Paare an einem runden Tisch – das Ménage-Problem

HANS HUMENBERGER, WIEN

Zusammenfassung: *Zum Thema* Paare an einem runden Tisch *gibt es einige interessante Aufgaben, die in der Literatur bekannt sind. Die berühmteste ist das so genannte* Ménage-Problem *(erstmals gestellt von Lucas (1891), siehe Abschnitt 4), ein altes kombinatorisches Problem, dessen „Standardlösung" eigentlich recht kompliziert ist. Die meisten Kombinatorik-Lehrbücher, in denen es überhaupt behandelt wird, gehen nach der Methode von I. Kaplansky vor, der es im Jahr 1943 u. a. mittels relativ komplizierter Rekursionsformeln löste.*

Wir beschäftigen uns mit einigen Aufgaben zum in Rede stehenden Thema und versuchen damit, eine Möglichkeit aufzuzeigen, das Ménage-Problem auf elementarem *Weg zu lösen. Das Thema eignet sich insbesondere für die Lehrerausbildung, ist aber durchaus auch in einem Leistungskurs in der Schule möglich. Auch wenn man dabei nicht zum berühmtesten Problem dieses Themenkreises (Ménage-Problem) vorstoßen will oder kann, so stellen die vorher geschilderten Probleme auch für sich genommen interessante kombinatorische Aufgaben dar.*

0 Vorbemerkung

Die Kombinatorik ist in den letzten Jahren im Schulunterricht eher zurückgedrängt worden. Sie kostet angeblich sehr viel Zeit und der *Nutzen* (d. h. ihre echten *Anwendungsmöglichkeiten*) ist eher gering; die *Anwendungen* in der Stochastik (auch die beurteilende Statistik) wurden immer wichtiger. Die Zurückdrängung der Kombinatorik ist sicher auch eine Folge der *Strukturmathematik* in den Siebzigerjahren, wo es primär um Begriffe, Formeln und gekünstelte (eingekleidete) Aufgaben ging (auch die *Mengenlehre* war im Bereich der Kombinatorik sehr dominant).

Geeignete Zählprinzipien müssen aber nicht in formalistische Strukturmathematik münden, sondern sind ein gutes Grundgerüst für viele in der Stochastik (aber nicht nur dort) wichtige Bereiche: Zählen der günstigen und möglichen Ausgänge bei einem Zufallsexperiment, Ziehen von Stichproben in der beurteilenden Statistik (mit und ohne Zurücklegen), Ausbildung von Heuristiken, diskrete Verteilungen, Fallunterscheiden etc. So gesehen ist die Kombinatorik sicher eine Disziplin, in der viele wichtige mathematische *Grundvorstellungen* und *Grundverständnisse* entwickelt und gestärkt werden können, und zwar durch *einfache* Aufgaben zum Abzählen, wobei diese nicht immer nur an ihrem Realitätsgehalt gemessen zu werden brauchen. P. Bender (1999) sieht in der Kombinatorik „geradezu den Prototyp für die Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen".

1 Zwei elementare Einstiegsaufgaben

Für unsere Aufgabenserie mit Zielrichtung Ménage-Problem brauchen wir im Wesentlichen nur drei Voraussetzungen, wobei die 3. erst im zweiten Kapitel benötigt wird:

- n paarweise verschiedene Objekte können auf $n!$ viele Arten angeordnet werden (vgl. Aufg. 1);
- wenn *Paare* im Spiel sind, ist es oft günstig, die jeweiligen Paare (und nicht die zugehörigen Einzelpersonen) als *Permutations-Objekte* zu betrachten (vgl. Aufg. 2);
- Die Formel des Ein- und Ausschließens[1] (in diesem Zusammenhang natürlich auch „Kombinationen" bzw. „Binomialkoeffizienten").

Aufgabe 1:
Um einen runden Tisch stehen $2n$ Stühle. Auf wie viele Arten können n Paare (d. h. $2n$ Personen) Platz nehmen, so dass niemand neben einer geschlechtsgleichen Person sitzt?

Natürlich muss diese Aufgabe im Unterricht zunächst mit konkreten Werten (z. B. $n = 4$ oder $n = 5$) gestellt werden. Hier aber gleich die allgemeine (einfache) Lösung: Wir denken uns die Stühle nummeriert mit den Zahlen von $1, \ldots, 2n$; da die Damen und Herren offenbar abwechselnd zu sitzen haben, müssen die Damen entweder auf den n ungeraden Stühlen oder auf den n geraden Stühlen sitzen. Insgesamt gibt es also

$$2 \cdot (n!)^2$$

Möglichkeiten (2 Möglichkeiten für die Frauensitze: gerade – ungerade; dann jeweils $n!$ Möglichkeiten,

[1] Oft auch *Ein-Ausschalt-Formel* genannt oder *Prinzip der Inklusion-Exklusion*.

