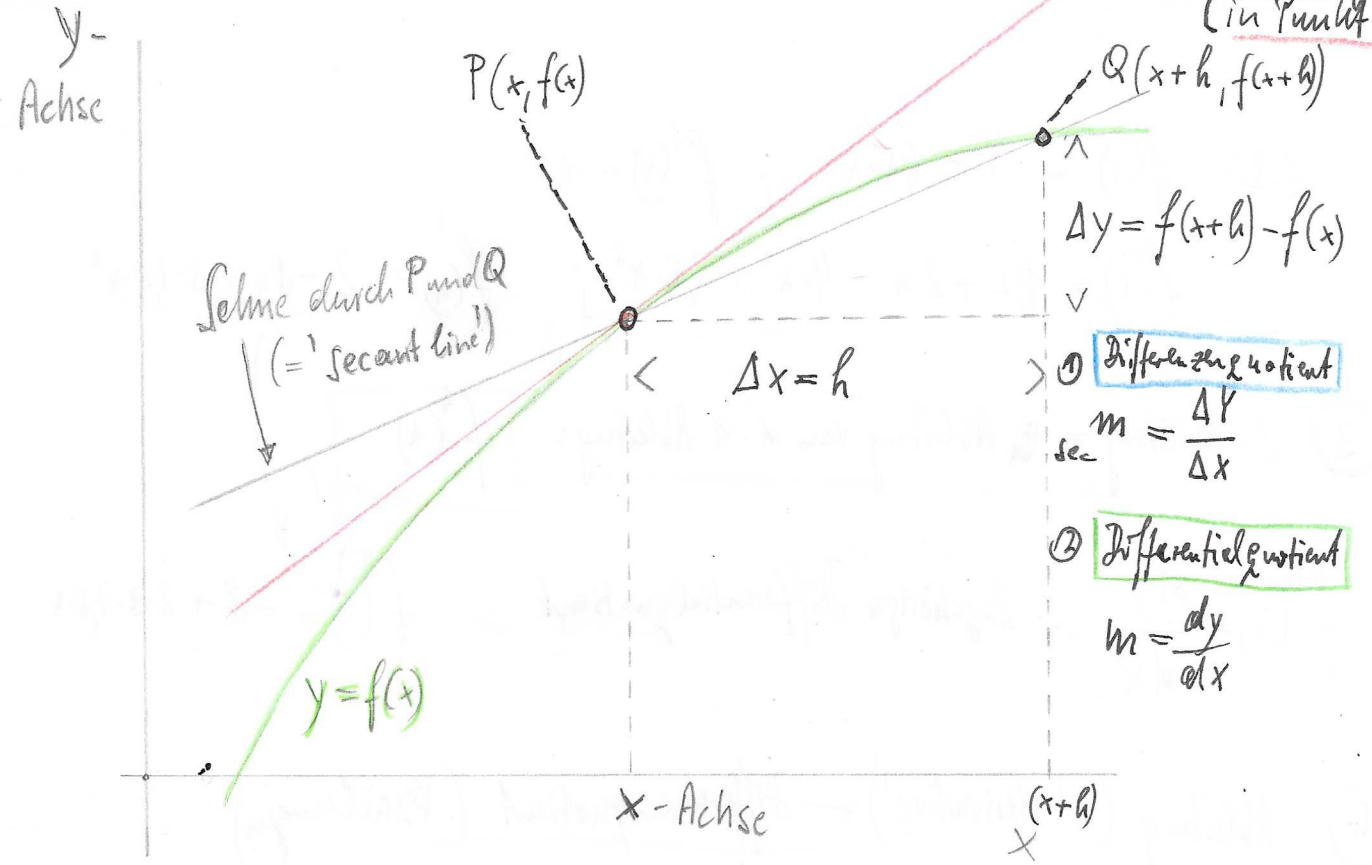
II

Differentialrechnung – Differenzenrechnung

$f'(x)$ ('slope') ① Steigung d. Tangente in Punkt P



① Differenzenquotient

$$_{sec}m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

② Differentialquotient

$$m = \frac{dy}{dx}$$

① **Differenzenquotient:** (='difference quotient')

$$_{sec}m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Δy ... Inkrement in y; Δx ... Inkrement in x

a) $$_{sec}m(h) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ÜBERGANG zu Differentialquotient

b) wenn sich Q entlang f(x) in Richtung P bewegt, wird h immer kleiner und schließlich gilt:

$$m = \lim_{h \to 0} m(h) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

② 1. Ableitung von f(x), Steigung in Punkt P: ⟺ **Differentialquotient:** $m = \frac{dy}{dx}$

(Ableitung ≙ 'derivative') (='differential quotient')

dy: Differential y; dx: Differential x

$$m \mathrel{\hat{=}} f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

d.h. Tangente und Sekante fallen zusammen

Der Vorgang, die Ableitung einer Funktion zu bilden wird **Differenzieren** (= 'differentiation') genannt.

