# Ägyptische Brüche

## Darstellung als Summe von Stammbrüchen

HANS HUMENBERGER

**Es wird gezeigt, wie man ausgehend von einfach zu beantwortenden Fragestellungen beim Thema »Ägyptische Brüche« (grob gesprochen: Brüche als Summe verschiedener Stammbrüche darstellen) zu weiter fortgeschrittenen Fragestellungen eine elementare Antwort finden kann. Das Thema eignet sich u. U. auch zu einer Wiederholung der Bruchrechnung, geleitet durch interessante Aufgaben, die auch viele eigenständige Aktivitäten von Schülern zulassen; dabei müssen nicht alle hier behandelten Aspekte abgedeckt werden, in denen auch Beweise und Begründungen eine wichtige Rolle spielen. Darüber hinaus zeigt sich, dass man mit diesem Thema trotz seiner langen Tradition und Elementarität sehr nahe bei bis heute ungelösten Problemen der Zahlentheorie ist.**

### 1 Einleitung

Ägyptische Brüche sind ein sehr altes mathematisches Thema. Die Ägypter hatten noch kein ausgereiftes Stellenwertsystem, sondern eine bildhafte Darstellung von Zahlen (»Hieroglyphen«). Sie hatten bestimmte Symbole für Zahlen, z. B. einen Strich | für 1, zwei Striche || für 2, für 10 gab es ein eigenes Symbol ∩ und andere Zeichen für die weiteren Zehnerpotenzen bis $10^6$. Indem sie über das jeweilige Symbol für eine Zahl eine Art Oval setzten (dies war die Hieroglyphe für Mund, das in diesem Zusammenhang aber Teil bedeutet), bezeichneten sie den zugehörigen Kehrwert (Abb. 1).

Analog verfuhren sie bei den anderen Stammbrüchen[1]. Durch das darüber gesetzte Oval-Symbol konnten sie also jedenfalls Stammbrüche einfach darstellen und damit auch Summen von Stammbrüchen, indem diese nebeneinander geschrieben wurden (Abb. 2).

Man könnte auch

$$\frac{3}{10}=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$$

schreiben, beide Möglichkeiten sind jedenfalls kürzer als

$$\frac{3}{10}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10},$$

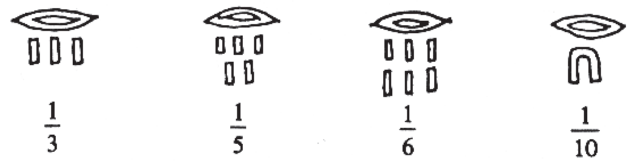


*Abb. 1. Beispiele für ägyptische Stammbrüche*

[1] Für 1/2 und den Nicht-Stammbruch 2/3 waren Sonderzeichen gebräuchlich, auch oft für 1/3, 1/4 und 3/4, das ist in der Literatur nicht einheitlich zu lesen, spielt hier aber keine wesentliche Rolle.



MNU 64/3 (15.4.2011) Seiten 140–147, ISSN 0025-5866, © Verlag Klaus Seeberger, Neuss

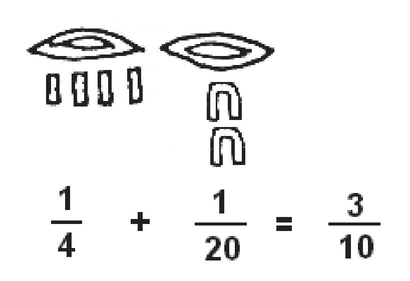


*Abb. 2. Darstellung des Bruchs 3/10 als Summe zweier Stammbrüche*

wofür man drei Symbole bräuchte. So gesehen hätten die Ägypter zur Darstellung der Bruchzahl 14/25 vierzehn Mal das Symbol für 25 mit einem Oval darüber nebeneinander »schreiben« müssen, eine enorme Arbeit, insbesondere wenn die Symbole in Stein gemeißelt werden. Noch dazu wäre dafür der Platzbedarf groß und die Darstellung nicht sehr übersichtlich gewesen. Wenn man aber weiß, dass

$$\frac{14}{25} = \frac{1}{2} + \frac{1}{17} + \frac{1}{850}$$

ist, so kommt man mit drei Zeichen aus: 1/2, 1/17, 1/850. Dieses Prinzip machten sich die Ägypter zu Nutze und stellten ihre Brüche als Summe von Stammbrüchen dar. Eine Tabelle am berühmten Papyrus Rhind (ca. 1650 v. Chr.), die für die ungeraden Zahlen $n$ von 5 bis 101 die Darstellung von $2/n$ als Summe verschiedener[2] Stammbrüchen darstellt, nimmt etwa ein Drittel des Papyrus ein. Es muss also wirklich ein sehr wichtiges Thema in der altägyptischen Mathematik gewesen sein.

Allein aus historischen Gründen – immerhin gehört der Papyrus Rhind zu den ältesten erhaltenen »Stücken Mathematik« – ist es interessant, sich mit dem Thema Ägyptische Brüche auseinanderzusetzen, historische Aspekte können die Motivation bei vielen Lernenden stark erhöhen, was der Mathematikunterricht i. A. gut gebrauchen kann.
Ägyptische Brüche lassen sehr vielfältige selbstständige Aktivitäten der Schüler zu, es gibt Gelegenheiten für relativ einfache Beweise (nicht immer als selbstständige Schüleraktivitäten gedacht) und man ist auch sehr schnell bei noch immer ungelösten Problemen (Zahlentheorie), die – im Gegensatz zu den meisten anderen ungelösten Problemen der Mathematik – auch Schülern und Laien verständlich gemacht werden können.
Dieses Thema kann auf vielerlei Arten vertieft und ausgebaut werden. Es gibt dazu in der Literatur (vgl. auch WALTHER 1999) und im Internet viel Spannendes zu lesen, so dass sich Schüler auch mit weiteren Aspekten selbstständig auseinander setzen können, z. B. im Rahmen von Referaten oder auch Facharbeiten. In Österreich wird in naher Zukunft im Rahmen des Abiturs jeder Schüler in einem Fach eine so genannte »vorwissenschaftliche Arbeit« zu verfassen haben, die im Rahmen des mündlichen Abiturs auch präsentiert werden muss. Auch dafür würde sich dieses Thema gut eignen.

