Matrizen – Vektoren

① Matrix:

Def.: (a) Eine M. ist ein System von Zahlen (Elementen), die in m Zeilen und n Spalten angeordnet sind (nach einem Rechteckschema)

(rows)

'columns'

Hauptdiagonale d. M. ('main diagonal')

(b) z.B.: $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ od. $A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

bezeichnet mit großen, fettgedruckten lateinischen Buchstaben od. griechischen

in eckigen od. runden Klammern

oder A^T – transponiert

② Transponierte Matrix:

A' ist d. transponierte M. zu A

in A' sind Zeilen und Spalten vertauscht

③ Symmetrische M.

ist eine M. quadratisch, d.h. Zeilenzahl = Spaltenzahl, und ferner $A = A'$, so heißt M. symmetrisch

z.B. [Varianz-Kovarianz M., Korrelationsm.! sehr wichtige Matrixform]

(4) **Diagonalmatrix:**

= Eine quadratische Matrix, in welcher alle Elemente, die außerhalb d. Hauptdiagonale liegen den Wert "0" besitzen.

z.B. $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_3 & \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_m \end{bmatrix}$ (Lambda)

od. $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$ z.B. eine Eigenwertsmatrix

(5) **Identitätsmatrix:** ('identity matrix')

= eine Diagonalmatrix, in deren Hauptdiagonale als Werte nur die "1" vorkommt.

z.B.: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ ('identity matrix')

(5) **Einheitsmatrix:** = eine quadr. Matrix mit jeweils Wert von "1" für jedes Element

z.B.: $U = E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ('unity matrix')

(6) **Spur einer M** [≙ trace]

= Summe aller Hauptdiagonalelemente

$\text{tr}\,A = \text{Sp}\,A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 3+1+6 = 10$ z.B.

[sehr wichtig für die Berechnung d. Gesamtvarianz einer Var.-Kov.-Matrix ('total variance')]

7 Matrizenaddition (Addition von Matrizen)

(LANDE 1979)

z.B. $P = G + E$ ---- nichtaddit. genotyp. + Umwelteinfluß

P: phänotypische Varianzkovarianzmatrix

G: additiv genotypische Var.kov.M.

$\cancel{G = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}01 \\ 0{,}01 & 0{,}5 \end{bmatrix}}$ $\cancel{E = \begin{bmatrix} 0{,}2 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}3 \end{bmatrix}}$

z.B.:

$$G = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}1 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 0{,}2 & -0{,}55 \\ -0{,}55 & 0{,}3 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1{,}0 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}4 \end{bmatrix}$$

8 Matrizenmultiplikation:

a) Multiplikation mit einem $\boxed{\text{Skalar}}$:

z.B.: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \boxed{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

Skalar

b)

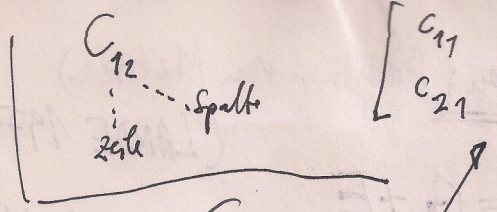
z.B. $A \cdot B$ $\qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = C$$

bg. „Nullmatrix"

in C ist → Zeilenzahl von A
→ Spaltenzahl von B

Rechenschema:



(c)

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}} \cdot \underset{B}{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}} = \underset{C}{\begin{bmatrix} a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} + a_{13}\cdot b_{31} & a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}\cdot b_{22} + a_{13}\cdot b_{32} \\ a_{21}\cdot b_{11} + a_{22}\cdot b_{21} + a_{23}\cdot b_{31} & a_{21}\cdot b_{12} + a_{22}\cdot b_{22} + a_{23}\cdot b_{32} \end{bmatrix}}$$

c_{ij} – Zeile von A – Spalte von B

es gilt allgemein: das Glied c_{ij} ergibt sich aus der Summe d. Glieder der i-ten Zeile in A mit der j-Spalte in B !