Stochastik in der Schule 26(2006)2 S. 12–19

die Frauen auf die Frauensitze bzw. die Männer auf die Männersitze zu setzen).

Aufgabe 2:
Stellen wir uns vor, wir haben ℓ Einzelpersonen und k Paare, die jeweils nicht getrennt werden dürfen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese k Paare und ℓ Einzelpersonen in eine *Reihe* zu stellen (so dass sie eine *nicht geschlossene* Kette bilden)?

Die Antwort ist einfach: $(k+\ell)!\cdot 2^k$.
Es gibt $(k+\ell)!$ verschiedene Anordnungen der $k+\ell$ unterschiedlichen „Objekte“ (Paare bzw. Einzelpersonen), wobei die k Paare auf jeweils 2 verschiedene Arten in die Reihe gestellt werden können.

Andere Formulierung:
Auf wie viele Arten kann eine nicht geschlossene Menschenkette mit $2n$ Personen gebildet werden, wenn genau k Paare und (dazu passend) $2n-2k$ Einzelpersonen zur Verfügung stehen[2]?

Laut oben: $(2n-k)!\cdot 2^k$.
($2n-k$ Objekte können permutieren; die Formel stimmt auch für $k=0$.)

Durch diese Aufgabe wird schon nahe gelegt, dass es oft günstig ist, *ganze Paare* als „Objekte“ bei Permutationen aufzufassen – eine Vorstellung, die noch wichtig wird.

2 Das geschlechtsneutrale Ménage-Problem

Das geschlechtsneutrale Ménage-Problem: Um einen runden Tisch stehen $2n$ unterscheidbare (also z. B. nummerierte) Stühle und n Paare betreten den Raum. Auf wie viele Arten können diese Platz nehmen, so dass kein Paar nebeneinander zu sitzen kommt (d. h. niemand sitzt neben seiner Partnerin / ihrem Partner)?

Die Lösung dieses geschlechtsneutralen[3] Ménage-Problems (und erst recht des eigentlichen Ménage-Problems, siehe unten) ist vermutlich nicht als völlig selbständige Leistung von den Schülerinnen und Schülern zu erwarten; die Lösung wird einiger Hinweise bedürfen, z. B. auf die Formel des Ein- und Ausschließens (siehe unten). Durch obige einfache Einstiegsaufgabe ist aber einerseits ein wesentlicher Hinweis gegeben, und andererseits sind die gesuchten Anzahlen für kleine n doch selbständig zu finden.

Schülerinnen und Schüler sollen dieses Problem im Unterricht unbedingt zunächst für $n=2$ bzw. $n=3$ selbständig bearbeiten, auch wenn sie noch nicht über eine verallgemeinerungsfähige Strategie verfügen. Der Fall $n=4$ bedarf schon einer weitgehenden *Systematik*, ohne einer solchen verliert man dabei rasch den Überblick. Es ergibt sich:

n	2	3	(4)
Anzahl der Möglichkeiten	8	192	(11 904)

Der Fall $n=2$: Bei 4 Stühlen kommen wir noch ohne Skizze aus: Die Frau F_1 des ersten Paares hat 4 Möglichkeiten, sich einen Stuhl auszusuchen („ladies first“). Der zugehörige Mann M_1 muss dann diametral gegenüber sitzen und das Paar (F_2, M_2) kann die anderen beiden einander diametral gegenüber liegenden Stühle auf 2 Arten besetzen, d. h. insgesamt $4\cdot 2=8$ Sitzmöglichkeiten.

Der Fall $n=3$: F_1 hat nun 6 Möglichkeiten, sich einen Stuhl auszusuchen und ihr zugehöriger Partner M_1 kann sich dann auf 3 Arten setzen: entweder diametral gegenüber (Fall 1) oder einen Platz neben diesem (Fälle 2, 3), wobei die Fälle 2 und 3 natürlich symmetrisch liegen und daher nur einmal betrachtet werden müssen (Abb. 1). Für die gesuchte Gesamtzahl müssen wir also die Summe der Möglichkeiten aus den Fällen 1 bis 3 mit 6 multiplizieren.