## 2 Einfache Aufgaben zum Einstieg

Bei den interessanten Darstellungen eines Bruches als Summe von Stammbrüchen sollen diese natürlich verschieden sein. So wäre

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$$

im ägyptischen Sinn keine interessante Darstellung. Trotzdem können solche Darstellungen für wertvolle Schüleraktivitäten zunächst zugelassen werden. SCHUPP (2002, 114 ff) hat eine ganze Reihe von Aufgaben zum Thema »Variation von Aufgaben« vorgestellt. Hier in Anlehnung daran eine Auswahl von einfachen Fragestellungen (in Klammer jeweils die Antworten bzw. die Lösungen):

**a)** Kann man jeden Stammbruch als Summe zweier Stammbrüche darstellen?
$\left(\text{Ja: } \frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\right)$

**b)** Ist die Summe zweier Stammbrüche (ggf. nach Kürzen) stets wieder ein Stammbruch?
$\left(\text{Nein: } \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}\right)$

**c)** Ist das Produkt zweier Stammbrüche stets wieder ein Stammbruch?
$\left(\text{Ja: } \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{a \cdot b}\right)$

**d)** Ist jeder Stammbruch als Produkt zweier Stammbrüche darstellbar?
$\Big($Ja: $\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1}$; wenn man diesen Trivialfall ausschließt:
Ja, wenn $n$ keine Primzahl ist.$\Big)$

**e)** Ist jede Bruchzahl als Quotient zweier Stammbrüche darstellbar?
$\left(\text{Ja: } \frac{m}{n} = \frac{1}{n} : \frac{1}{m}\right)$

**f)** Ist jede Bruchzahl als Summe zweier Stammbrüche darstellbar?
(Nein: Sicher nicht Zahlen > 2)

**g)** Ist jede Bruchzahl < 1 irgendwie als Summe von Stammbrüchen darstellbar?
$\left(\text{Ja: } \frac{m}{n} \text{ ist Summe von } m \text{ Summanden } \frac{1}{n}\right)$

Dies sind leicht zu beantwortende Fragen, denen Schüler selbstständig schon in der 6. Schulstufe nachgehen können.

Schon ein wenig anspruchsvoller sind die folgenden Aufgaben. Sie wären einerseits als Wiederholung der Bruchrechnung und andererseits als interessante Aufgaben zum Thema »Problemlösen« z. B. in der 7.–8. Schulstufe oder in einer 9. Schulstufe denkbar. In diesem Sinne kann bei diesem Thema auch das bekannte Spiralprinzip verwirklicht werden.

**h)** Ist jede Bruchzahl < 1 als Summe zweier Stammbrüche darstellbar?

**i)** Kann man jeden Stammbruch als Summe zweier verschiedener Stammbrüche darstellen?

**j)** Kann man jeden Stammbruch als Summe von zwei, drei, vier oder noch mehr verschiedenen Stammbrüchen darstellen?

[2] Selbst wenn man Verschiedenheit der Stammbrüche fordert, braucht eine solche Darstellung nicht eindeutig zu sein, wie schon die obigen Darstellungen für 3/10 zeigen.

**Lösungen:**

**h)** Nein: z. B. bei 4/5 wird man keine solche Darstellung finden; wie kann man dies nun so aufschreiben, dass daraus eine allgemeine Begründung wird? – eine für Schüler vielleicht nicht ganz einfache, aber trotzdem nicht überfordernde Aufgabe: z. B. wegen
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}<\frac{4}{5}$$
müsste mindestens einer der beiden Stammbrüche 1/2 sein; aber
$$\frac{4}{5}=\frac{1}{2}+\frac{3}{10}.$$
Wenn Schüler nicht selbst auf das Gegenbeispiel 4/5 kommen, so kann dies auch von der Lehrkraft vorgegeben werden, die dann zu stellende bzw. zu bewältigende Aufgabe ist die Begründung der Unmöglichkeit.

**i)** Alleine durch Probieren findet man:
$$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6},\ \frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12},\ \frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}\ \ldots$$
und allgemein: $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$,
was man durch Ausrechnen bestätigt. Hier müssen Schüler sicher ein gewisses Maß an Kreativität zeigen, um diese Struktur zu entdecken. Aber sie ist nicht besonders schwierig zu finden, denn $\frac{1}{n+1}$ ist ja der größte Stammbruch, den man aus $\frac{1}{n}$ herausziehen kann, und als Rest ergibt sich der Stammbruch(!) $\frac{1}{n(n+1)}$.

**j)** Wenn man die Erkenntnis von **i)** auf die Teilbrüche $\frac{1}{n+1}$ bzw. $\frac{1}{n(n+1)}$ anwendet, so ist klar, dass man jeden Stammbruch als Summe von zwei, drei, vier oder noch mehr verschiedenen Stammbrüchen darstellen kann.

Auch wenn die Schüler bei den Fragen h), i), j) in selbstständiger Arbeit keine allgemeingültige Antwort mit Begründung finden, so bieten diese Fragen zumindest viel Gelegenheit zum Probieren und zum Rechnen, man hat dann zumindest den positiven Effekt des Übens für die Schüler. HEINRICH WINTER hat in diesem Zusammenhang einmal von »entdeckendem Üben und übendem Entdecken« gesprochen. Für die Begründung können dann auch entsprechende Hinweise von der Lehrkraft kommen. Interessierte Schüler haben aber eine gute Chance, die Antworten auf h), i), j) selbstständig zu finden und so die Kraft der elementaren Algebra bei Begründungen (gemeinsamer Nenner bei der Bruchaddition) in selbstständiger Arbeit zu erleben – denn die Zusammenhänge sind nicht komplex (insbesondere für Schüler einer 9. Schulstufe).

