Dreisatz einmal anders: Aufgaben mit überflüssigen bzw. fehlenden Angaben

Hans Humenberger, Dortmund

Der häufigste Aufgabentyp im Mathematikunterricht ist wohl jener, bei dem ausgehend von einer gerade passenden Angabemenge nach einem (oder mehreren) Zielwert(en) gefragt wird. Passend meint hier, dass die jeweilige Angabemenge keine Angabe zu wenig oder zu viel enthält: alle benötigten Daten werden angegeben und alle angegebenen Daten werden benötigt! Wenn die Mathematik-Aufgaben viele Unterrichtsjahre lang ausschließlich *vom beschriebenen Typ sind, werden die Schülerinnen und Schüler darauf derart konditioniert, dass sie diese oft mit Mathematik gleichsetzen, was schade wäre (ist?) — ein völlig falsches Bild von Mathematik: wir alle wissen, dass sich die Aufgaben, zu deren Lösung Mathematik etwas beitragen kann, in der Realität i. A. anders stellen.*

1 Einleitung

Das Lösen von Aufgaben spielt wahrscheinlich in jedem Mathematikunterricht eine zentrale Rolle, wobei in der gemeinhin üblichen Version die Schülerinnen und Schüler so gut wie immer davon ausgehen können, dass es eine **passende** Aufgabe in folgendem Sinn ist:

Vom „Angabematerial“ kann **die** gesuchte Größe meist direkt berechnet werden:

- *alle angegebenen* Daten werden tatsächlich *benötigt* —
  nichts bleibt über; die Angabe ist „redundanzfrei“;
- *alle benötigten* Daten sind wirklich *angegeben* —
  nichts fehlt; die Angabe ist „lückenlos“.

Ein *Überbleiben* bzw. *Fehlen* von Daten kann von Schülerinnen und Schülern i. a. nur als „Warnung“ interpretiert werden:

Überbleiben: „Wenn ich einige Angaben gar nicht gebraucht habe, dann ist wohl mein Rechengang verdächtig einfach (falsch).“

Fehlen: „Wenn mir Angaben fehlen (ich mit den angegebenen Daten nicht auskomme), dann habe ich offenbar zu wenig gelernt: ich kenne keine geeignete Formel.“

Wie wir alle wissen, stellen sich aber „Probleme“ nur selten in dieser kanonischen Form mit einer genau *passenden* Menge von Daten, die *notwendig* und *hinreichend* für die Bestimmung *des Ziel-Wertes* sind.

Man muss zuerst oft überlegen:

- Welche **Struktur** (Grob- bzw. Fein-) hat das gestellte Problem?
- Welche (mathematischen, physikalischen) Größen müssen bekannt sein (z. B. durch Nachschlagen, Angabe, Messung etc.), um auf den/die jeweiligen gesuchten Wert(e) schließen zu können?
- Man darf sich nicht verwirren lassen von möglicherweise überflüssigen Angaben und nicht entmutigen lassen von möglicherweise fehlenden Angaben.
- Gibt es mehrere Möglichkeiten zur Lösung des gegebenen Problems?
- Kann das Ergebnis durch weitere Messungen oder dergleichen abgesichert werden? Gibt es eine Art „Probe“? u.s.w.

Unser Mathematikunterricht sollte daher unbedingt auch Aufgaben enthalten, in denen die genannten Punkte etwas stärker berücksichtigt werden.

Diese Forderung kann auch unter dem Stichwort gesehen werden:

- **etwas mehr: Mathematik als Prozess !**
- **etwas weniger: Mathematik als Produkt (Kalkül) !**

Gerade in letzter Zeit[1] gibt es viele Beiträge namhafter Autoren, die für eine etwas veränderte Unterrichts- bzw. Aufgabenkultur plädieren, genau im Sinne obiger „Akzentverschiebungen“.

Aufgaben mit fehlenden bzw. überflüssigen Angaben sind *eine* Möglichkeit, der Forderung nach einer stärkeren Betonung des Prozessaspekts (zumindest etwas) nachzukommen.

Diese sollen sich wie ein **roter Faden** durch den gesamten Mathematikunterricht ziehen (beginnend spätestens in Klasse 5, aber eigentlich schon in der Grundschule) – beinahe jedes Stoffgebiet ist offensichtlich dazu geeignet – , man muss ja „nur“ bei herkömmlichen Angabe(texte)n einiges hinzufügen oder etwas wegnehmen! Die Aufgaben brauchen dafür also nicht prinzipiell neu erdacht zu werden.

Stellvertretend soll es in diesem Aufsatz um den Standard-Themenbereich **Lineare Funktionen – Proportionalität – Dreisatz** gehen, an diesem wollen wir das Prinzip von **Aufgaben mit überflüssigen bzw. fehlenden Angaben** demonstrieren, wobei es sich bei den folgenden Beispiel-Aufgaben nicht durchweg um *realitätsbezogene*[2], sondern oft auch um nur *eingekleidete* Aufgaben[3] handelt.

[1] Vgl. auch die Diskussionen um die Resultate der internationalen Vergleichsstudien TIMSS und PISA!

[2] Kurz gesagt: Eine realistische Sachsituation, die für die Lebenswelt wirklich relevant ist, steht im Vordergrund; die selbständigen konkreten (manchmal auch komplexeren) Analysen und „Modellierungen“ sind der wesentliche Punkt solcher Aufgaben.

[3] Die Sachsituation selbst ist dabei nicht als Problem im Vordergrund, sondern dient vorwiegend dazu, ein Stück Mathematik zu „verpacken“.