z.B.: $f(x) = 4 + 1{,}5 \cdot x$; $f'(x) = 1{,}5$

$f(x) = 0{,}2 + 2 \cdot x - 4 \cdot x^2 + 7{,}5 \cdot x^3$; $f'(x) = 2 - 8x + 3 \cdot 7{,}5 \cdot x^2$

③ 2. Ableitung = Ableitung von d. 1. Ableitung: $\boxed{f''(x)}$;

oder $f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$ ... zugehöriger Differentialquotient

$f''(x) = -8 + 2 \cdot 3 \cdot 7{,}5 \cdot x$

④ Übernahme von Differenzenquotient und Differentialquotient zur Modellierung von WACHSTUMSVORGÄNGEN:

Wachstumsgeschwindigkeit ('velocity')

RATE, WACHSTUMSRATE ('Growth rate')

als Darstellung der Systemveränderung in Abhängigkeit von der Zeit (t)

Wachstumsbeschleunigung ('acceleration')

Darstellung der System-Geschwindigkeitsveränderung in Abh. von d. Zeit.

Gleichsetzungen für die MODELLIERUNGEN

5a) $\frac{\Delta s}{\Delta t}; \frac{ds}{dt}$ →

a) $\boxed{f'(t) = \frac{ds}{dt} = v}$ (1. Ableitung) ---- Geschwindigkeit ('velocity')

b) $\boxed{\frac{\Delta s}{\Delta t} = \bar{v}}$ --- Durchschnittsgeschwindigkeit (mittlere Geschwindigkeit)

$f(t)$ .... Wachstumsfunktion, Modellfunktion ('growth function')
s ... Elementsvariable, Variable eines Systemelements (z.B. Länge eines wachsenden Organs)

5b) $\frac{\Delta v}{\Delta t}; \frac{dv}{dt}$

a) $\boxed{f''(t) = \frac{dv}{dt} = a}$ (2. Ableitung) --- Beschleunigung ('acceleration')

oder $f''(t) = \frac{d^2 s}{dt^2}$

b) $\boxed{\frac{\Delta v}{\Delta t} = \bar{a}}$ mittlere Beschleunigung

---

6 Wachstumsmodelle:

z.B. Populationswachstum: N --- Anzahl d. Individuen pro Generation, t -- Zeit

a) $\frac{dN}{dt}$ ----- absolute Wachstumsrate ≙ 1. Ableitung (= 'Geschwindigkeit')
(= 'growth rate')

b) $\frac{\frac{dN}{dt}}{N} = \frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dt}$ --- relative Wachstumsrate (= 'relative Geschwindigkeit')
('rel. growth rate')

(nur im Fall d. Exponentialmodells → spezifische Wachstumsrate)

7 Ein einfaches Beispiel zur Erläuterung der Übertragung auf WACHSTUMSMODELLIERUNGEN

(a) – geg. ist ein Bankguthaben, das am Beginn mit y_0 vorliegt
– es wäre eine Zinsesverzinsung zum Satz von 5% vereinbart

Ansatz

DIFFERENZENGLEICHUNG;
– DIFFERENZENQUOTIENT

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + 0{,}05 \cdot y_n = y_n \cdot 1{,}05}$$

y_n ... Guthaben zum Zeitpunkt n

y_{n+1} -- Guthaben zum Zeitpunkt (n+1)

! eine ITERATIONSFÄHIGE Gleichung !

wenn man annimmt, daß jährlich verzinst wird → $\Delta t = 1$
und $\Delta Y = 0{,}05 \cdot y_n$ →

→ somit ergibt sich als

$\boxed{\text{Differenzenquotient}}$ $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$

DISKRETE MODELLIERUNG

Ansatz

DIFFERENTIALGLEICHUNG,
DIFFERENTIALQUOTIENT

$$f(t) = \boxed{y_n = y_0 \cdot 1{,}05^n = y_0 \cdot 1{,}05^{t=n}}$$

eine autonome Differentialgleichung 1. Ordnung (= DG 1. Ordnung)
≙ Zinseszinsgleichung

es gelten ferner

(a) $\boxed{f(t) = y_n = y_0 \cdot e^{g \cdot t}}$ ... growth coefficient

'seed'

WACHSTUMS-MODELL

(b) $f'(t) = \frac{dy}{dt} = y_0 \cdot g \cdot e^{gt} = g \cdot y$

$\boxed{\text{Differentialquotient}}$ absolute Rate

(c) es läßt sich umformen:
g im Beispiel → $g = \ln 1{,}05$

$$y = y_0 \cdot e^{g \cdot t} = y_0 \cdot e^{\ln 1{,}05 \cdot t} = y_0 \cdot 1{,}05^t$$

KONTINUIERLICHE MODELLIERUNG