DG1

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 2. ORDNUNG – LÖSUNGEN

Die Darstellung des harmonischen Oszillators hat ein physikalisches Beispiel für ein Schwingsystem nahegebracht. Mathematisch wird das elastische System als Differentialgleichung 2. Ordnung repräsentiert.
In der Folge soll nun dargelegt werden, wie man von einer vorliegenden DG 2 (= Differentialgleichung 2. Ordnung) auf eine allg. Lösung homogener Fälle kommen kann.

A Klassifikation der Differentialgleichungen:

① (linear) Homogene DG:

$$y'' + p(t)\cdot y' + q(t)\cdot y = \phi \quad \hat{=} \quad g(t) \ldots g(t) = \phi$$

! richtig: $g(t) = \phi$

Es gilt als Symbolik:

(a) $\frac{dy}{dx} = y'$ für oft 't' ... 1. Ableitung

(b) $\frac{d^2y}{dx^2} = y''$ ... 2. Ableitung

② (linear) Inhomogene DG:

$$y'' + p(t)\cdot y' + q(t)\cdot y = g(t)$$

! richtig: $g(t) \neq \phi$

B AUFLÖSUNG - linear, homogene DG 2 mit konstanten Koeffizienten

a) Ausgangsgleichung:

$$a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = \phi$$

a, b, c ... konstante Koeffizienten

b) Erstellen und Auflösen d. CHARAKTERISTISCHEN GLEICHUNG

(1) $a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = \phi$

(2) Behauptung: „die Lösung der Gleichung hat die Form $y = e^{r \cdot x}$" (3)

(4) r ist noch unbestimmt

(5) es gilt nun auch

(5a) $y' = r \cdot e^{r \cdot x}$

(5b) $y'' = r^2 \cdot e^{r x}$

somit gilt: (6) aus (1) $a \cdot r^2 \cdot e^{r x} + b \cdot r \cdot e^{r x} + c \cdot e^{r x} = \phi$

und somit (7) $e^{r x} \cdot (a \cdot r^2 + b \cdot r + c) = \phi$

es bleibt die quadratische Gleichung: (8) $a \cdot r^2 + b \cdot r + c = \phi$

= CHARAKTERISTISCHE GLEICHUNG

DG2

es gilt nun, die quadratische Gleichung aufzulösen:

(9) die Nullstellen sind r_1 und r_2 d. quadratischen Gleichung

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Diskriminante

(10) Die allg. Lösung für Gleichung (1) lautet:

$$y = W_1 \cdot e^{r_1 \cdot x} + W_2 \cdot e^{r_2 \cdot x}$$

die 1. Ableitung wäre $y' = W_1 \cdot r_1 \cdot e^{r_1 \cdot x} + W_2 \cdot r_2 \cdot e^{r_2 \cdot x}$

(11) Die Lösungsmöglichkeiten für die quadratische Gleichung sind:

- $r_1 = r_2$ reell
- r_1, r_2 reell und voneinander verschieden
- r_1 und r_2 komplex (komplex konjugiert) — wenn die Diskriminante negativ ausfällt

Empfohlene Literatur:

① HOLZNER „Differentialgleichungen für Dummies" 2009

C SUPERPOSITION

- Die allgemeine Lösung der DG (siehe Gleichung (10)) setzt sich aus 2 linear unabhängigen Einzellösungen zusammen.
  = eine LINEARKOMBINATION zweier unabhängiger Lösungen

$$y = \underbrace{W_1 \cdot e^{r_1 \cdot x}}_{\text{1. Einzellösung}} + \underbrace{W_2 \cdot e^{r_2 \cdot x}}_{\text{2. Einzellösung}} = W_1 \cdot y_1 + W_2 \cdot y_2$$

$$y_1 = e^{r_1 \cdot x} \qquad y_2 = e^{r_2 \cdot x}$$

- Die Frage nach der linearen Unabhängigkeit zweier Einzellösungen läßt sich mit Hilfe der **WRONSKI-Determinante** entscheiden

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 \cdot y_2' - y_2 \cdot y_1'$$