## 3 Weiterführende Fragen

In diesem Themenkreis liegen z. B. folgende Fragen nahe, die auch in der Geschichte eine Rolle gespielt haben. Die zugehörigen Antworten bzw. Einsichten sind mit elementaren Mitteln zu erlangen, jedoch kann man sie kaum auch von Schülern der 9. Schulstufe in selbstständiger Arbeit erwarten. Hier wird deutliche Unterstützung durch die Lehrkraft nötig sein, was aber u. E. nicht unbedingt als negativ einzustufen ist, denn in einer sinnvollen Balance zwischen Konstruktion und Instruktion soll eben auch Instruktion ihren Platz haben.

1. Ist jede Bruchzahl zwischen 0 und 1 als Summe verschiedener Stammbrüche darstellbar? Ist eine solche Darstellung eindeutig (bis auf die Reihenfolge)?

2. Sind die positiven Bruchzahlen mit Zähler 2 bzw. 3 $\left(\text{d. h. } \frac{2}{n} \text{ bzw. } \frac{3}{n}\right)$ als Summe zweier verschiedener Stammbrüche darstellbar?

Zunächst zur Frage **1.**

### 3.1 Bruchzahlen zwischen 0 und 1

Dass eine Darstellung einer Bruchzahl zwischen 0 und 1 als Summe von Stammbrüchen nicht eindeutig ist, kann man noch leicht durch ein Beispiel finden, z. B. oben für $\frac{3}{10}$ oder für $\frac{2}{9}$:
$$\frac{1}{6}+\frac{1}{18}=\frac{2}{9}=\frac{1}{5}+\frac{1}{45}.$$

Durch die Arbeit an einigen Beispielen, in denen Schüler Zerlegungen in verschiedene Stammbrüche finden sollen, kann man schon einige Hinweise bekommen, dass vermutlich jede Bruchzahl zwischen 0 und 1 als Summe verschiedener Stammbrüche darstellbar ist. Die Lehrkraft muss dabei die richtigen Aufgaben stellen, den Lernprozess richtig organisieren, dann können Schüler hier auch viel selbstständig entdecken. Eine nahe liegende Methode ist die folgende:
Man sucht immer den größten Stammbruch, der in der Zahl bzw. im momentanen Rest enthalten ist, z. B. für die Bruchzahl $\frac{13}{17}$: Der größte darin enthaltene Stammbruch[3] ist $\frac{1}{2}$, berechne den Rest
$$\frac{13}{17}-\frac{1}{2}=\frac{9}{34},\ \text{d. h. } \frac{13}{17}=\frac{1}{2}+\frac{9}{34}.$$
Der größte Stammbruch im Rest $\frac{9}{34}$ ist
$$\frac{9}{34+2}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4};$$
berechne wieder den Rest:
$$\frac{9}{34}-\frac{1}{4}=\frac{1}{68};$$
wir sind bei einem Stammbruch gelandet, daher gilt:
$$\frac{13}{17}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{68}.$$

Dieses »Herausziehen« des jeweils größtmöglichen Stammbruches hat einige sehr wichtige Aspekte:
1. Es liegt sehr nahe, so dass Schüler darauf auch selbstständig kommen können.
2. Es bietet viele Rechen- und Übungsanlässe.
3. Es gibt schon den entscheidenden Hinweis auf den allgemeinen Beweis (siehe unten), dass jede Bruchzahl $0<z/n<1$ eine Darstellung als Summe verschiedener

[3] Diesen findet man hier ohne explizit zu rechnen. Allgemein ist der größte in $z/n$ enthaltene Stammbruch dadurch zu finden, dass man $n$ auf das nächste Vielfache von $z$ erhöht: $\frac{13}{17}\to\frac{13}{26}=\frac{1}{2}$. Hier musste man $n=17$ um $k=9$ auf $n+k=26$ erhöhen. Diese Vorgehensweise hilft beim Beweis weiter unten.

Stammbrüche hat, so dass dadurch eine substantielle Lernumgebung im Sinne von WITTMANN 1995 gegeben ist.

Viele Darstellungen von Brüchen als Stammbruchsumme sind nach diesem Prinzip aufgebaut. Durch den ersten Stammbruch hat man jene Bruchzahl, die am nächsten zur gegebenen liegt, z. B. ist $\frac{1}{2}$ der nächste Stammbruch zu $\frac{13}{17}$. Wäre man gezwungen, $\frac{13}{17}$ durch einen einzigen Stammbruch möglichst gut zu approximieren, so würde man $\frac{1}{2}$ nehmen. Durch den zweiten wird dann der Rest bzw. der Fehler (im obigen Beispiel $\frac{13}{17}-\frac{1}{2}$) möglichst gut durch einen Stammbruch approximiert (im obigen Beispiel eben durch $\frac{1}{4}$), durch den dritten dann noch der verbleibende Rest usw.

**Satz 1:** *Jede Bruchzahl $0<\frac{z}{n}<1$ hat eine Darstellung als Summe verschiedener Stammbrüche.*

Zum Beweis zeigt man, dass einerseits die Zähler der gekürzten Restbrüche immer kleiner werden (daraus folgt dann, dass man »eines Tages« durch Abspaltung der größtmöglichen Stammbrüche bei einem Stammbruch, d. h. Zähler 1, als Rest landen muss, also insgesamt bei einer Zerlegung in Stammbrüche) und dass andererseits die größten herausgezogenen Stammbrüche immer größer als die Restbrüche sind (daraus folgt dann, dass die Stammbrüche der gesamten Zerlegung paarweise verschieden sind, denn der herausgezogene Stammbruch hat ja dann »im Restbruch nicht mehr Platz« und kann daher kein zweites Mal auftreten).