Liebe Leserin, lieber Leser, bitte beurteilen Sie die Alltagsrelevanz bzw. Relitätsnähe der einzelnen Aufgaben selbst und diskutieren Sie diese mit ihren Lernenden. Des Weiteren möchte ich Sie, dazu einladen bzw. auffordern, bei diesem und auch bei anderen Themenbereichen weitere Beispiel-Aufgaben selbst zu (er-)finden, so dass das genannte fruchtbare Prinzip an vielen Stellen im Unterricht eingesetzt werden kann.

Man wird (besonders am Anfang) natürlich oft dazusagen, dass „Vorsicht“ bei der folgenden Aufgabe geboten ist, sogar in welcher Hinsicht dies gemeint ist, d. h. ob es eine Aufgabe mit überflüssigen[4] oder fehlenden Angaben[5] ist (ob sie über- oder unterbestimmt ist).

Mit der Zeit sollte es jedoch nichts Ungewöhnliches für Schülerinnen und Schüler mehr sein, wenn bei Angaben „etwas fehlt“ oder „etwas überbleibt“, und es sollte zur Selbstverständlichkeit werden, entsprechend zu reagieren:

Bei überflüssigen Angaben: angeben, welche dies sind; allenfalls für welche anderen Fragestellungen sie verwendet werden könnten. Welche weiteren Fragen sind mit den gegebenen Daten beantwortbar? (Einige solcher Fragestellungen könnten auch von der Lehrperson vorgegeben werden, und die Schülerinnen und Schüler haben zu entscheiden, welche beantwortbar sind.)

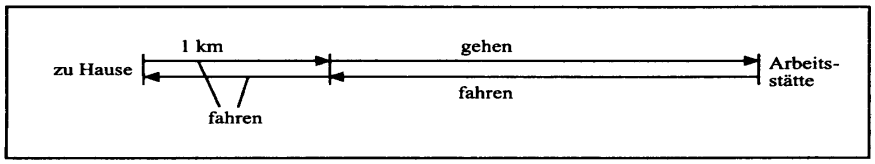
Bei fehlenden Angaben: vernünftige *konkrete* Annahmen treffen (begründetes Schätzen, Infos einholen, Messen, ...) oder fehlende Größen mit einer Variable benennen und damit die Aufgabe lösen (wenn die konkreten Informationen erst später oder gar nicht eingeholt werden).

2 Beispiele mit überflüssigen Angaben

Panne am Arbeitsweg (vgl. Humenberger 1995)

Ein Arbeitnehmer fährt mit dem Fahrrad zur Arbeit. Er fährt die 3 km lange Strecke normalerweise mit einer mittleren Geschwindigkeit von 15 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Diesesmal hatte er jedoch Pech, denn nach 1 km platzte der Schlauch eines Reifens, und er brauchte um 20 Minuten länger, weil er ab dieser Stelle das Rad schieben musste. In der Arbeitsstätte konnte er glücklicherweise den Schaden beheben und abends ungehindert nach Hause fahren.

1. Wie viele km ist er insgesamt mehr gefahren als gegangen?



[4]Solche Aufgaben werden wir auch als „überbestimmte Aufgaben“ bezeichnen. Der Terminus „Überbestimmung“ wird – insbesondere bei Linearen Gleichungssystemen – oft für die Situation verwendet: Mehr Gleichungen als Unbekannte; hier meinen wir mit „Überbestimmung“ allerdings jede Art überflüssiger Angaben bei beliebigen Aufgabentypen.

[5]Solche werden wir auch als „unterbestimmte Aufgaben“ bezeichnen.

Die Streckenlänge zwischen Reifenplatzer und Arbeitsstätte wird einmal gegangen und einmal gefahren; in der Gehen-Fahren-Bilanz braucht diese Strecke also nicht berücksichtigt zu werden! Selbst die 3 km in der Angabe sind also überflüssig!

Er ist um $2 \cdot (1\text{ km}) = 2$ km mehr gefahren als gegangen.

2. Welche Daten sind für Frage 1. überflüssig?

   Alle sind überflüssig, ausgenommen die von 1 km!

3. Welche anderen Fragen könnte man stellen und beantworten? (Schülerinnen und Schüler erfinden weitere Fragen und beantworten diese)

4. Oder: Kann man folgende Fragen (von der Lehrperson vorgegeben) aus den gegebenen Daten beantworten?

   (a) Wie lang braucht er mit Fahrrad normalerweise für eine Strecke? [$\frac{3}{15}$ h = 12 min]

   (b) Wie lange (zeitlich!) musste er das Rad schieben? [28 min]

   (c) Welche mittlere Geschwindigkeit hatte er dabei? [$4\frac{2}{7}$ km/h]

   (d) Wie lange hat die Reparatur gedauert? [nicht beantwortbar]

Bemerkung: Die (einfachen!) Antworten zu den folgenden Aufgaben fehlen meist oder fallen sehr kurz aus; es geht vor allem darum, einige Möglichkeiten aufzuzeigen, wie aus „herkömmlichen“ Aufgabentexten durch Hinzufügen einiger überflüssiger Angaben (nicht allzu umfangreich bzw. allzu phantasievoll!) eine überbestimmte Aufgabe gemacht werden kann, so dass diese Beispiele vielleicht prinzipielle Ideenlieferanten sein können für das Erfinden bzw. Zusammenstellen anderer Aufgaben („Katalysatorwirkung“), einerseits zu dem hier behandelten Themenbereich, aber andererseits auch zu anderen Bereichen.

Die arabische Wüste (Frohwein 1996)
Eine Wüstenexpeditionsgruppe bestehend aus 35 Wissenschaftlern und 10 Führern ist mit 10 gleichartigen Geländefahrzeugen ausgerüstet.
Die Jeeps verbrauchen 10,5 ℓ Super Bleifrei auf 100 km. Der Benzinvorrat reicht noch gerade, dass alle 10 Fahrzeuge eine Strecke von 120 km zurücklegen können.
Bis zur nächsten Oase sind es etwa 150 km. Die nächste Versorgungsstelle ist allerdings noch 200 km entfernt.