WRONSKI-Determinante

Falls sich ergibt $W \neq \phi$ → lineare Unabhängigkeit der beiden Funktionen y_1 und y_2 gegeben

DG3 Beispiel für eine homogene, lineare DGL mit 2 verschiedenen reellen Nullstellen:

D

① $y'' + 5y' + 6y = 0$ ② Anfangsbedingungen $y(0) = 16$; $y'(0) = -38$

③ $y = W \cdot e^{rx}$ — als Annahme für eine Lösung d. DG

④ mit $y' = W \cdot r \cdot e^{rx}$ und $y'' = W \cdot r^2 \cdot e^{rx}$

ergibt sich

$$W \cdot r^2 \cdot e^{rx} + 5 \cdot W \cdot r \cdot e^{rx} + 6 \cdot W \cdot e^{rx} = 0$$

und

⑤ die charakteristische Gleichung:

$$r^2 + 5 \cdot r + 6 = 0$$

mit

⑥ mit den Lösungen (Nullstellen, Wurzeln)

$r_1 = -2$ und $r_2 = -3$

$(r+2)(r+3)$

... Wurzelfaktoren

⑦ Die allgemeine Lösung lautet demnach

$$y = W_1 \cdot e^{-2x} + W_2 \cdot e^{-3x}$$

und $y' = W_1 \cdot (-2) \cdot e^{-2x} + W_2 \cdot (-3) \cdot e^{-3x}$

(8) Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen werden die Konstanten W_1 und W_2 bestimmt.

(8a) $y(\phi) = 16 = W_1 + W_2 \quad \rightarrow \quad W_1 = 16 - W_2$

(8b) $y'(\phi) = -38 = -2 \cdot W_1 - 3W_2$

$$-38 = -2(16 - W_2) - 3W_2 = -32 + 2W_2 - 3W_2 = -32 - W_2$$

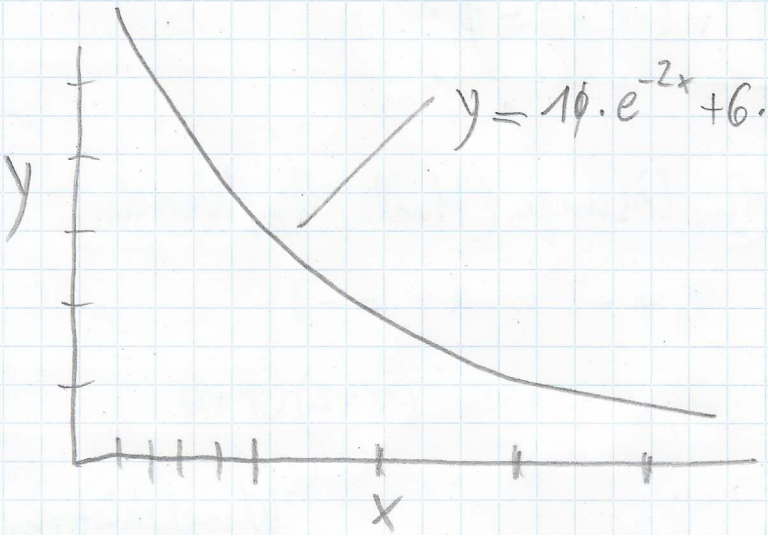
somit $W_2 = 38 - 32 = 6$

und ferner $W_1 = 16 - 6 = 10$

(9) Demnach lautet die allg. Lösung:

$$y = 10 \cdot e^{-2x} + 6 \cdot e^{-3x}$$

Graph:



Anm.: siehe auch File DGCalc.zip

(10) WRONSKI-Determinante:

$$W = \begin{vmatrix} (10 \cdot e^{-2x}) & (6 e^{-3x}) \\ (-20 \cdot e^{-2x}) & (-18 \cdot e^{-3x}) \end{vmatrix} = -180 \cdot e^{-5x} + 120 \cdot e^{-5x} = -60 \cdot e^{-5x}$$

$\downarrow$

da $\neq \phi$ $\rightarrow$ lin. unabhängige Teillösungen

DG4

E Beispiel für eine homogene, lineare DGl 2 mit komplexen Nullstellen:

(1) $2y'' + 2y' + y = 0$ mit den Anfangsbedingungen

(2) $y(0) = 1 \; ; \; y'(0) = 1$

charakteristische Gleichung:

(3) $2r^2 + 2r + 1 = 0$ (4) mit den beiden Nullstellen

(4a) $r_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot i$

(4b) $r_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot i$

(5) die Nullstellen haben die Form von komplexen Zahlen:

$r_1 = \lambda + i\mu$ und $r_2 = \lambda - i \cdot \mu$

(6) d.h. $\lambda = -\frac{1}{2}$ und $\mu = \frac{1}{2}$

(7) die Lösungen für die DGl sind $y_1 = e^{r_1 \cdot x}$ und $y_2 = e^{r_2 \cdot x}$

es gilt aber, da r_1 und r_2 komplexe Zahlen darstellen:

(8) $y_1 = e^{(\lambda + i \cdot \mu) \cdot x}$ und $y_2 = e^{(\lambda - i \cdot \mu) \cdot x}$

(9) entsprechend der Zusammenhänge gemäß Eulerscher Identität gilt:

(9a) $y_1 = e^{\lambda x} \cdot [\cos(\mu x) + i \cdot \sin(\mu x)]$

und

(9b) $y_2 = e^{\lambda x} \cdot [\cos(\mu x) - i \cdot \sin(\mu x)]$

(10) Es gilt ganz allgemein: Zwei Einzellösungen einer DG lassen sich durch Summen- bzw. Differenzbildung wieder zu Lösungen dieser DG machen.
D.h. man führt zwei neue Ansätze zu Einzellösungen $u(t)$ und $v(t)$ ein.

(11)

(11a) $\boxed{u(t) = y_1(t) + y_2(t)}$ und (11b) $\boxed{v(t) = y_1(t) - y_2(t)}$

(12)

(12a) $u(t) = 2 \cdot e^{\lambda x} \cdot \cos(\mu x)$

und

(12b) $v(t) = 2 \cdot i \cdot e^{\lambda x} \cdot \sin(\mu x)$

} ausgehend von (9)

(13) es läßt sich durch Konstantensymbole vereinfachen

$c_1 = 2$ und $c_2 = 2i$

(13a) $u(t) = c_1 \cdot e^{\lambda x} \cdot \cos(\mu x)$

(13b) $v(t) = c_2 \cdot e^{\lambda x} \cdot \sin(\mu x)$

(14) Die allgemeine Lösung der DG lautet nunmehr:

(14a) $\boxed{y(t) = u(t) + v(t) = c_1 \cdot e^{\lambda x} \cdot \cos(\mu x) + c_2 \cdot e^{\lambda x} \cdot \sin(\mu x)}$

und

(14b) $\boxed{y'(t) = c_1 \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} \cdot \cos(\mu x) + c_1 \cdot e^{\lambda x} \cdot \sin(\mu x) \cdot (-\mu) + c_2 \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} \cdot \sin(\mu x) + c_2 \cdot e^{\lambda x} \cdot \cos(\mu x) \cdot \mu}$

DG5

(15) Für das Beispiel ergibt sich durch Einsetzen in Gleichung (14) die allg. Lösung:

$$y(t) = c_1 \cdot e^{\left(-\frac{x}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) + c_2 \cdot e^{\left(-\frac{x}{2}\right)} \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

(16) Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen (2) ergibt sich:

(16a) $y(\phi) = c_1 = 1$ und (16b)

$$y'(\phi) = 1 = c_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot e^{\phi} \cdot \cos(\phi) + c_2 \cdot e^{\phi} \cdot \cos(\phi) \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot c_1 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot c_2$$

und somit:

$$1 = \left(-\frac{1}{2}\right) c_1 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot c_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot c_2$$

$$\downarrow$$

$$2 = -1 + c_2$$

und $c_2 = 3$

(17) somit ergibt sich die allg. Gleichung samt Konstanten:

$$y(x) = e^{\left(-\frac{x}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) + 3 \cdot e^{\left(-\frac{x}{2}\right)} \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

Anm.: Siehe auch DGCalc.zip im Anhang
> Darstellung d. Graphen