Von der Bruchzahl $0<\frac{z}{n}<1$, d. h. $z<n$, wird der größtmögliche Stammbruch $\frac{1}{m}$ subtrahiert. Der Rest sei $\frac{z_1}{n_1}$ (gekürzt), d. h.

$$\frac{z}{n}=\frac{1}{m}+\frac{z_1}{n_1}.$$

Diesen größten Stammbruch kann man dadurch finden, dass man $n$ um $k<z$ zum nächsten Vielfachen von $z$ vergrößert (durch Kürzen soll ja im Zähler eine 1 entstehen):

$$\frac{1}{m}=\frac{z}{\underbrace{n+k}_{z|}}, \text{ d. h.}$$

$$m=\frac{n+k}{z} \text{ bzw. } k=z\cdot m-n.$$

Dadurch erhält man:

$$\boxed{\frac{z_1}{n_1}}=\frac{z}{n}-\frac{1}{m}=\frac{z\cdot m-n}{nm}=\boxed{\frac{k}{nm}}. \tag{1}$$

**Bemerkung:** Wenn Schüler bei einigen Aufgaben bzw. Beispielen den größten Stammbruch durch obige Vergrößerungsmethode des Nenners ($k$ addieren) finden und dann die zugehörigen »Restbrüche« berechnen, kann ihnen auch selbstständig auffallen, dass sich im Zähler zunächst immer die Erhöhungszahl $k$ ergibt (kann evtl. noch gekürzt werden), z. B. ergab sich oben $\frac{9}{34}$ bei der Berechnung des »Restbruches« $\frac{13}{17}-\frac{1}{2}=\frac{9}{34}$, und die Erhöhungszahl war eben $k=9$. Wenn das Schüler schon entdeckt haben, ist (1) nur noch eine allgemeine Bestätigung im Nachhinein.

(1) ist eine entscheidende Beziehung, denn einerseits folgt daraus wegen $k<z$ und $z<n$, insgesamt also $k<n$, sofort

$$\frac{z_1}{n_1}<\frac{1}{m} \tag{2}$$

und andererseits, weil $\frac{z_1}{n_1}$ gekürzt ist, zunächst $z_1\le k$ und wegen $k<z$ auch

$$z_1<z \tag{3}$$

Aus (2) folgt dann, dass die Stammbrüche alle verschieden sind (»der gleiche Stammbruch $\frac{1}{m}$ hat in $\frac{z_1}{n_1}$ nicht mehr Platz«) und aus (3), dass man dabei – nach höchstens $z$ Schritten, denn der Zähler muss ja bei jedem Schritt um mindestens 1 kleiner werden – zwangsweise bei Zähler 1, also bei einem Stammbruch als Rest und somit insgesamt bei einer Zerlegung in verschiedene Stammbrüche landen muss.

Es gibt auch wesentlich kompliziertere Beweise dafür, aber dieser einfache[4] ist auch schon für Schüler in Klasse 7 zu verstehen.
Dieser Algorithmus, um auf eine Zerlegung in verschiedene Stammbrüche zu kommen, heißt »Fibonacci-Algorithmus«, denn er ist schon im berühmten Buch »Liber Abaci« von LEONARDO VON PISA (ca. 1180 – ca. 1240; genannt Fibonacci: »Sohn des Bonaccio«) zu finden. Er ist ein »gieriger« Algorithmus in dem Sinne, dass man dabei immer einen möglichst großen Stammbruch herauszieht. Es gibt auch noch andere Algorithmen für eine Zerlegung in Stammbrüche (vgl. z. B. MAN 2004, 2007, 2009 oder BECK u. a. 2000, 421 ff). Solche Gedanken können ins Spiel kommen, weil der Fibonacci-Algorithmus in so mancher Hinsicht nicht optimal ist: Manchmal könnte man mit weniger Stammbrüchen auskommen als durch ihn suggeriert wird, manchmal gäbe es Zerlegungen mit kleinerem Maximalnenner usw. Wir wollen hier aber im Wesentlichen beim Fibonacci-Algorithmus bleiben, dessen Richtigkeit erstmals von J. J. SYLVESTER bewiesen wurde, weshalb er manchmal auch Fibonacci-Sylvester-Algorithmus heißt (vgl. MAN 2007, 206).

Nun zu Frage **2.**

## 3.2 Bruchzahlen der Form $\frac{2}{n}$

Wir wissen schon aus **i)**, dass man alle Stammbrüche als Summe zweier verschiedener Stammbrüche schreiben kann. Auch bei Brüchen der Form $\frac{2}{n}$ kann man sich rasch davon überzeugen, dass sie als Summe zweier verschiedener Stammbrüche darstellbar sind.

**Satz 2:** *Jeder Bruch der Form $\frac{2}{n}$ ist als Summe zweier verschiedener Stammbrüche darstellbar.*

Wir beweisen diesen Satz durch Fallunterscheidung:

- Wenn $n=2k$ gerade ist, dann ist $\frac{2}{n}=\frac{1}{k}$ ein Stammbruch und nach i) darstellbar.
- Wenn $n=2k-1$ ungerade ist, so findet man die Beispiele

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6},\ \frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15},\ \frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28},$$
$$\frac{2}{9}=\frac{1}{5}+\frac{1}{45},\ \ldots \text{ und allgemein } \frac{2}{2k-1}=\frac{1}{k}+\frac{1}{k(2k-1)}.$$

[4] Ich danke E. WITTMANN (Dortmund) für einen deutlichen Vereinfachungshinweis.

Diesen Zusammenhang haben vielleicht die alten Ägypter schon gewusst (die Beispiele vom Papyrus Rhind sind i. A. von diesem Typ). Man kann dies relativ leicht finden, weil $\frac{1}{k}$ der größte Stammbruch ist, den man von $\frac{2}{2k-1}$ abspalten kann, wobei der Stammbruch (!) $\frac{1}{k(2k-1)}$ als Rest bleibt.

Hier findet das in der Mathematik so wichtige Prinzip der Fallunterscheidung eine einfache Anwendung. Sich systematisch einen Überblick zu verschaffen, indem man alle möglichen Fälle betrachtet, ist eine wichtige und typisch mathematische Vorgehensweise, die hier an einem Beispiel auf elementarem Niveau verdeutlicht werden kann. Dieses Prinzip wird uns in diesem Aufsatz noch öfter begegnen.