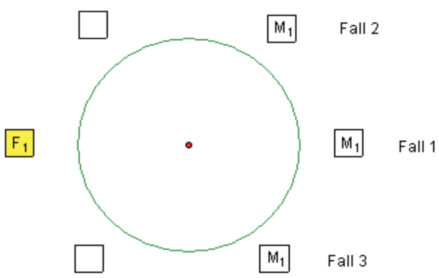

Abb. 1: Drei Möglichkeiten für M_1 bei festem Platz für F_1

- Fall 1: M_1 sitzt diametral gegenüber: Gleichgültig, wo sich F_2 hinsetzt (4 Möglichkeiten), für M_2 gibt es immer 2 Möglichkeiten und dann 2 Möglichkeiten für das Paar (F_3, M_3), so dass sich für Fall 1 insgesamt $4\cdot 2\cdot 2=16$ Möglichkeiten ergeben (Abb. 2).

[2]Wiederum dürfen die Paare nicht getrennt werden! Für die *schwierigere* Frage, wenn die Menschenkette *geschlossen* – also z. B. kreisförmig – wäre, siehe unten.
[3]Der Beiname „geschlechtsneutral“ wird erst weiter unten klar, wenn das eigentliche Ménage-Problem formuliert wird.

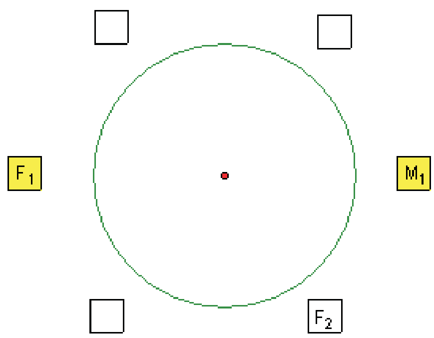

Abb. 2: Zwei Möglichkeiten für M_2

- Fall 2 (analog Fall 3): Gleichgültig, welchen der 4 freien Plätze F_2 wählt, M_2 hat dann nur mehr eine Möglichkeit und das Paar (F_3, M_3) kann sich auf 2 Arten setzen, so dass es im Fall 2 und im Fall 3 insgesamt jeweils $4 \cdot 1 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten gibt (Abb. 3).

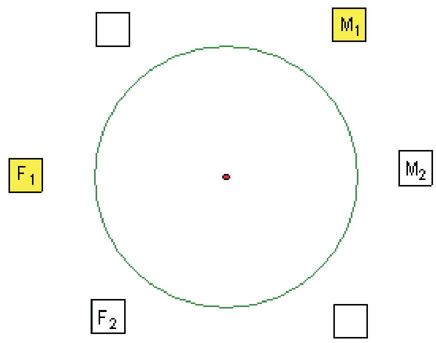

Abb. 3: Eine Möglichkeiten für M_2

Die gesuchte Gesamtzahl bei $n = 3$ beträgt also $6 \cdot (16 + 8 + 8) = 192$.

Bei $n = 4$ *kann* diese Zählstrategie mit viel Geduld und Überblick auch noch zum Ziel führen, ist aber schon relativ aufwändig!

Die allgemeine Lösung: Klarer Weise gibt es $(2n)!$ Möglichkeiten, die $2n$ Personen zu setzen, davon haben wir allerdings jene abzuziehen, bei denen *mindestens ein Paar* nebeneinander zu sitzen kommt. Zieht man für $i = 1, \dots, n$ jene Möglichkeiten ab, bei denen das Paar i nebeneinander zu sitzen kommt, so hat man viele Möglichkeiten doppelt abgezogen; man muss zum Ausgleich wieder jene addieren, die ... . Dies erinnert Vertraute natürlich an die *Formel des Ein- und Ausschließens.*

Bemerkung: Selbst wenn diese Formel im Unterricht bereits besprochen (und vielleicht auch begründet) wurde, so fällt deren Anwendung in verschiedenen Aufgaben (also sie gewissermaßen zum Leben zu erwecken, indem sie in verschiedenen Situationen erfolgreich zunächst „erkannt“ und eingesetzt wird) oft trotzdem noch schwer. Auch in Stochastikkursen an der Universität gehören Aufgaben, in denen die Formel des Ein- und Ausschließens „versteckt“ ist, immer zu den schwierigen!

Diese Formel bezieht sich in ihrer ursprünglichen Form auf das Abzählen von *Vereinigungsmengen*: Wie kann man $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$ zählen? Mit $|A_1| + \cdots + |A_n|$ hat man zu viel, denn die paarweisen Durchschnitte werden dabei ja doppelt gezählt. Zieht man nun alle paarweisen Durchschnitte zum „Ausgleich“ wieder einmal ab, so hat man dabei zu viel abgezogen, denn alle Dreierdurchschnitte wären jetzt ja ganz weg. Also müssen alle Dreierdurchschnitte wieder addiert werden usw. Insgesamt ergibt sich salopp formuliert[4]:

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum |A_i| - \sum_{i_1 < i_2} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{i_1 < i_2 < i_3} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| - \sum_{i_1 < i_2 < i_3 < i_4} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}| + - \dots$$

A_i $(i = 1, \dots, n)$ sei bei uns die Menge der Möglichkeiten, dass das Paar i nebeneinander zu sitzen kommt (der Rest beliebig; da können dann evtl. noch weitere Paare nebeneinander sitzen). Wenn wir mit $\mathbf{m_n}$ die gesuchte Anzahl (bei n Paaren) bezeichnen, dann ist zunächst $m_n = (2n)! - |A_1 \cup \cdots \cup A_n|$, und wir können die Formel des Ein- und Ausschließens anwenden.