- Wie viele Jeeps muss die Expeditionsgruppe in der Wüste zurücklassen? Markiere die dafür benötigten Angaben.
- Welche Fragen lassen sich noch beantworten?

Die Aufforderungen „Markiere die benötigten Daten!“ und „Formuliere weitere Fragen, die mit den gegebenen Daten beantwortbar sind und beantworte diese!“ sind (wenn nicht ohnehin angegeben) bei allen Aufgaben mit überflüssigen Angaben dazuzudenken!

Jugendherberge in Köln (vgl. Frohwein 1996, etwas abgewandelt)
Die Klasse 8b eines Gymnasiums fährt für 7 Tage nach Köln. Dort übernachten sie in einer Jugendherberge, die 366 Betten hat. Der Klassenlehrer hat vorher berechnet, dass sich für die 22 Schülerinnen und Schüler die Jugendherbergskosten auf insgesamt EUR 1 963,50 belaufen. Unvorhergesehen müssen zwei Schüler drei Tage früher abreisen, wobei sie für die nichtkonsumierten Tage keine Stornogebühr bezahlen müssen, denn am selben Tag kommt eine andere Gruppe mit 15 statt 13 angemeldeten Jugendlichen, die 3 Tage bleiben.
a) Wieviel muss die 8b für den Köln-Aufenthalt in der Jugendherberge bezahlen?
b) Markiere die für a) benötigten Daten; formuliere und beantworte weitere Fragen (z. B.: wieviel bezahlt die andere Gruppe? Wieviel nimmt die Jugendherberge in einer „ausverkauften“ Woche ein?)

Das selbständige Erfinden von Aufgaben durch Schülerinnen und Schüler ist allgemein eine oft vernachlässigte Disziplin, bei Aufgaben mit überflüssigen oder fehlenden Angaben, aber auch bei so genannten „normalen“ Aufgaben! Das Erfinden von Aufgaben mit konkreten Texten und konkretem Zahlenmaterial (z. B. Gruppenarbeit: Gruppen stellen einander selbst erfundene Aufgaben) zwingt die Schülerinnen und Schüler zu vielfältigen Rechnungen (schon beim Zusammenstellen der Aufgabe – denken Sie an Aufgaben, die Sie selbst erfinden!), so dass nicht einmal die *Quantität* des Übens im Vergleich zum Durchrechnen vieler von der Lehrperson gestellter Aufgaben leiden muss; es fordert und fördert das wirkliche Durchschauen des Kerns von Aufgaben (worauf kommt es an?), so dass zusätzlich die *Qualität* des Übens eine ganz andere sein kann!

In der Arbeit von Frohwein 1996 finden sich viele von Schülerinnen und Schülern erfundene Aufgaben, die durchaus zeigen, dass diese Schülerinnen und Schüler erstens vieles gelernt und verstanden haben und zweitens Spaß an der Arbeit hatten; hier 2 Beispiele zu „überbestimmten Aufgaben“ (nur leicht redigiert).

Bemerkung: Man kann bei den folgenden Schüleraufgaben (aber auch bei den obigen und einigen noch folgenden) natürlich einwenden, dass sie keine *relevanten* Anwendungsaufgaben in dem Sinne sind, dass die Schülerinnen und Schüler keine *Modellierungen* von relevanten *realen Situationen* durchzuführen haben, sondern nur *eingekleidete* Aufgaben (siehe oben) vorliegen. Dies soll auch nicht bestritten werden, ist hier aber ohnehin nicht das primäre Anliegen: Es geht hier an erster Stelle um das *selbständige Strukturieren* von Aufgaben, um das *selbständige* Einkleiden durch Schülerinnen und Schüler, wobei das Durchschauen (Verstehen) des mathematischen Kerns solcher Aufgaben gefordert und gefördert wird.

Englische Pfund (Schüler)
Mr. Coldey geht in München in eine Bank, die 21 Angestellte und 7 Schalter hat. Er geht an Schalter 7, wo er von Frau Hubertus, die eine Tochter von 3 Jahren hat, bedient wird. Er möchte 100 englische Pfund in EUR wechseln. Wieviel EUR bekommt er, wenn das Kind von Frau Hubertus 16,7 kg wiegt und der Kurs beim Ankauf auf EUR 1,06 und beim Verkauf auf EUR 1,16 pro Pfund steht?

Apollo 13 (Schüler)
Als Tom Hanks, 32 Jahre alt und Vater von 3 Kindern (Wohnort in Houston), am 26. 08. 1980 zu einer Raumfahrtmission mit seiner Crew zum Mond geschossen wird, gehen ihm 183 Gedanken in 5 Minuten durch den Kopf. Aber sie brauchen 4 Tage bis zum Mond. Nach zwei Tagen in der Schwerelosigkeit sieht Tom Hanks, dass aus den vier 5 kg schweren Sauerstofftanks Sauerstoff strömt. So funkt er an die Erde: „Houston, wir haben ein Problem!“ In einem Tank sind 480 m^3 Sauerstoff. In 5 Stunden strömen 50 m^3 raus. Ein Tank ist schon leer!
a) Wie viele Gedanken gehen ihm bis dahin durch den Kopf? Triff eine zusätzliche Annahme!
b) Wieviel Sauestoff strömt in den letzten Tagen noch aus? Wieviel hat die Crew noch übrig?