### 3.3 Bruchzahlen der Form $\frac{3}{n}$

Es bietet sich an dieser Stelle an, auch noch die Bruchzahlen mit Zähler 3 zu untersuchen. Hier kann man noch relativ leicht zu allgemeinen Aussagen kommen. Bei größeren Zählern ist dies alles andere als leicht und führt sehr schnell zu bis heute ungelösten Problemen (siehe unten). Man befindet sich hier also im unmittelbaren Vorfeld von aktueller mathematischer Forschung.

Wir widmen uns also im Folgenden den Bruchzahlen der Form $\frac{3}{n}$. Welche sind als Summe zweier verschiedener Stammbrüche darstellbar? – Fallunterscheidung:

- Für $n = 3k$ erhält man wieder Stammbrüche $\frac{3}{n} = \frac{1}{k}$, die nach i) darstellbar sind.
- Für $n = 3k - 1$ kann man wieder den größtmöglichen Stammbruch $\frac{1}{k}$ abspalten und erhält als Rest wieder einen Stammbruch:

  $$\frac{3}{3k-1} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k(3k-1)}.$$
- Der Fall $n = 3k + 1$ ist nicht mehr so einfach, weil man hier nicht mehr $\frac{1}{k}$ abspalten kann. Man kann aber den nächst kleineren Stammbruch $\frac{1}{k+1}$ abspalten und mit

  $$\frac{3}{3k+1} = \frac{1}{k+1} + \frac{2}{(k+1)(3k+1)}$$

  und den obigen Erkenntnissen ist klar, dass man $\frac{3}{3k+1}$ als Summe von höchstens drei verschiedenen Stammbrüchen darstellen kann, weil man

  $$\frac{2}{(k+1)(3k+1)}$$

  sicher als Summe zweier verschiedener Stammbrüche schreiben kann.

  Man kann aber sogar noch mehr aussagen: Wenn $k = 2\ell - 1$ ungerade ist, so ist

  $$\frac{2}{(k+1)(3k+1)} = \frac{2}{2\ell(3k+1)} = \frac{1}{\ell(3k+1)},$$

  und man hat eine Darstellung von $\frac{3}{3k+1}$ als Summe zweier verschiedener Stammbrüche.

Bei Zähler 3, d. h. Bruchzahlen der Form $\frac{3}{n}$, haben wir somit insgesamt für $n > 1$:

- Alle solche Bruchzahlen kann man als Summe von höchstens drei verschiedenen Stammbrüchen darstellen.
- Nur im Fall $n = 3k + 1$ und $k = 2\ell$ gerade, d. h. $n = 6\ell + 1$ wissen wir noch nicht, ob wir die Maximalzahl drei an Stammbrüchen wirklich ausschöpfen müssen oder ob wir nicht doch mit zwei Stammbrüchen auskommen.

  (Es gilt – Beweis später: $\frac{3}{n}$ ist genau dann nicht als Summe zweier (verschiedener) Stammbrüche darstellbar, wenn alle Primfaktoren von $n$ die Form $6\ell + 1$ haben.) Für $n \neq 6\ell + 1$ sind solche Bruchzahlen jedenfalls immer als Summe von nur zwei verschiedenen Stammbrüchen darstellbar.

### 3.4 Didaktische Bemerkungen

Die Frage, welche Brüche der Form $\frac{2}{n}$ bzw. $\frac{3}{n}$ eine Darstellung als Summe zweier verschiedener Stammbrüche haben, könnte auch von Schülern selbstständig bearbeitet werden, denn die Strategie »ziehe den größten Stammbruch heraus« trägt hier auch in den allgemeinen Fällen. Und diese Strategie ist ja eine durchaus nahe liegende.

Allgemein spielen Begründungen und Beweise bei diesem Thema eine große Rolle, sie ergeben sich zwangsläufig aus den Fragestellungen. In den einfachen Fällen (z. B. bei den Fragen a)–j)) können dies auch selbstständige Schüleraktivitäten sein, bei Kursen zur Mathematikolympiade oder anderen Mathematikzirkeln könnten auch bei den nicht mehr so einfachen Fällen selbstständige Schüleraktivitäten eine Rolle spielen.
Es handelt sich aber in allen Fällen um kurze, gut nachvollziehbare Argumentationen, die in einem möglichen Unterricht in einer normalen Regelklasse von der Lehrkraft kommen müssten. Auch in der elementarmathematischen Ausbildung von Lehramtskandidaten könnten diese Fragestellungen und die zugehörigen Begründungen eine Rolle spielen, hier wieder natürlich mit mehr möglicher Selbstständigkeit der Studierenden.

## 4 Bruchzahlen als Summe zweier verschiedener Stammbrüche

### 4.1 Stammbrüche

Bei manchen Bruchzahlen gibt es verschiedene Darstellungen als Summe zweier verschiedener Stammbrüche. Wir hatten oben schon das Beispiel

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{2}{9} = \frac{1}{5} + \frac{1}{45},$$

aber auch bei Stammbrüchen wie z. B. $\frac{1}{6}$ ist dies möglich. Neben der oben schon gefundenen Darstellung nach dem Prinzip »größter darin enthaltener Stammbruch«

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{42}$$

findet man z. B. auch noch durch Probieren die Darstellungen

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{6} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15}.$$

Der maximale Nenner ist bei diesen Darstellungen kleiner als bei der vorigen.

Wir wollen uns hier mit der Frage auseinander setzen:

*Wenn eine Bruchzahl mindestens eine Darstellung als Summe zweier verschiedener Stammbrüche hat, wie findet man dann alle solche Darstellungen?*

Dabei werden wir auch auf ein leicht nachvollzieh- und handhabbares Kriterium kommen, welche Bruchzahlen überhaupt solche Darstellungen haben.
Wir beschränken uns zunächst auf Stammbrüche, bei denen wir schon wissen, dass sie eine solche Darstellung haben. Welche haben aber mehr als eine? Wie findet man all diese ggf.?
Die Beantwortung dieser Frage ist nicht in selbstständiger Arbeit von den Schülern zu erwarten, sondern mit deutlicher Unterstützung durch die Lehrkraft. Aber es gibt bei diesem Thema für Schüler genug andere Möglichkeiten zum selbstständigen Arbeiten.