Zunächst ist aus Symmetriegründen natürlich klar, dass hier die „Zweierdurchschnitte“ paarweise gleichmächtig sind, ebenso die „Dreierdurchschnitte“ usw. Mit $\mathbf{w_k}$ bezeichnen wir die Mächtigkeit so eines „k-Durchschnitts“, in unserem Kontext also die Anzahl von Möglichkeiten, dass **bestimmte (d. h. vorgegebene!)** k Paare nebeneinander zu sitzen kommen $(k = 1, \dots, n)$ und der Rest beliebig sitzt.

Mit der Formel des Ein- und Ausschließens ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} m_n &= (2n)! - \left(n \cdot w_1 - \binom{n}{2} \cdot w_2 + - \dots \right) \\ &= (2n)! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \binom{n}{k} \cdot w_k \,. \end{aligned}$$

[4] Für einen Beweis verweisen wir auf die Literatur.

(Die jeweiligen k Paare können ja auf $\binom{n}{k}$ Arten aus den n Paaren ausgewählt werden, d. h. es gibt $\binom{n}{k}$ viele „k-Durchschnitte“.)

Mit $w_0 = (2n)!$ kann man auch schreiben

$$m_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot w_k \ .$$

Nun müssen wir also „nur“ noch die w_k berechnen. Auf wie viele Arten können die Leute so Platz nehmen, dass bestimmte k Paare nebeneinander zu sitzen kommen (der Rest kann beliebig sitzen)?

Klar ist zunächst nur der Spezialfall $\boxed{w_1 = 2 \cdot (2n)}$: Die Frau kann sich einen der $2n$ Stühle aussuchen und der zugehörige Mann kann sich dann auf 2 Arten neben sie setzen.

Beim allgemeinen Fall w_k kann obige Aufgabe 2 gute Dienste leisten!

Für $k \geq 1$ setzen wir zunächst ein bestimmtes (beliebiges) von den k Paaren, dies ist eben auf $w_1 = 2 \cdot (2n)$ Arten möglich. Durch dieses Paar werden die restlichen freien Stühle zu einer „nicht geschlossenen Kette“ von der Länge $2n-2$ (der Anfang und das Ende dieser Kette sind durch das erste Paar getrennt). Auf diesen Stühlen müssen nun die anderen $k-1$ Paare so Platz nehmen, dass sie nebeneinander zu sitzen kommen.

Das ist die Situation von Aufgabe 2 mit $k-1$ Paaren und einer „Kettenlänge“ von insgesamt $2n-2$ Personen: Die Anzahl der Einzelpersonen muss hier $(2n-2) - 2(k-1) = 2n-2k$ betragen[5] und die Gesamtzahl der zu permutierenden „Objekte“ daher $(2n-2k) + (k-1) = 2n-k-1$. Es gibt laut oben $\boxed{(2n-k-1)! \cdot 2^{k-1}}$ Möglichkeiten dafür. Durch Multiplikation dieser beiden Werte erhalten wir insgesamt (auch für $k = 0$ richtig!):

$$w_k = (2n) \cdot (2n-k-1)! \cdot 2^k \ . \tag{1}$$

Bemerkung: Mit diesen Werten w_k ist auch die Lösung der *schwierigeren Version* der *anderen Formulierung* in Aufgabe 2 geliefert (vgl. Fußnote 2): Auf wie viele Arten kann eine *geschlossene* Menschenkette mit $2n$ Personen gebildet werden, wenn genau k Paare und (dazu passend) $2n-2k$ Einzelpersonen zur Verfügung stehen?

Eine wichtige Frage[6]: Warum mussten wir hier das erste Paar setzen und konnten dann erst obiges Argument von Aufgabe 2 (für nicht geschlossene Ketten) anwenden? Warum kann man bei einer „geschlossenen Kette“ nicht gleich von vornherein argumentieren: k Paare und $2n-2k$ Einzelne, also $2n-k$ Objekte, sollen gesetzt werden; „daher ist“ w_k „=“ $(2n-k)! \cdot 2^k$?