Beschwerde: Toilettenpapier 2 cm zu kurz! (Scholz 2002)
Nach Bildzeitung vom 20. 05. 1999: Toiletten-Aufstand bei den Behörden im Regierungsbezirk Arnsberg (NRW): „Wir lassen uns doch nicht besch...“. Der Vorfall: Alle 41 Ämter bezogen von einer Firma Toilettenpapier für die Dienstklos: zweilagig, je 250 Blatt, insgesamt 146 000 Rollen, jedes Blatt angeblich 14 cm lang. Aber ein Beamter maß nach – nur 12 cm. Beschwerde an die Firma – jetzt gibt der Hersteller einen Preisnachlass von 3 Pfennig pro Rolle (18 statt bisher 21).
a) Erkläre, wie die Firma auf einen Preisnachlass von 3 Pfennig gekommen ist. Welche Angaben benötigst Du dafür?
b) Ist hier der proportionale Ansatz immer gerechtfertigt? Überlege eine Extremsituation: „nur 2 cm statt der versprochenen 14 cm“; wäre hier ein Preis von 3 statt 21 Pfennig gerecht?
c) Welche anderen Fragen könnten gestellt und beantwortet werden?

Zu b): Man beachte die *Fixkosten* pro Rolle, die nahezu unabhängig von der jeweils aufgewickelten Papiermenge sind: Kartoninnenrolle, Transport, etc.)

Zu c): Z. B.: Wieviel hat die Bezirksregierung Arnsberg dadurch insgesamt gespart? Wie viele zusätzliche Rollen hätte der Hersteller statt eines Preisnachlasses liefern müssen? Welche Streckenlänge könnte mit dem fehlenden Papier belegt werden? Solche oder ähnliche Fragen könnten auch schon in der Fragestellung stehen.

Nach der Weinlese
Eine Maschine kann Flaschen zu 0,7ℓ, 1ℓ bzw. 2ℓ verkorken. In einer Stunde schafft sie 200 Flaschen zu 1ℓ. Wie lange braucht sie, um von den 0,7ℓ-Flaschen 300 Stück zu verkorken?

Frau Schlaumeier
Alle reden über zu hohe Benzinpreise, denn jedes Jahr wird der Sprit um bis zu 20 Pfennige teurer (im Jahr 2001 lag der Spritpreis teilweise über DM 2,–). Aber Frau Schlaumeier glaubt davon nicht betroffen zu sein: *„Ich tanke ohnehin jedesmal für den selben Betrag!“*

- Nimm zu dieser Aussage Stellung und belege deinen Kommentar durch „geeignete“ Zahlenbeispiele.
- ODER: Als vor 10 Jahren ein Liter Benzin noch DM 1,25 kostete, tankte sie jeweils 40 Liter. 2 Jahre später bezahlte man bereits DM 1,50 für einen Liter Benzin, aber Frau Schlaumeier blieb ihren Tankgewohnheiten treu.

a) Wieviel Benzin tankte sie dann?
b) Welche Informationen hast du für a) nicht benötigt?

Wenn die Aufgabe in der ersten Form gestellt wird, so sollen die Schülerinnen und Schüler *selbst* Benzinpreise in verschiedenen Jahren erheben und *selbst* z. B. anhand einer kleinen Tabelle für verschiedene Bertäge (mögliche Tankbeträge von Frau Schlaumeier) die jeweils dafür erhaltenen Benzinmengen vergleichen.

Jeep im Schlammloch
Ein Biologe und ein Arzt sind als Entwicklungshelfer im Regenwald unterwegs. Von Zeit zu Zeit bleibt ihr Jeep in Schlammlöchern stecken, so dass sie mit einem Flaschenzug (maximale Zugkraft: 8 t) das 1,2 t schwere Auto Zentimeter für Zentimeter aus dem Schlammloch herausziehen.
Während sie 1 m des 2 cm dicken Seiles ziehen, rückt das Auto nur 5 cm nach vor. Nach 40 Minuten haben sie 3,40 m Seil gezogen. Wieviel ist der Jeep vorgerückt?

Ein Ferienjob
Sonja hilft während der Schulferien 4 Wochen in einer Eisdiele aus und arbeitet insgesamt 120 Stunden. In der ersten Woche arbeitet sie 24 Stunden und verdient EUR 132,– . In der zweiten Woche ist in der Eisdiele mehr los, so dass sie 32 Stunden arbeiten kann. In der letzten Woche verdiente sie sogar EUR 209,–. Wie viele Stunden hat sie in der letzten Woche gearbeitet?

Undichter Wasserhahn
Herr Müller wohnt in Dortmund, 10 km von der Ruhr entfernt. Er hat abends um 19.00 Uhr den Wasserhahn über einer quaderförmigen Plastikwanne (Höhe 60 cm) nicht dicht abgedreht. Morgens bemerkt er um 7.00 Uhr, dass seine 40ℓ-Wanne zu 3/4 mit Wasser aus dem Wasserhahn (Durchmesser 2 cm) gefüllt ist.
a) Wieviel Wasser wäre aus dem Hahn gelaufen, wenn Herr Müller um 22.00 Uhr nochmal nachgeschaut und den Hahn wirklich abgedreht hätte?
b) Wie lange hätte er bis zum Überlaufen der Wanne noch schlafen können?

