11

Beispiel für das Modell der logistischen Funktion (Sättigungs- und Abklingfunktion)

L09

(a) Gegeben sind: $y_\infty = 80;\ y_0 = 2;\ \alpha \hat{=} 0{,}52337;\ t_m = 7d$

Sättigungsfunktion

das Modell: (allg.)
$$f(t) = y(t) = \frac{y_\infty}{1 + \left(\frac{y_\infty}{y_0} - 1\right) \cdot e^{-\alpha t}} = \frac{y_\infty}{1 + e^{-\alpha(t - t_m)}}$$

das Modell: (speziell)
$$\boxed{f(t) = y(t) = \frac{80}{1 + 39 \cdot {}^{-0{,}52337 \cdot t}}}$$

Abklingfunktion

Modell (allg.): $f_a(t) = y_\infty - y(t)$

Mittelwert:
$$t_m = \frac{1}{\alpha} \cdot \ln\left(\frac{y_\infty}{y_0} - 1\right)$$

speziell: $t_m = \frac{1}{0{,}52337} \cdot \ln(39) \approx 7$

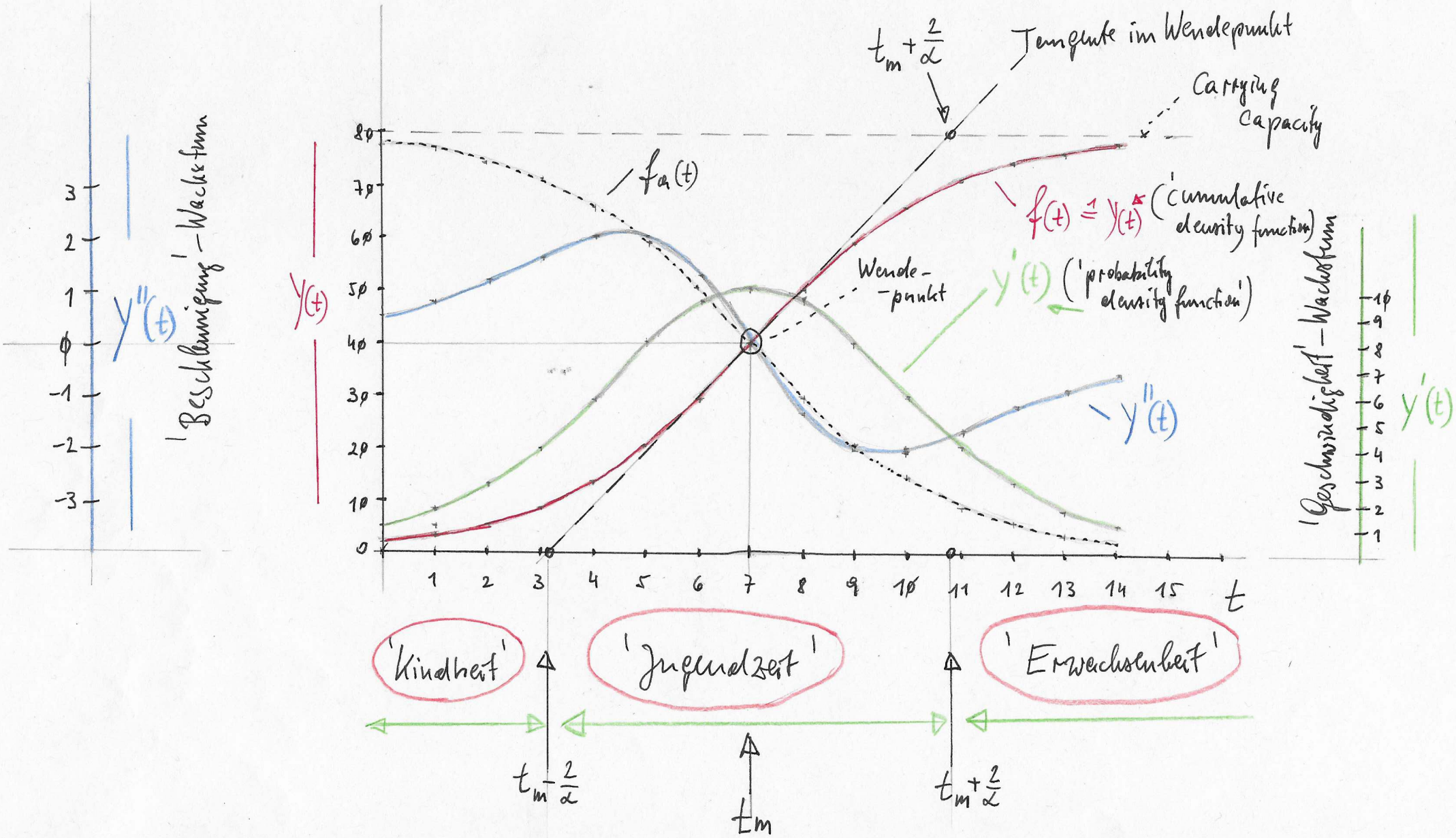
(b) Beispieldatenpunkte:

$t(d)$	$y(t)$	$y'(t)$	$y''(t)$	$f_a(t)$	logit
0	2	1,02	0,507	78	−3,664
1	3,32	1,67	0,802	76,68	−3,14
2	5,45	2,66	1,203	74,55	−2,616
3	8,78	4,09	1,671	71,22	−2,093
4	13,77	5,97	2,049	66,22	−1,57
5	20,79	8,05	2,024	59,21	−1,05
6	29,765	9,78	1,31	50,23	−0,523
$t_m = 7$	40,–	10,47	0	40,–	0
8	50,23	9,78	−1,31	29,77	0,523
9	59,21	8,05	−2,024	20,79	1,05
10	66,22	5,97	−2,049	13,77	1,57
11	71,22	4,09	−1,671	8,78	2,093
12	74,55	2,66	−1,203	5,45	2,616
13	76,68	1,67	−0,802	3,32	3,14
14	78	1,02	−0,507	2	3,664

L016

(c) Diagramm:

$f(t)$ --- Sättigungsfunktion, $f_a(t)$ --- Abklingfunktion
t_m --- Mittelzeit



(12) (L011)

Anmerkungen zum logistischen Modell

– insbes. anhand des Diagramms in 11c erläutert.

(a) Die Funktion ist symmetrisch um die Mittelzeit 'entwickelt', d.h. sie hat in der Mittelzeit (und damit um den Funktionswert $\frac{y_\infty}{2}$) ihr Zentrum.
Diese Symmetrie ist für die praktische Anwendung (Pharmazie, Agrarökonomie) von Vorteil, weil es leicht fällt, die sog. prognostizierte Hälfte (50%-Wert) d. Funktionswerte zu überprüfen.
Insbes. z.B. für die Anwendung der logistischen Transformation (LOGIT) ist das von Bedeutung

(b) Die bildliche Beschreibung der zeitlichen Funktionsentwicklung mit 'Kindheit', 'Jugendzeit' und 'Erwachsenheit' soll die qualitativ unterschiedlichen Bedeutungen der 3 Phasen d. Wachstums hervorheben. Von der 'Kindheit' bis zur Mitte der 'Jugendzeit' mit zunehmender Wachstumsgeschwindigkeit (siehe absolute Rate $y'(t)$), ab der Mitte der Jugendzeit (≙ Wendepunkt d. Funktion) abnehmende Wachstumsgeschwindigkeit.
Im Hinblick auf die Wachstumsbeschleunigung, $y''(t)$, betrachtet, ergibt sich folgendes Bild: Beschleunigung d. Wachstums von der 'Kindheit' an bis zur Mitte der 'Jugendzeit' (Wendepunkt), von der Mitte der 'Jugendzeit' an bis zum Ende der 'Erwachsenheit' Verzögerung (Bremsung) des Wachstums.
[Anm.: Beschleunigung od. 'positive Beschleunigung' und Verzögerung oder 'negative Beschleunigung']

L012

(c) Die Tangente im Wendepunkt der Funktion dient zur Eingrenzung der 'Jugendzeit'.
Vergleichen Sie, dass gilt, dass die Steigung der Tangente dem Wert für $y'(t)$ im Wendepunkt entspricht.

Nachgerechnet für den Beispielfall:

Steigung der Tangente → Tangens: (1) $\dfrac{80}{\left(t_m+\frac{2}{\alpha}\right)-\left(t_m+\frac{2}{\alpha}\right)} =$

$$= \frac{80}{\frac{4}{\alpha}} \overset{(2)}{=} 20\alpha \overset{(3)}{\cong} 10{,}47$$

(d) Die Abklingfunktion $f_a(t)$ ist ein Spiegelbild der Sättigungsfunktion $f(t)$.

(e) Bedenken Sie, dass für den Fall von Populationswachstum die Begriffe 'Cumulative density function' (kumulative Dichtefunktion) und 'probability density function' (Wahrscheinlichkeits-Dichtefunktion) eine unmittelbar plausible Bedeutung erfahren, welcher 'Wachstum in der Beobachtung und Auflistung aller Individuen einer Population (statistische Population) von klein nach groß zugrunde liegt.
Nicht von ungefähr werden logistische Modelle aufgrund äußerer Ähnlichkeit und einfacher Behandlung oftmals anstelle d. Normalverteilungsmodells in der Praxis verwendet.