Setzen wir den Ausdruck für w_k noch oben ein, so erhalten wir

$$\boxed{m_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot (2n) \cdot (2n-k-1)! \cdot 2^k}$$

und das geschlechtsneutrale Ménage-Problem ist gelöst!

Tab. 1 zeigt die Werte von m_n beim geschlechtsneutralen Ménage-Problem für $2 \leq n \leq 10$ (mit CAS berechnet; mit einem Taschenrechner könnte man sie nur – und das nur relativ mühsam – bis $n = 6$ berechnen; mit CAS könnte man natürlich auf Knopfdruck auch für viele weitere und größere n die interessierenden Werte m_n berechnen).

n	m_n
2	8
3	192
4	11 904
5	1 125 120
6	153 262 080
7	28 507 207 680
8	6 951 513 784 320
9	2 153 151 603 671 040
10	826 060 810 479 206 400

Tab. 1: Werte von m_n beim geschlechtsneutralen Ménage-Problem

3 k „Doppelplätze“ bei $2n$ Stühlen im Kreis

Das folgende kombinatorische Problem ist erstens für sich betrachtet interessant und hat zweitens den Vorteil, dass es in unmittelbarem Zusammenhang sowohl zum geschlechtsneutralen Ménage-Problem (siehe oben) als auch zum eigentlichen Ménage-Problem (siehe unten) steht. Es ist in gewisser Weise *das* Bindeglied zwischen ihnen (siehe unten: Weg 1).

Es ist nicht unbedingt nötig, das geschlechtsneutrale Ménage-Problem vorher zu behandeln. Dann ist

[5] Dies ist auch a priori klar, wenn k Paare im Spiel sind und die „Gesamtlänge“ $2n$ beträgt.

[6] An die Schülerinnen und Schüler bzw. Studierenden, falls sie sie nicht selbst stellen.

diese Aufgabe kein Bindeglied, sondern für sich genommen eine Vorbereitung auf das Ménage-Problem (Weg 2).

Problem: Auf wie viele Arten kann man aus $2n$ kreisförmig angeordneten Stühlen genau k „Doppelplätze" überlappungsfrei auswählen?

Mit „Doppelplatz" ist hier die Koppelung zweier benachbarter Stühle gemeint; „überlappungsfrei" soll bedeuten, dass kein Stuhl an zwei Doppelplätzen beteiligt sein soll (siehe Abb. 4; Doppelplätze jeweils durch Rechtecke angedeutet).

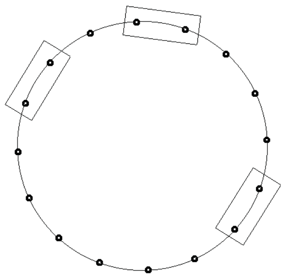

Abb. 4: $k = 3$ Doppelplätze aus $2n = 16$ Stühlen

Wir bezeichnen mit d_k die gesuchte Anzahl der Möglichkeiten.

1. Weg:
Beim ersten Weg muss im Unterricht natürlich explizit darauf hingewiesen werden, dass diese Werte in unmittelbarem Zusammenhang mit den obigen Werten w_k stehen. Oder noch konkreter: Wie können die Werte w_k mittels der Werte d_k, d. h. auf eine andere Art als oben, dargestellt werden?

Durch diesen Hinweis sollte es nicht mehr allzu schwierig sein, zu erkennen (Erklärung anschließend):

$$w_k = d_k \cdot k! \cdot 2^k \cdot (2n-2k)!\,.$$

d_k: Welche „Doppelplätze" werden von den k Paaren besetzt? $k!$: Welches Paar besetzt welchen Doppelplatz? 2^k: Welcher Partner nimmt welchen Stuhl des Doppelplatzes? $(2n-2k)!$: Wohin setzen sich die restlichen $2n-2k$ Einzelpersonen? Klarer Weise müssen die entsprechenden Werte miteinander multipliziert werden.

Da wir in (1) schon eine Darstellung für w_k haben, ist

$$d_k \cdot k! \cdot 2^k \cdot (2n-2k)! = (2n)\cdot(2n-k-1)! \cdot 2^k\,.$$

Daraus erhalten wir unmittelbar für $k = 1, \ldots, n$

$$d_k = \frac{(2n)\cdot(2n-k-1)!}{k!\cdot(2n-2k)!}\,.$$

Wir bestätigen diese Formel a posteriori auch für die speziellen Werte $k = 0,\ 1,\ n$:
$d_0 = 1$, $d_1 = 2n$, $d_n = 2$ – wie erwartet (die Formel stimmt also auch wieder für $k = 0$).