3 Beispiele mit fehlenden Angaben

Dieser Aufgabentyp ist eng verwandt mit den bekannten Aufgaben des Physikers Fermi („Fermi-Augababen“). Solche werden z. B. in Herget (Hrsg., 1999) von verschiedenen Autoren etwas genauer diskutiert. Hier nur Schlagwortartig einige derartige Fragestellungen: Wie viele Klavierstimmer gibt es in Chicago? Wieviel Wasser enthält der Atlantik? Wie viele Haare hat der Mensch auf dem Kopf? Wie viele Schweine werden täglich in Deutschland geschlachtet? Wie viel fester Müll wird von den Haushalten in Österreich pro Jahr produziert? Wie viele Zensuren werden an den Schulen Deutschlands pro Jahr erteilt? Wie viele Schulen gibt es in Deutschland (Österreich, Schweiz)? Wie viel m^2 Wohnfläche gibt es im Land? Wie viel Geld wird bundesweit pro Jahr für Nachhilfe ausgegeben? Wieviel Benzin wird in Deutschland täglich für Autofahrten zum Arbeitsplatz und von dort nach Hause verbraucht?

„Der Wert dieser Fragen – oder richtiger: ihrer Lösungen – liegt in dem Vergnügen, sich kreativ und mutig auf den Weg gemacht zu haben, und in der Erfahrung, selbständig zu einer (zugegebenermaßen angenäherten) Lösung gelangt zu sein, statt zu einer Antwort nur ehrfürchtig aufzuschauen oder sie jemand anderen finden zu lassen.“ (Herget (1999), S. 7))

Herzschläge
Wie oft (ungefähr) schlägt das Herz im Laufe eines Lebens?

Hier müssen die Schülerinnen und Schüler selbst Informationen einholen (oder schätzen): Wie alt wird ein Mensch durchschnittlich? Wie oft pro Minute schlägt das Herz durchschnittlich? Ob die Schülerinnen und Schüler hier mit einem Durchschnittsalter von 65 oder gar 80 Jahren rechnen, bzw. mit 50 oder 80 Schlägen pro Minute, ist hier nicht der wesentliche Punkt (solange es nicht abstruse Werte sind); viel wichtiger ist hier das selbständige Strukturieren der Aufgabe (welche Angaben brauche ich?).

Schulstunden im Gymnasium
Wie viele Schulstunden haben SchülerInnen ca. im Laufe ihrer Gymnasialzeit?

Rasenmähen
Eine Rasenfläche von ca. 300 m^2 soll mit einem Rasenmäher (Schnittbreite ca. 35 cm) gemäht werden.
Wie lange wird das dauern? Was muss dabei geschätzt werden? Welche Annahmen sind zusätzlich zu treffen? Was muss berücksichtigt werden, um ein halbwegs realistisches Resultat zu erhalten?

Nötige Überlegungen:

- Abhängigkeit von der Mähgeschwindigkeit! Selbständige Wahl der Geschwindigkeit: z. B. 1 m/s = 3,6 km/h; dies ist zwar relativ hoch, ermöglicht aber eine bequeme Rechnung für eine Ungefähraussage.

- Werden bei jeder Fahrt die vollen 35 cm Schnittbreite ausgenutzt? → bei realistischer Rechnung eher mit 30 cm rechnen;
- Zeiten für Wendungen bzw. Herummähen um Sträucher können zum Schluss durch entsprechend großzügiges Aufrunden (je nach Gegebenheiten) beachtet werden; etc.

Der schlecht informierte Maler
Herr Müller blättert zu Hause in einem Werbeprospekt eines Baumarktes und sieht, dass Wandfarbe in Eimern zu 5 ℓ für EUR 7,50 und zu 25 ℓ für EUR 25,– angeboten werden. Er möchte eine Wandfläche von insgesamt 150 m^2 streichen.
Wie teuer wird der Anstrich im günstigsten Fall für Herrn Müller?

Folgende Informationen müssen beschafft werden: Wieviel Farbe braucht man pro m^2? (oder gleichwertig: wie viele m^2 können mit einem ℓ Farbe gestrichen werden?) Wie oft muss die Wand gestrichen werden, damit die Farbe wirklich deckt?

Mögliche Informationsquellen: (1) Anrufen beim Baumarkt oder bei einem Malergeschäft; (2) jemanden fragen, der Bescheid weiß (Vater? Bekannter?); (3) Nachlesen dieser Informationen auf einem Eimer; (4) einstweiliges Arbeiten mit einer Variable; evtl. eigenes Schätzen.

Stau im Ruhrgebiet (vgl. auch Jahnke 1997)
Im Verkehrsfunk wird vor einem 5 km langen Stau bei Bochum auf der Autobahn A 40 von Essen nach Dortmund gewarnt und gebeten, diesem – wenn möglich – über eine andere Route auszuweichen.
a) Wie viele Fahrzeuge stecken im Stau ?
b) Wie viele Personen stecken im Stau ?

Nötige Überlegungen: Wie viele Spuren hat die beschriebene Autobahn? Schätzungen: Welche Durchschnittslänge hat ein Fahrzeug (Autos, LKW, Busse, etc.)? Welcher durchschnittliche Abstand ist zwischen den Fahrzeugen? Wie viele Personen sitzen durchschnittlich in einem Fahrzeug?

Ratenkauf
Ein Fahrrad kostet EUR 320,– . Herr Huber bezahlt EUR 100,– sofort und den Rest in gleichen Raten. Berechne die Höhe einer Rate.

Oberfläche eines Menschen – (vgl. auch Hering 1996)
Der Körper eines Menschen kann auf verschiedene Weisen grob angenähert werden. Bestimme durch plausible Annahmen die Größenordnung der Oberfläche eines erwachsenen Menschen. Vergleiche mit den in der Biologie angegebenen Werten (Lexikon, Biologielehrer) .

Spritverbrauch
Herr Hintermayer fährt öfter die rund 180 km lange Autobahnstrecke von Wien nach Linz. Der Benzinverbrauch hängt beim Autofahren *auch* von der Geschwindigkeit ab. Normalerweise fährt Herr Hintermayer mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 90 km/h; heute hat er es aber sehr eilig und fährt deshalb durchschnittlich um 30 km/h schneller.
a) Um wieviel (absolut und relativ: in Prozent) braucht er dadurch mehr Sprit?
b) Berechne die Zeitersparnis in Minuten und in Prozent.
c) Berechne die finanziellen Mehrkosten für diese Zeitersparnis.