(d) im allgemeinen ist $A \cdot B$ nicht vertauschbar, d.h. $A \cdot B \neq B \cdot A$

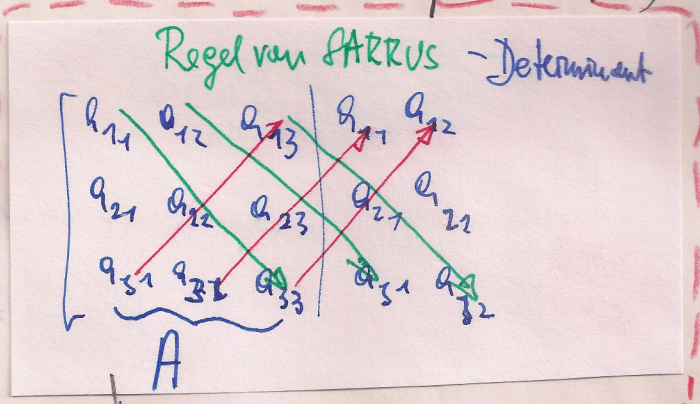
↓ d.h. nichtkommutativ !

multipliziert man von links nach rechts ≙ Prämultiplikation (premultiplied)

— " — man von rechts nach links ≙ Postmultiplikation (postmultiplied)

z.B. $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

bzw. $B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$



(9) **Determinante einer M.:**

z.B. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad \det A = |A| = 12$

$$\det A = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} - a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11} - a_{33}\cdot a_{21}\cdot a_{12}$$

für eine Diagonalmatrix läßt sich d. Determinantenwert leicht berechnen, indem das Produkt d. Diagonalelemente gebildet wird: $\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

(10) **Inverse einer M.:**

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \qquad \det A^{-1} = \frac{1}{12}$$

(a)

ad (10)

(b) es gilt: $A \cdot A^{-1} = I$ -- identity matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) Voraussetzung für eine Inverse ist, dass die Ausgangsmatrix → quadratisch, → nichtsingulär } ist

(d) Werte einer Inversen:

– wenn eine Diagonalmatrix vorliegt, genügt es zur Berechnung der Inversen die Kehrwerte d. Hauptdiagonalelemente d. Ausgangsmatrix zu berechnen

z.B. (siehe oben)

– Wert der Determinante einer Inversen

→ $\boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}}$ → z.B. $\det A = 12$

→ $\det A^{-1} = \frac{1}{12}$

11 Vektor:

~~a)~~ – Ein V. ist ein Sonderfall einer M.

Def.: = eine Matrix, die nur aus einer einzigen Spalte od. Zeile besteht

12 Formen von Vektoren:

~~b)~~ Spaltenvektor – Zeilenvektor

z.B. $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad X' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ od. $X' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ od. $X^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$

auch als $\vec{x}$ geschrieben

13 Skalarprodukt:

Multiplikation zweier Vektoren: $a'b = |a| \cdot |b| \cdot \cos\alpha$

z.B.: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11$

Aber!

Achtung! es gilt aber!

$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

dyadisches Produkt zweier Vektoren

14 Orthogonalität zweier Vektoren:

z.B.: Zwei Vektoren heißen orthogonal, wenn gilt:

$a'b = 0$

z.B. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 6 - 6 = 0$ $\quad \cos\alpha = \dfrac{a' \cdot b}{|a| \cdot |b|} = 0$

bei $\alpha = 90°$!

aufeinander normal stehende Vektoren

15 Betrag eines Vektors:

$|a| = \sqrt{a'a}$ ... ist die positive Quadratwurzel aus dem Skalaren Produkt eines Vektors mit sich selbst.

16 a) Einheitsvektor: (normierter Vektor)

es gilt: $|\underline{e}_e| = 1$

$$\underline{e}_e = \frac{\underline{e}}{|\underline{e}|} \cdot \underline{1}$$

z.B. $\underline{e} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; $|\underline{e}| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$$\underline{e}_e = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} \\ -\frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

16b Einsvektor:

z.B. $\underline{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

---

17 Einsatzbereiche d. Matrizen u. Vektorrechnung

- quantitative Genetik
- Diskriminanzanalyse
- PCA, Faktorenanalyse, Eigenwertberechnung

z.B. Berechnung von Mahalanobisdistanz

$D = \underline{d}' \; S^{-1} \; \underline{d}$

$$(2 \;\; 1) \begin{bmatrix} 3 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 1{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}1 & 1{,}7 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 13{,}9$$

$\underline{d}$: Entfernung eines Merkmalsvektors vom Gruppencentroid

S^{-1}: Var-kov-Matrix

z.B.: quantitative Genetik:

$$\Delta \bar{z} = G \cdot P^{-1} \cdot s$$

- $\Delta \bar{z}$: Response (Vektor)
- G: add. genet. VAR-KOV. (Matrix)
- P^{-1}: Inverse d. phän. VAR-KOV. (Matrix)
- s: Selektionsdifferential (Vektor)