2. Weg:
Nun noch eine „direkte" Herleitung für d_k ohne die Vorkenntnisse über die Werte w_k (wenn man eben nicht vorher das „geschlechtsneutrale Ménage-Problem" bearbeitet hat).

Wir beginnen von vorne; es ist klar: $d_1 = 2n$.

Für d_2 kann der 1. Doppelplatz auf $d_1 = 2n$ Arten gewählt werden; dann bleibt noch eine „Kette" aus $2n-2$ Stühlen über, aus der der zweite Doppelplatz auf $2n-3$ Arten ausgewählt werden kann. Weil die Reihenfolge keine Rolle spielt, müssen wir noch durch 2 dividieren: $d_2 = \frac{(2n)\cdot(2n-3)}{2}$.

Nun zu d_3: Nach der Wahl des 1. Doppelplatzes $(2n)$ bleibt wieder die „Kette" aus $2n-2$ Stühlen über. Da wir darunter noch 2 Doppelplätze aussuchen müssen, haben wir eigentlich nur $2n-4$ Objekte, davon $2n-6$ Einzelstühle. Da die Permutation dieser $2n-6$ Einzelstühle keine neuen Anordnungen der Doppelplätze bringt (Division durch $(2n-6)!$) und insgesamt die Reihenfolge keine Rolle spielt (Division durch $3!$), erhalten wir: $d_3 = \frac{(2n)\cdot\frac{(2n-4)!}{(2n-6)!}}{3!}$. Nun ist der Weg für den allgemeinen Fall d_k schon angedeutet: $k-1$ Doppelplätze in der „Kette" aus $2n-2$ Stühlen, d. h. $2n-k-1$ Objekte und darunter $2n-2k$ Einzelstühle. Wir erhalten damit wie beim 1. Weg:

$$d_k = \frac{(2n)\cdot\frac{(2n-k-1)!}{(2n-2k)!}}{k!} = \frac{(2n)(2n-k-1)!}{k!(2n-2k)!}\,.$$

Durch Erweiterung in Zähler und Nenner mit dem Faktor $2n-k$ ergibt sich eine etwas kürzere Form:

$$d_k = \frac{2n}{2n-k}\cdot\binom{2n-k}{k}\,. \tag{2}$$

Damit ist einerseits dieses Problem gelöst, und mit den Werten d_k können wir andererseits nun relativ einfach das eigentliche Ménage-Problem lösen.

4 Das Ménage-Problem

Das Ménage-Problem: Um einen runden Tisch stehen $2n$ Stühle. Auf wie viele Arten können n Paare (d. h. $2n$ Personen) Platz nehmen, so dass die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind?

- Kein Paar kommt nebeneinander zu sitzen (d. h. niemand sitzt neben seiner Partnerin / ihrem Partner),
- niemand sitzt neben einer geschlechtsgleichen Person.

Wie oben soll auch dieses Problem zunächst für kleine n bearbeitet werden (wenn man noch nicht über die allgemeine Lösungsstrategie verfügt; z. B. für $2 \leq n \leq 4$). Es ergibt sich:

n	2	3	4
Anzahl der Möglichkeiten	0	12	96

Der Fall $n = 2$: Bei 4 Stühlen (Abb. 5) kann F_1 zunächst irgendwo Platz nehmen, dann muss ihr Mann M_1 diametral gegenüber sitzen (er darf ja nicht neben seiner Frau zu sitzen kommen). Die beiden frei bleibenden Stühle haben aber beide F_1 und M_1 als Nachbarn, so dass sich F_2 und M_2 nicht mehr setzen können. Daher gibt es für $n = 2$ (4 Stühle) keine Lösung. Es ist hier schon zu erkennen, dass zwischen einer Frau und einem Mann niemals genau ein Stuhl frei bleiben darf, denn dieser Stuhl könnte nicht den Regeln entsprechend besetzt werden.

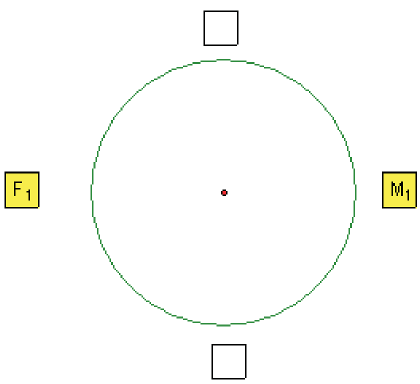

Abb. 5: Kein Platz mehr für F_2 und M_2

Der Fall $n = 3$: Bei 6 Stühlen (Abb. 6) kann F_1 zunächst irgendwo Platz nehmen (6 Möglichkeiten), dann muss ihr Mann M_1 diametral gegenüber sitzen. F_2 muss dann auf einem Nachbarstuhl von M_1 sitzen (2 Möglichkeiten) und M_2 diametral gegenüber. Damit sind auch die Positionen von F_3 und M_3 festgelegt und alle 3 Paare sitzen einander diametral gegenüber. Insgesamt also $6 \cdot 2 = 12$ Sitzmöglichkeiten bei 6 Stühlen und 3 Paaren.