Nötige Überlegungen, evtl. als Hinweis: Die fehlende Verbrauchssteigerung kann durch Nachschlagen der Verbrauchswerte *eines* PKW (z. B. des Vaters) eruiert werden; eine plausiblere Verbrauchssteigerung kann herausgefunden werden, indem man die Verbrauchswerte bei 90 km/h und 120 km/h für möglichst viele (mindestens 3 verschiedene) Modelle vergleicht.

Qual der Wahl (Frohwein 1996)
Immer länger wird die Schlange am Verkaufsstand der Koblenzer Verkehrsbetriebe: Frau Schwab kann sich nicht entscheiden, ob sie eine 5-er Karte zu EUR 6,25 oder Einzelfahrscheine zu EUR 1,55 lösen soll. „Oder vielleicht soll ich doch eine Tageskarte zu EUR 4,25 lösen?“ denkt sie bei sich.
a) Triff eine zusätzliche Annahme und hilf Frau Schwab bei ihrer Entscheidung!
b) Erkundige dich, was in deiner Heimatstadt am günstigsten wäre!

Adenauer-Denkmal (Herget u. a., 2001)

Wie groß müsste wohl ein entsprechendes Denkmal sein, wenn es Adenauer im selben Maßstab „von Kopf bis Fuß“ darstellen soll?

Nötige Überlegungen: Die Schülerinnen und Schüler müssen selbst auf die Idee kommen die *Körpergröße des Jugendlichen* und den *Abstand Hals–Augen bei Erwachsenen* erstens zu schätzen und zweitens sie zueinander in Beziehung zu bringen. Des weiteren muss (für den Dreisatz) natürlich auch die wirkliche Körpergröße Adenauers geschätzt werden.

Diese Aufgabe ist von den Autoren als Aufgabe zu sinnvollem Schätzen gedacht (Umgang mit Näherungsgrößen, sinnvolle Genauigkeit), passt also auch sehr gut zu unserem Thema.

Mitgliedsbeiträge im Sportverein: (vgl. Kirsch 1995)
Der Sportverein „Balltreter“ hat 4 500 Mitglieder, davon 2 000 Jugendliche. Diese zahlten bisher EUR 15,– Jahresbeitrag, die Erwachsenen EUR 25,– . Für den Umbau der Sportanlagen müssen die gesamten Beitragseinnahmen des Vereins auf EUR 120 000,– pro Jahr erhöht werden. Stell dir vor, du bist Jugendsprecher in diesem Verein und musst Vorschläge für neue (und möglichst gerechte) Jahresbeiträge machen.

Die neuen Jahresbeiträge seien mit x bzw. y bezeichnet:

$x :=$ neuer Jahresbeitrag für Jugendliche (in EUR)

$y :=$ neuer Jahresbeitrag für Erwachsene (in EUR)

Laut Text ergibt sich daraus zunächst:

$$2\,000\,x + 2\,500\,y = 120\,000\ .$$

Für eine weitere Forderung, die jeweils in eine zweite Gleichung „übersetzt“ werden muss, gibt es viele Möglichkeiten, beispielsweise die folgenden:

1. Die (absolute) Erhöhung soll bei Jugendlichen und Erwachsenen gleich ausfallen:
   $x - 15 = y - 25$
2. Die prozentuale Erhöhung soll bei Jugendlichen und Erwachsenen gleich ausfallen:
   $\dfrac{x-15}{15} = \dfrac{y-25}{25}$
3. Der neue Beitrag soll jeweils gleichviel Prozent des alten ausmachen: $\dfrac{x}{15} = \dfrac{y}{25}$
4. Die neuen Beiträge sollen sich wie die alten *verhalten* : $x : y = 15 : 25$
5. Die jeweiligen Erhöhungen sollen sich wie die alten Beiträge *verhalten* :
   $(x - 15) : (y - 25) = 15 : 25$
6. Die Erhöhung soll allein von den Erwachsenen getragen werden: $x = 15$
7. Die „Jugendermäßigung“ soll in Zukunft 50% betragen: $x = \frac{y}{2}$

Die Möglichkeiten 2 – 5 sind mathematisch äquivalent, haben aber trotzdem eine jeweils andere Textentsprechung (deswegen sind sie hier extra angegeben!).

Welche dieser Möglichkeiten zur Anwendung kommt, ist *prinzipiell nicht durch Mathematik* entscheidbar („Grenzen des Mathematisierens“), sondern hängt von außermathematischen Umständen ab. Es sind *normative* Setzungen, etwa vom *subjektiven* Gefühl bzgl. *Gerechtigkeit* geleitet. Genauso ist der „beste“ Ausgang folgender Diskussionspunkte nicht mit Mathematik

entscheidbar, sondern durch andere außermathematische Gesichtspunkte: Wie sollen hier die sich ergebenden genauen Werte (zumindest auf Cent) gerundet werden? Soll die Vorgabe „EUR 120 000,– pro Jahr“ strikt eingehalten werden? Will man lieber etwas Reserve ($> 120\,000$) oder genügt auch ein Betrag etwas $< 120\,000$? Will man vielleicht sogar ganze EUR-Beträge? Mit z. B. $x = 17$ und $y = 34$ (siehe Punkt 7.) wäre das Soll von EUR 120 000,– nicht ganz erreicht (aber sollten nicht auch EUR 119 000,– reichen?).