Aus der Beziehung

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \text{ mit } x \neq y$$

folgt unmittelbar, dass $x > n$ und $y > n$ sein müssen, d. h. man kann schreiben $x = n + a$ und $y = n + b$ mit $a \neq b$. Wir nehmen o. B. d. A. $a < b$ an.

Nun ergibt sich:

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+a}+\frac{1}{n+b}$$

$$\Leftrightarrow n^2 + na + nb + ab = n^2 + nb + n^2 + na$$

$$\Leftrightarrow n^2 = ab$$

**Satz 3:** *Jedes Paar (a, b) = (Teiler, Co-Teiler) von $n^2$ gibt eine Lösung von $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+a}+\frac{1}{n+b}$.*

Wir wollen dabei nur $a < b$ beachten, denn $a = b$ ergäbe gleiche Stammbrüche und für $a > b$ wäre nur die Reihenfolge der Stammbrüche anders.

Für alle $n$ hat man also als mögliche »Lösung« $a = 1$ und $b = n^2$: Damit ergibt sich dann die oben schon erhaltene Darstellung

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{\underbrace{n+n^2}_{n(n+1)}}.$$

Beim obigen Beispiel $\frac{1}{6}$ erhält man: Die Paare $(a, \underbrace{b}_{>a})$ = (Teiler, Co-Teiler) von 36 sind: (1,36); (2,18); (3,12); (4,9). Dies ergibt die Darstellungen:

$$\frac{1}{7}+\frac{1}{42}, \frac{1}{8}+\frac{1}{24}, \frac{1}{9}+\frac{1}{18}, \frac{1}{10}+\frac{1}{15},$$

d. h. bei den obigen Darstellungen hat noch eine gefehlt:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{24}.$$

Man hat somit einen nachvollziehbaren Weg, wie man bei einem gegebenen Stammbruch alle möglichen Darstellungen als Summe zweier verschiedener Stammbrüche erhält.

### 4.2 Bruchzahlen der Form $\frac{m}{n}$

Der allgemeine Fall kann ganz analog behandelt werden und sollte daher nicht mehr allzu schwierig sein. Die folgenden Fragen könnten daher auch an Schülergruppen zur selbstständigen Bearbeitung gegeben werden.

- Welche Bruchzahlen $\frac{m}{n}$ haben überhaupt eine Darstellung als Summe zweier verschiedener Stammbrüche?
- Wie findet man alle solche Darstellungen, die zu einer gegebenen Bruchzahl $\frac{m}{n}$ gehören?

Mittels eines ganz ähnlichen Ansatzes wie oben kann man beide Fragen gleichzeitig beantworten. Wir suchen nach einem gut handhabbaren Kriterium, wonach wir entscheiden können, ob eine vorgegebene Bruchzahl, z. B. $\frac{13}{28}$, eine solche Darstellung hat, und wenn ja nach einer Methode, wie man diese Darstellungen rasch finden kann. Wir beschränken uns dabei auf positive Bruchzahlen, wobei a priori klar ist, dass nur Bruchzahlen $\frac{m}{n} \leq \frac{3}{2}$ hierfür in Frage kommen, denn die größten beiden Stammbrüche sind $\frac{1}{1}$ und $\frac{1}{2}$.

Wir setzen analog an

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}, \tag{4}$$

wobei wieder o. B. d. A. $x < y$ mit $m, n, x, y \in \mathbb{N}^*$ gelten soll. Wir schreiben (4) um zu

$$\frac{1}{n/m}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

und können daraus wieder ablesen:

$$x > \frac{n}{m} \Rightarrow x = \frac{n+a}{m} \in \mathbb{N} \text{ und}$$

$$y > \frac{n}{m} \Rightarrow y = \frac{n+b}{m} \in \mathbb{N} \text{ mit } 1 \leq a < b.$$

Damit ist klar: $\frac{m}{n+a}$ und $\frac{m}{n+b}$.

Aus (4) folgt somit:

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{\frac{n+a}{m}}+\frac{1}{\frac{n+b}{m}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{n}=\frac{m}{n+a}+\frac{m}{n+b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}=\frac{1}{n+a}+\frac{1}{n+b}$$

$$\Leftrightarrow n^2 = ab$$

Wir können damit als **Kriterium** formulieren:

- *Eine Bruchzahl $0 < \frac{m}{n} \leq \frac{3}{2}$ ist genau dann als Summe zweier verschiedener Stammbrüche darstellbar, wenn es (a, b) = (Teiler, Co-Teiler) von $n^2$ gibt mit der Eigenschaft $m|(n + a)$ und $m|(n + b)$.*
- *Für die Anzahl verschiedener solcher Darstellungen gilt: Durch jedes so gefundene Paar $(a, \underbrace{b}_{>a})$ ist eine Darstellung von $\frac{m}{n}$ als Summe zweier verschiedener Stammbrüche gegeben:*

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{\frac{n+a}{m}}+\frac{1}{\frac{n+b}{m}}.$$

## 5 Beispiele

1. Wir wenden dieses Wissen einmal beim oben angegebenen Beispiel $\frac{13}{28}$ an: Die Primfaktorzerlegung von

$28^2 = 784$ ist: $28^2 = 2^4 \cdot 7^2$. Daraus kann man eine Tabelle erstellen für die möglichen Werte von $a$ bzw. $b$:

| $a$ | 1 | 2 | 4 | 7 | 8 | 14 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b > a$ | 784 | 392 | 196 | 112 | 98 | 56 | 49 |

Von diesen muss noch die Teilbarkeit $13 \mid (28 + a)$ und $13 \mid (28 + b)$ überprüft werden, und wir sehen, dass schon $13 \mid (28 + a)$ für kein $a$ in obiger Tabelle erfüllt ist. Daher hat $\frac{13}{28}$ keine Darstellung als Summe zweier verschiedener Stammbrüche.