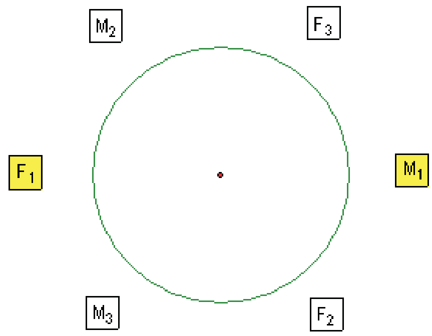

Abb. 6: Paare sitzen einander diametral gegenüber, möglich: $F_2 \leftrightarrow F_3$, $M_2 \leftrightarrow M_3$

Der Fall $n = 4$: Man sieht relativ rasch, dass M_1 hier *nicht* diametral gegenüber von F_1 Platz nehmen kann (warum genau?). Nachdem F_1 irgendwo Platz genommen hat (8 Möglichkeiten) kann M_1 nur auf einem der beiden Nachbarstühle des diametral gegenüber liegenden Stuhls Platz nehmen (Abb. 7). Jede dieser beiden Möglichkeiten kann auf 6 Arten ergänzt werden (wie genau? – die zugehörigen Situationen sind hier nicht mehr auf einen Blick zu überschauen!), so dass sich insgesamt $8 \cdot (6+6) = 96$ Möglichkeiten ergeben.

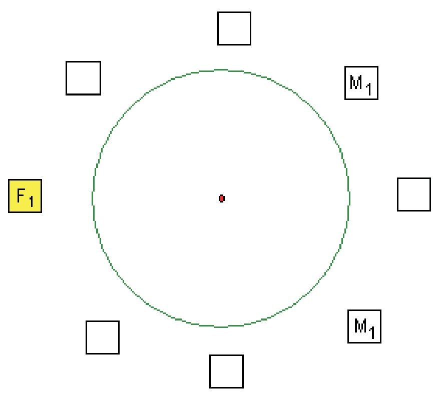

Abb. 7: Zwei Möglichkeiten für M_1

Das eigentliche Ménage-Problem unterscheidet sich vom „geschlechtsneutralen“ durch das zusätzliche Verbot, dass geschlechtsgleiche Personen nebeneinander sitzen[7]. Zunächst ist klar, dass die Frauen entweder auf den n Stühlen mit ungerader Nummer $1,3,\ldots,2n-1$ oder auf den n Stühlen mit gerader Nummer $2,4,\ldots,2n$ sitzen müssen. Daher liegt es nahe, das Problem folgendermaßen lösen zu wollen: Die Damen können zunächst auf $2(n!)$ Arten die Stühle besetzen. Für jede dieser Möglichkeiten gilt es dann noch zu zählen, auf wie viele Arten die Herren jeweils dazwischen Platz nehmen können, so dass keiner von ihnen neben seiner eigenen Frau sitzt[8].

Die Zählung dieser Möglichkeiten entpuppte sich jedoch als recht schwierig[9], aber man kam lange nicht auf die Idee, dass durch einen anderen Ansatz das Problem um einiges einfacher zu lösen ist: *Nicht* die Damen[10] zunächst Platz nehmen lassen. Bogart/Doyle (1986, S. 517) schreiben dazu: „It appears that it was only the tradition of seating the ladies first that made the ménage problem seem in any way difficult. We may speculate that, were it not for this tradition, it would not have taken half a century to discover Touchard´s formula for M_n [siehe unten]. Of all the ways in which sexism has held back the advance of mathematics, this may well be the most peculiar.“

Die allgemeine Lösung: Zur allgemeinen Lösung des Ménage-Problems kann man ganz analog zum „geschlechtsneutralen“ vorgehen, „nur“ muss man dafür Sorge tragen, dass Frauen und Männer abwechselnd sitzen. Dies ist aber mittels obiger Sichtweise und den Werten von d_k sehr leicht möglich, und zwar *ohne zunächst die Frauen auf die ungeraden oder geraden Sitze zu setzen*!

Die Anzahl aller möglichen Sitzordnungen, bei denen Frauen und Männer abwechselnd sitzen, ist $2(n!)^2$ (siehe Aufgabe 1). Davon müssen wir wieder die Anzahl jener Möglichkeiten abziehen, bei denen mindestens ein Mann neben seiner eigenen Frau sitzt.