4 Zusammenfassende Thesen zu „Über- und unterbestimmten Aufgaben (ÜUA) im Mathematikunterricht“

- Der üblicherweise oft vernachlässigte, aber sehr wichtige Aspekt von **„Mathematik als Prozess“** wird stärker betont. Das notwendige Strukturieren einer Aufgabe ist ja durchaus eher prozess- als kalkülorientiert!
- ÜUA fördern die **Anwendungsorientierung** im Mathematikunterricht (durch ihr *Prinzip* und nicht notwendig wegen ihrer Inhalte bzw. Themen).
- Im Unterricht wird eine bessere Mitarbeit (Freude, Engagement) und mehr **selbständige Arbeit** (mündlich und schriftlich) erreicht.
- Es finden mehr Diskussionen über beschriebene (Sach-)Situationen statt: diese stehen etwas mehr im Vordergrund, was dem Prinzip des **„problemorientierten Arbeitens“** entspricht. Die Aufgaben bzw. Situationen sind aber *nicht notwendig realistischer*!
- Ein tieferes Analysieren von Situationen wird geschult: **Erkennen** der für das Aufgabenziel **wichtigen Daten** — auch wenn getroffene Annahmen oder rechnerische Lösungen nicht perfekt sind.
- ÜUA sind ein probates Mittel, den „Geist zu schärfen“, die Fähigkeit zu fördern, die **Struktur** (das Wesentliche, den Kern) von **Situationen (Aufgabentexten)** besser zu „durchschauen“, so dass auch bei „normalen“ Aufgaben ein besser strukturiertes Herangehen an das jeweilige Problem zu beobachten ist (**„Mathematisieren“**).
- Es gibt das Problem der **Überforderung**, aber auch:

  (1) „schlummernde Talente“ können geweckt werden: manche Schülerinnen und Schüler, die sich bei normalen Aufgaben nur wenig selbst (aktiv!) einbringen, bringen sich bei dieser Art Aufgaben eher ein, weil mehr gesprochen wird, weil sie ihre Vorstellungen (ihre Phantasie, insbesondere beim selbständigen Erfinden von Aufgaben) mehr einbringen können.

  (2) **Leistungsdifferenzierung** ist innerhalb einer Aufgabe möglich: z. B. bei ÜA: *wie viele* oder *welche* selbst gestellten Zusatzfragen werden überlegt (beantwortet)? Bei UA: Welche Informationen werden eingeholt (wie genau)? Welche Faktoren werden zusätzlich berücksichtigt (um z. B. eine realistische Aufgabe zu erhalten)?

5 Eine ausgearbeitete Dreisatzaufgabe

Rinder auf der Weide

Auf einer großen Farm können 45 Rinder 16 Wochen lang auf einer 30 ha-Wiese grasen. Auf einer kleineren Wiese von 12 ha können 20 Rinder nur 10 Wochen grasen.

Wie viele Rinder können sich auf einem 20 ha-Gebiet 16 Wochen lang „ernähren“ ?

Fläche (ha)	Wochen	Rinder
30	16	45
12	10	20
20	16	x

Hierbei handelt es sich klarerweise nicht um eine realitätsbezogene, sondern um eine nur eingekleidete Aufgabe. Dies muss allerdings nicht automatisch ein negatives Urteil über eine Aufgabe bedeuten, wenn man bei der Wahrheit bleibt und gegenüber den Schülerinnen und Schülern auch nicht so tut, als wäre die Aufgabe eine „echte Anwendung von Mathematik“. Hier steht sie vor allem deswegen, weil sie drei verschiedene Gesichter zeigen kann, die mit unserem Thema zu tun haben.

1. Gesicht: Der erste Gedanke, der einem vielleicht schon beim Lesen der Aufgabe kommt, sind folgende direkten Proportionalitäten:

$$\text{Flächenmaß} \sim \text{Grasmenge} \sim \begin{cases} \#\ \text{Wochen} \\ \#\ \text{Rinder} \end{cases} .$$

Das *Flächenmaß* ist also direkt proportional zur *Anzahl der Rinder* und zur *Anzahl der Wochen*, daher auch zum „Produkt“. Dieses Produkt könnte sogar einen eigenen Namen erhalten, z. B. *Anzahl der Rinderwochen*, wobei eine *Rinderwoche* jene *Grasmenge* ist, die ein Rind pro Woche frisst (ein Pendant dazu wäre z. B. der Terminus *Manntag*: jene Arbeitsmenge, die ein Mann an einem Tag vollbringen kann).

Fläche (ha)	(# Wo) · (# Ri)
30	$16 \cdot 45$
12	$10 \cdot 20$
20	$16 \cdot x$

Ein Dreisatz (erste, dritte Zeile) liefert $16 \cdot x = \dfrac{(16 \cdot 45) \cdot 20}{30} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 30}$.

Aber wozu ist dann die zweite Zeile ??

Wenn man die zweite Zeile für den Dreisatz verwendet:

$$16 \cdot x = \frac{(10 \cdot 20) \cdot 20}{12} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 20\frac{5}{6}} .$$

So gesehen handelt es sich – prima vista – um eine **widersprüchliche Aufgabe!**

2. Gesicht: **Ein Blick zurück!**

16 bzw. 10 Wochen sind eine ganz schön lange Zeit: 4 bzw. $2\frac{1}{2}$ Monate entsprechen einer ganzen bzw. mehr als einer halben Sommersaison !

Da *wächst* das Gras ja auch *nach* während der Weidezeit !!!
Wir müssen also auch irgendwie das Nachwachsen des Grases berücksichtigen!