2. Probieren wir es bei der Bruchzahl $\frac{3}{7}$. Hier ist der Nenner von der Form $6\ell + 1$, das war der Fall, bei dem wir oben (Nenner gleich 3) noch keine Aussage machen konnten, ob wir drei oder nur zwei Stammbrüche brauchen. Hier ist $n^2 = 49$ mit dem einzig möglichen Paar[5] $(1,49) =$ (Teiler, Co-Teiler) von 49. Aber 3 teilt nicht $7 + 1 = 8$ (auch nicht $7 + 49 = 56$). Daher hat auch $\frac{3}{7}$ keine Darstellung als Summe zweier verschiedener Stammbrüche.
3. Nun probieren wir es mit der Bruchzahl $\frac{3}{25}$, auch hier ist der Nenner von der Form $6\ell + 1$. Die möglichen Teiler von $25^2 = 625 = 5^4$ sind:

| $a$ | 1 | 5 |
|---|---|---|
| $b > a$ | 625 | 125 |

Das erste Paar $(a, b) = (1,625)$ bringt keine Lösung, weil 3 die Zahl $25 + 1 = 26$ nicht teilt (auch nicht: $25 + 625 = 650$). Aber beim zweiten Paar $(a, b) = (5,125)$ erhalten wir eine Lösung: $3 \mid 25 + 5 = 30$ und $3 \mid 25 + 125 = 150$ und somit:

$$\frac{3}{25} = \frac{1}{10} + \frac{1}{50};$$

wir wissen aber damit auch, dass es keine andere mehr geben kann.

4. Bei der Bruchzahl $\frac{3}{14}$ findet man sogar mehrere Lösungen. Durch die Teiler von $14^2 = 196 = 2^2 \cdot 7^2$ findet man:

| $a$ | 1 | 2 | 4 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| $b > a$ | 196 | 98 | 49 | 28 |

Das zweite Paar $(a, b) = (2,98)$ bringt keine Lösung, weil 3 die Zahl $14 + 2 = 16$ nicht teilt. Aber die anderen drei Möglichkeiten führen zu wirklichen Lösungen. Wir finden hier

$$3 \left| \begin{cases} 14 + 1 = 15 \\ 14 + 4 = 18 \\ 14 + 7 = 21 \end{cases} \right. \quad \text{und} \quad 3 \left| \begin{cases} 14 + 196 = 210 \\ 14 + \ \ 49 = \ \ 63 \\ 14 + \ \ 28 = \ \ 42 \end{cases} \right. ,$$

so dass wir hier sogar drei verschiedene Darstellungen als Summe zweier verschiedener Stammbrüche bekommen:

$$\frac{3}{14} = \frac{1}{5} + \frac{1}{70}, \quad \frac{3}{14} = \frac{1}{6} + \frac{1}{21}, \quad \frac{3}{14} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14}.$$

5. Führt man dieses Verfahren bei $\frac{3}{10}$ bzw. $\frac{2}{9}$ durch, so erkennt man, dass wir oben mit

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{3}{10} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \quad \text{und} \quad \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{2}{9} = \frac{1}{5} + \frac{1}{45}$$

schon alle Lösungen hatten (bei $\frac{2}{9}$ gäbe es nur noch die triviale Zerlegung in gleiche Stammbrüche).

**Anmerkung:** Hier könnten die Schüler auch versuchen, ein Programm zu schreiben (insbesondere in Klasse 9, wenn fächerübergreifend zu Informatik gearbeitet wird), das bei Eingabe einer Bruchzahl entweder die Unmöglichkeit der Darstellung als Summe zweier verschiedener Stammbrüche konstatiert oder eben alle Möglichkeiten auflistet. So könnte einer oft anzutreffenden Forderung nach fächerübergreifendem Unterricht Genüge getan werden.

## 6 Eine weitere Begründung und bis jetzt ungelöste Probleme

Mit Hilfe unseres obigen Kriteriums kann man nun auch den oben schon in einer Fußnote erwähnten Zusammenhang begründen:

**Satz 4:** *$\frac{3}{n}$ ist als Summe zweier verschiedener Stammbrüche darstellbar $\Leftrightarrow$ $n$ enthält nicht nur Primfaktoren von der Form $6\ell + 1$.*

**Beweis** »$\Rightarrow$«: Dazu zunächst eine wichtige Erkenntnis: Wenn man zwei Zahlen von der Form $6\ell + 1$ multipliziert, so ist das Ergebnis auch wieder von dieser Form:

$$(6\ell_1 + 1)(6\ell_2 + 1) = 6(6\ell_1\ell_2 + \ell_1 + \ell_2) + 1\,.$$

Wenn $\frac{3}{n}$ als Summe zweier verschiedener Stammbrüche darstellbar ist, so muss es nach obigem Kriterium eine Zerlegung von $n^2 = a \cdot b$ mit $3 \mid (n + a)$ und $3 \mid (n + b)$ geben. Wenn man nun indirekt annimmt, dass alle Primfaktoren von $n$ von der Form $6\ell + 1$ wären, so müsste wegen der obigen Erkenntnis auch $n$ selbst von der Form $6i + 1$ und auch alle möglichen Teiler $a, b$ von $n^2$ von der Form $6k + 1$ sein. Daher wäre $n + a = 6i + 1 + 6k + 1 = 6(i + k) + 2$, was sicher nicht durch 3 teilbar wäre. Somit haben wir die Annahme, dass alle Primfaktoren von $n$ von der Form $6\ell + 1$ sind, zu einem Widerspruch zu $3 \mid (n + a)$ geführt und sie dadurch widerlegt.
Hier wird also wieder einmal das Prinzip des »indirekten Beweises« angewandt bzw. wiederholt, ein wichtiges Beweisverfahren in der Mathematik. Im Schulunterricht gibt es im Laufe des Curriculums gar nicht so viele Gelegenheiten für solche Beweise (z. B. der klassische Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ nach Euklid). Außerdem spielen elementare Teilbarkeitsregeln (Stoff von Klasse 6) hier wieder eine wichtige Rolle und können so wiederholt werden.