Ganz analog zu oben ergibt sich zunächst für die gesuchte Anzahl M_n

$$M_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot W_k \,, \tag{3}$$

wobei W_k die Anzahl der Frau-Mann-alternierenden Sitzmöglichkeiten angibt, so dass bestimmte k Paare nebeneinander zu sitzen kommen und der Rest beliebig sitzt (da können dann evtl. noch weitere Paare nebeneinander sitzen; wir wissen bereits: $W_0 = 2(n!)^2$).

In weiterer Folge können wir mittels der Werte d_k schreiben (Erklärung der Faktoren zur Produktbildung wieder anschließend):

$$W_k = 2 \cdot d_k \cdot k! \cdot ((n-k)!)^2 \,.$$

2: Sitzen die Frauen auf den geraden oder auf den ungeraden Stühlen? d_k: Welche „Doppelplätze“ werden von den k Paaren besetzt? $k!$: Welches Paar besetzt welchen Doppelplatz[11]? $((n-k)!)^2$: Wohin setzen sich die restlichen $n-k$ Frauen und $n-k$ Männer?

Setzen wir hier noch für d_k den Ausdruck von (2) ein, so erhalten wir zunächst

$$W_k = 2 \cdot \frac{2n}{2n-k} \cdot \binom{2n-k}{k} \cdot k! \cdot ((n-k)!)^2 \,,$$

wobei – wie verlangt – $W_0 = 2(n!)^2$ ist. Dies eingesetzt in obige Formel (3) für M_n ergibt

$$M_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot 2 \cdot \frac{2n}{2n-k} \cdot \binom{2n-k}{k} \cdot k! \cdot ((n-k)!)^2$$

bzw. nach kurzer Rechnung

$$\boxed{M_n = 2 \cdot n! \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{2n}{2n-k} \cdot \binom{2n-k}{k} \cdot (n-k)!} \,.$$

Durch diese Formel ist nun auch das in der Kombinatorik berühmte Ménage-Problem auf relativ einfache und elementare Art und Weise gelöst (für konkrete

[7] Das war übrigens die Bedingung von Aufgabe 1.

[8] Dies ist die „klassische“ (auf KAPLANSKY zurück gehende) Methode; sie wird in den meisten Kombinatorik-Lehrbüchern dargestellt (z. B. Jeger (1973)) und ist deutlich komplizierter als folgende Lösung.

[9] Immerhin dauerte es mehr als 50 Jahre, dass eine Lösung gefunden wurde: nämlich von 1891, als das Problem erstmals vom französicehen Mathematiker Edouard LUCAS (1842 – 1891) gestellt wurde, bis 1943 Irving KAPLANSKY (geb. 1917) erstmals eine begründete Lösung angab. Zwar gab schon 1934 Jacques TOUCHARD eine Formel für die gesuchten Ménage-Zahlen M_n an, blieb aber einen Beweis schuldig – siehe Literaturverzeichnis.

[10] Und auch nicht die Herren!

[11] Innerhalb der Paare bzw. Doppelplätze besteht jetzt keine Tauschmöglichkeit mehr, da die Damen alle entweder auf geraden oder auf ungeraden Stühlen sitzen müssen.

M_n-Werte siehe Tab. 2).

n	M_n
2	0
3	12
4	96
5	3 120
6	115 200
7	5 836 320
8	382 072 320
9	31 488 549 120
10	3 191 834 419 200

Tab. 2: Werte von M_n beim Ménage-Problem

Literatur

Bender, P. (1999): Ein Plädoyer für die Kombinatorik im Unterricht. In: C. Selter und G. Walther (Herausgeber): Mathematikdidaktik als design science. Festschrift für Erich Christian Wittmann. Leipzig: Klett, 33–39.

Bogart, K.P.; Doyle, P.G. (1986): Non-sexist Solution of the Ménage Problem. In: American Mathematical Monthly 93, 514–518.

Jeger, M. (1973): Einführung in die Kombinatorik, Bd. 1. Stuttgart: Klett.

Kaplanski, I. (1943): Solution of the problème des ménages. In: Bull. Amer. Math. Soc. 49, 784–785.

Lucas, E. (1891): Théorie des nombres. Paris: Gauthier-Villars.

Touchard, J. (1934): Sur un problème des permutations. In: C. R. Acad. Sciences Paris 198, 631–633.

Anschrift des Verfassers
Hans Humenberger
Fakultät für Mathematik
Universität Wien
Nordbergstraße 15
A – 1090 Wien
Hans.Humenberger@univie.ac.at