Einfachste Annahme: Das Gras wachse *gleichmäßig* nach, d. h. auf jedem ha wachse pro Woche die selbe Grasmenge w nach:

$w :=$ jene Grasmenge (in einer geeigneten Einheit), die pro ha und pro Woche nachwächst

Wir müssen also irgendwie dieses Wachstum w berechnen und ... doch halt! :

In der Angabezeile 1 und in der Fragezeile 3 handelt es sich ja jeweils um **die selbe Zeit** (16 Wochen), so dass wir trotz „Berücksichtigung“ des Grasnachwachsens den konkreten Wert w vielleicht gar nicht brauchen?

Fläche (ha)	Wochen	Rinder
30	16	45
20	16	x

Klar, trotz des gleichmäßigen Nachwachsens des Grases:

Wenn auf F **ein** Rind eine gewisse Zeit fressen kann, so können auf einer **doppelt** so großen Fläche $2F$ **zwei** Rinder die selbe Zeit fressen!

R_1 auf F	R_2 auf F

Also gilt bei *fester Zeitdauer des Abfressens* der Weide folgende *direkte Proportionalität* :

Flächenmaß $\sim$ Anzahl der Rinder .

Auch bei „Berücksichtigung“ des Graswachstums (den konkreten Wert w brauchen wir gar nicht) ergibt sich der selbe Dreisatz wie oben (nur ohne „16“):

Fläche (ha)	Rinder
30	45
20	x

$$x = \frac{45 \cdot 20}{30} = 30 \quad \text{Rinder .}$$

So gesehen handelt es sich nicht um eine widersprüchliche, sondern um eine **überbestimmte Aufgabe:** wegen der „zufällig“ gleichen Wochenzahlen in einem Angabe- und im Fragetripel ist das zweite Angabetripel *überflüssig*, dort könnten „beliebige“ (nicht ganz wörtlich zu nehmen) andere Werte stehen!

Der Unterschied zum „1. Gesicht“ besteht darin, dass nunmehr durch die gedankliche Berücksichtigung des Graswachstums kein Widerspruch zur 2. Angabezeile mehr besteht!

3. Gesicht: Wann ist denn nun ein zweites Angabetripel nötig? Ein zweites Angabetripel (Fläche, Wochen, Rinder) wird bei Berücksichtigung des gleichmäßigen Graswachstums w (eben zu dessen Berechnung!) erst dann benötigt, wenn die Anzahl der Wochen im Fragetripel ungleich jener im Angabetripel ist, z. B.:

Fläche (ha)	Wochen	Rinder
30	16	45
12	10	20
20	8	x

Wir wählen als „Einheit“ der Grasmenge für unsere Grasmengenbilanzen: wieviel Gras anfänglich auf 1 ha steht.

$w :=$ Grasmenge, die pro ha und pro Woche nachwächst,

$f :=$ Grasmenge, die ein Rind pro Woche frisst.

Wir erhalten damit die Gleichungen („vorhandene Menge + nachgewachsene Menge = gefressene Menge“):

$$\begin{aligned} 30 \quad &+ \quad 30 \cdot 16 \cdot w = 45 \cdot 16 \cdot f \\ 12 \quad &+ \quad 12 \cdot 10 \cdot w = 20 \cdot 10 \cdot f \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \boxed{w = \frac{11}{40}\,, \quad f = \frac{9}{40}}$. Daraus erhält man dann auf die selbe Weise:

$$20 + 20 \cdot 8 \cdot \tfrac{11}{40} = x \cdot 8 \cdot \tfrac{9}{40} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 35\tfrac{5}{9}}\,.$$

Also 35 – 36 Rinder können 8 Wochen lang auf 20 ha ernährt werden.

So gesehen handelt es sich um eine (zwar nicht ganz leichte, aber) **„ganz normale“** Aufgabe.

Vielleicht wird in (ferner?) Zukunft das Prädikat „normal“ nicht nur solchen Aufgaben zukommen, bei denen alle vorhandenen Angaben benötigt und alle benötigten Angaben vorhanden sind – ich würde es mir wünschen; hoffentlich werden einmal auch über- bzw. unterbestimmte Aufgaben zumindest „normaler“, wenn schon nicht „ganz normal“!

Literatur:

Frohwein, M. (1996): Unter- und überbestimmte Aufgaben im Mathematikunterricht – ein Unterrichtsversuch zur Mathematisierung in verschiedenen anwendungsbezogenen Problemfeldern in einer Klasse 7. — Pädagogische Hausarbeit im Fach Mathematik, Trier: Staatliches Studienseminar für das Lehramt an Gymnasien

Herget, W. (Hrsg., 1999): Ganz genau und ungefähr. Themenheft: mathematiklehren 93

Herget, W.; Jahnke, Th.; Kroll, W. (2001): Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. — Berlin: Cornelsen

Hering, H. (1996): Berechnung der Körperoberfläche eines Menschen. — In: ISTRON-Band 3, S. 18–22. — Hildesheim: Franzbecker

Humenberger, H. (1995): Über- und unterbestimmte Aufgaben im Mathematikunterricht. — In: Praxis der Mathematik 37, Heft 1, S. 1–7

Jahnke, Th. (1997): Stunden im Stau – eine Modellrechnung. — In: ISTRON-Band 4, S. 70–81. — Hildesheim: Franzbecker

Kirsch, A. (1995): „Verstehen des Verstehbaren“ – auch im anwendungsorientierten Mathematikunterricht. — In: Didaktik der Mathematik 23, Heft 4, S. 250–264

Scholz, D. (2002): Toilettenpapier zu kurz – offensichtlich proportional oder etwa nicht? — In: mathematiklehren 113 (August 2002), S. 8–10

Anschrift des Verfassers:

Hans Humenberger
IEEM, FB Mathematik
Universität Dortmund
D – 44 221 Dortmund

Mail: `Hans.Humenberger@mathematik.uni-dortmund.de`