NG1

NORMALGLEICHUNGSSYSTEM – Allgemeine Erläuterung

A

Zur Berechnung d. Parameterwerte für das Modell der multiplen linearen Regression.

Darstellung am Beispiel mit 1 Kriterium (Y) und 2 Prädiktoren (X_1, X_2)

1 Das MODELL: $\hat{Y}_i = b_\phi + b_1 \cdot_i X_1 + b_2 \cdot_i X_2$; $Y_i = \hat{Y}_i + \epsilon_i$

ϵ_i ... Residuen

Infinitesimalansatz nach der METHODE DER KLEINSTEN QUADRATE (= M. of. LEAST SQUARE)

2 $\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \rightarrow \min$, d.h. $\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2 \rightarrow \min$

Anm.: $\sum$ ... Kurzschreibweise für $\sum_{i=1}^{n}$

3 $\sum_{i=1}^{n} (Y_i - b_\phi - b_1 \cdot_i X_1 - b_2 \cdot_i X_2)^2 = \boxed{SQU} \rightarrow \min$

mit Nullsetzen als Minimierungs-bedingung

4

1. gl. $\frac{\partial SQU}{\partial b_\phi} = 2 \sum (Y_i - b_\phi - b_1 \cdot_i X_1 - b_2 \cdot_i X_2) \cdot (-1) = \emptyset$

2. gl. $\frac{\partial SQU}{\partial b_1} = 2 \cdot \sum (Y_i - b_\phi - b_1 \cdot_i X_1 - b_2 \cdot_i X_2) \cdot (-\cdot_i X_1) = \emptyset$

3. gl. $\frac{\partial SQU}{\partial b_2} = 2 \cdot \sum (Y_i - b_\phi - b_1 \cdot_i X_1 - b_2 \cdot_i X_2) \cdot (-\cdot_i X_2) = \emptyset$

NG2

Vereinfachungen, Weiterentwicklung des $\boxed{\text{Normalgleichungssystems (NGS)}}$

5

1. Gl. $$-\sum Y_i + n \cdot b_\phi + b_1 \cdot \sum_i X_1 + b_2 \cdot \sum_i X_2 = \emptyset$$

2. Gl. $$-\sum Y_i \cdot X_1 + b_\phi \sum_i X_1 + b_1 \cdot \sum_i X_1^2 + b_2 \cdot \sum_i X_1 \cdot X_2 = \phi$$

3. Gl. $$-\sum Y_i \cdot X_2 + b_\phi \cdot \sum_i X_2 + b_1 \cdot \sum_i X_1 \cdot X_2 + b_2 \cdot \sum_i X_2^2 = \phi$$

6

1. Gl. $$n \cdot b_\phi + b_1 \cdot \sum_i X_1 + b_2 \cdot \sum_i X_2 = \sum Y_i$$

2. Gl. $$b_\phi \cdot \sum_i X_1 + b_1 \cdot \sum_i X_1^2 + b_2 \cdot \sum_i X_1 \cdot X_2 = \sum Y_i \cdot X_1$$

3. Gl. $$b_\phi \cdot \sum_i X_2 + b_1 \cdot \sum_i X_1 \cdot X_2 + b_2 \sum_i X_2^2 = \sum Y_i \cdot X_2$$

7 Das obige Gleichungssystem (linear) von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten (b_ϕ, b_1 und b_2) ist zu lösen.

NG3

B

NORMALGLEICHUNGSSYSTEM für den speziellen Fall der einfach linearen Regression.

(1) Das MODELL: $\boxed{\overset{1}{Y}_i = b_0 + b_1 \cdot X_i \; ; \; Y_i = \overset{1}{Y}_i + \epsilon_i}$

Infinitesimalansatz nach der Methode d. kleinsten Quadrate

(2) $$\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \overset{1}{Y}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2 \rightarrow \min$$

Anm.: $\sum \ldots$ Kurzschreibweise für $\sum_{i=1}^{n}$

(3) $$\sum \left(Y_i - b_0 - b_1 \cdot X_i\right)^2 = \boxed{SQU}$$

mit Nullsetzen als Minimumsbedingung

(4)

1. Gl. $$\frac{\partial SQU}{\partial b_0} = 2 \cdot \sum \left(Y_i - b_0 - b_1 \cdot X_i\right) \cdot (-1) = \emptyset$$

2. Gl. $$\frac{\partial SQU}{\partial b_1} = 2 \cdot \sum \left(Y_i - b_0 - b_1 \cdot X_i\right)(-X_i) = \emptyset$$

Vereinfachung, Weiterentwicklung d. Normalgleichungssystems (NGS)

(5)

1. Gl. $$-\sum Y_i + n \cdot b_0 + b_1 \cdot \sum X = \emptyset$$

2. Gl. $$-\sum Y_i \cdot X + b_0 \cdot \sum X + b_1 \cdot \sum X^2 = \emptyset$$

NG4

6
$$\begin{cases} \text{1. Gl.} & n \cdot b_0 + b_1 \cdot \sum_i x = \sum Y_i \\ \text{2. Gl.} & b_0 \cdot \sum_i x + b_1 \cdot \sum_i x^2 = \sum Y_i \cdot x \end{cases}$$

7 Auflösung d. linearen Gleichungssystem von 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten (b_0, b_1).

8 Durch Umformen d. 1. Gl. gilt:

$$\text{1. Gl.} \quad b_0 + b_1 \cdot \bar{x} - \bar{Y} = 0$$

9
$$\begin{cases} \text{1. Gl.} & -b_0 \cdot \sum_i x - b_1 \cdot \bar{x} \cdot \sum_i x + \bar{Y} \cdot \sum_i x = 0 \\ \text{2. Gl.} & b_0 \cdot \sum_i x + b_1 \cdot \sum_i x^2 - \sum Y_i x = 0 \end{cases}$$

10
$$b_1 \left(\sum_i x^2 - \bar{x} \cdot \sum_i x \right) + \left(\bar{Y} \cdot \sum_i x - \sum_i Y_i x \right) = 0$$

11
$$b_1 \left(\sum_i x^2 - \bar{x} \cdot \sum_i x \right) = + \sum_i Y_i x - \bar{Y} \cdot \sum_i x$$

STEIGUNG 12
$$b_1 = \frac{\left(\sum_i Y_i x - \bar{Y} \sum_i x \right)}{\left(\sum_i x^2 - \bar{x} \cdot \sum_i x \right)} = \frac{SP_{xY}}{SQ_x} = \frac{S_{xY}}{S_{xx}}$$

13
Schließlich erhält man $\boxed{b_0 = \bar{Y} - b_1 \cdot \bar{x}}$ ORDINATENABSTAND