**Beweis** »$\Leftarrow$«: Wenn $n$ nicht nur Primfaktoren von der Form $6\ell + 1$ enthält, so muss $n$ als Primfaktor 2 oder 3 oder einen der Form $6\ell - 1$ enthalten. In allen drei Fällen kann man garantieren, dass es eine gewünschte Darstellung gibt:

- $n = 3n_1$: Dann ist $\frac{3}{n} = \frac{1}{n_1}$ und von Stammbrüchen wissen wir schon, dass sie eine Darstellung als Summe zweier verschiedener Stammbrüche haben.

[5] Wir setzen ja $a < b$ voraus.

- $n = 2n_1$: Wir suchen Faktoren $a \cdot b = n^2 = 4n_1^2$ mit $3|(2n_1 + a)$ und $3|(2n_1 + b)$. Mit $a = n_1$ und $b = 4n_1$ sind diese Teilbarkeitsforderungen erfüllt.
- $n = (6\ell - 1) \cdot n_1$: Wir suchen Faktoren $a \cdot b = n^2 = (6\ell - 1)^2 n_1^2$ mit $3|[\underbrace{(6\ell - 1) \cdot n_1}_{n} + a]$ und $3|[\underbrace{(6\ell - 1) \cdot n_1}_{n} + b]$. Mit $a = n_1$ und $b = (6\ell - 1)^2 n_1$ sind diese Teilbarkeitsforderungen erfüllt.

Dieser Beweis ist zwar nicht allgemein als selbstständige Schülerleistung zu erwarten, sondern bedarf der Unterstützung durch die Lehrkraft, er sollte aber im Unterricht bei diesem Thema trotzdem nicht fehlen: Man ist dabei nämlich ganz nahe an der mathematischen Forschung, ganz nahe an bis heute ungelösten Problemen in der Mathematik. Die Zahlentheorie ist da sicher das Paradegebiet dafür, weil die zugehörigen Fragestellungen bzw. Vermutungen so formuliert werden können, dass auch Schüler verstehen, worum es bei ihnen geht (wie z. B. auch beim so genannten »Großen Fermat« oder bei der »Goldbachvermutung« etc.). In anderen Bereichen sind die noch nicht gelösten Fragen meist schon von der Fragestellung her für Nichtmathematiker gar nicht verständlich. Hier ist dies nicht so. Im Gegenteil, Schüler haben selbst an der Lösung des Problems für Zähler 3 mitgeholfen, sind also mitten in der Materie, aber für Zähler 4 und 5 stellen die analogen Fragen noch ungelöste Probleme dar!

Es gibt zwei relativ berühmte Vermutungen aus dem Umfeld von Erdös, Straus, Sierpinski in diesem Zusammenhang, die u. W. bis heute unbewiesen sind:

- Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ gibt es $a, b, c \in \mathbb{N}$ mit

  $$\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

  Diese Vermutung wurde bis jetzt für alle natürlichen Zahlen $1 < n \le 10^{14}$ bestätigt, d. h. man hat eine Lösung gefunden. Aber wie das nun mal so ist in der Mathematik: Ein Beweis, dass dies für alle $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ gelten würde, ist dies noch lange nicht …
- Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$ gibt es $a, b, c \in \mathbb{N}$ mit

  $$\frac{5}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Wir haben bewiesen, dass man $\frac{3}{n}$ für $n > 1$ immer als Summe von höchstens drei verschiedenen Stammbrüchen darstellen kann. Genau in jenem Fall, dass $n$ nur Primfaktoren der Form $6\ell + 1$ enthält, braucht man diese Maximalanzahl von drei Stammbrüchen, in allen anderen Fällen kommt man sogar mit zwei aus.

Aber eine allgemeine Klassifikation der Bruchzahlen hinsichtlich der Frage:
*Für welche Bruchzahlen braucht man mindestens 3, 4, … Summanden bei einer Darstellung als Summe verschiedener Stammbrüche?*
scheint utopisch zu sein, wenn schon die Zähler 4 und 5 bei obigen Vermutungen bis heute ungelöste Fragen aufwerfen.

## Literatur

Beck, A; Bleicher, M. N.; Crowe, D. W. (2000): Excursions into Mathematics. Massachusetts: A. K. Peters. *Section 6.7 Egyptian Fractions,* 421–434.

Hagedorn, T. R. (2000): A proof of a Conjecture on Egyptian Fractions. *Am. Math. Monthly 107*(1), 62–63.

Man, Yiu-Kwong (2004): Modified Golomb algorithm for computing unit fraction expansions. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol 35*(4), 612–617.

Man, Yiu-Kwong (2007): Computer Algebra meets an ancient egyptian problem. In Shangzhi Li, Dongming Wang, Jingzhong Zhang (Hg.): *Symbolic Computation and Education,* 206–217, World Scientific.

Man, Yiu-Kwong (2009): A study of two-term unit fraction expansions via geometric approach. *Teaching Mathematics and its Applications , 28*(1), 43–47.

Schupp, H. (2002): *Thema mit Variationen. Aufgabenvariation im Mathematikunterricht.* Hildesheim: Franzbecker.

Walther, G. (1999): Design einer Lernumgebung zur Bruchrechnung für Schüler und Lehrerstudenten: Ägyptische Dreiecke. In: Selter, C. et al.: Mathematikdidaktik als design science. Festschrift für E. C. Wittmann. Leipzig: Klett, 234–244.

Wittmann, E. Ch. (1995): Mathematics Education as a Design Science. *Educational Studies in Mathematics 29,* 355–374.

*Prof. Dr. Hans Humenberger, hans.humenberger@univie.ac.at, Universität Wien, Fakultät für Mathematik, Nordbergstraße 15, A-1090 Wien, ist seit 2005 Professor für Mathematik mit besonderer Berücksichtigung der Didaktik der Mathematik. Seine Arbeitsgebiete sind Didaktik der Mathematik (Mathematik als Prozess, realitätsbezogener Mathematikunterricht – »Anwendungsorientierung«, Problemlösen – Heuristik) und Elementarmathematik.*