Internat. Math. Nachrichten
Nr. 219 (2012), 25–43

Elementarmathematische Betrachtungen zum Delischen Problem und zur Winkeldreiteilung

Hans Humenberger
Universität Wien

Die sogenannten vier griechischen Probleme der Konstruktionen mit Zirkel und Lineal waren über Jahrhunderte (eigentlich Jahrtausende) lang Gegenstand mathematischer Aktivitäten bzw. Forschungen: (1) Das „Delische Problem" der Würfelverdoppelung, (2) die Dreiteilung von Winkeln, (3) die Quadratur des Kreises und (4) die Konstruktion regelmäßiger n-Ecke. Hier soll nicht deren Geschichte genauestens betrachtet oder besonders tiefliegende Algebra betrieben werden, sondern wir möchten einen Zugang zu den ersten beiden auf elementarem Niveau aufzeigen, dessen erklärtes Ziel die Schaffung von „Verständnis" (ohne genaue Definition dafür) ist. Dies ist insbesondere für allfällige Lehrerfortbildungen und Seminare für Studierende des Lehramts gedacht, ist aber auch als Thema für ausgesuchte Wahlpflichtfächer, Projekte oder „vorwissenschaftliche Facharbeiten" (neue Reifeprüfung) vorstellbar.

1 Einleitung

Es ist ein oft angesprochenes Defizit des Mathematikunterrichts, dass die einzelnen Stoffgebiete relativ unverbunden nebeneinander stehen. Es wird nach *Vernetzung* der Gebiete verlangt, die Schülerinnen und Schüler sollten sehen, was ein Gebiet mit dem anderen zu tun hat, wie ein Gebiet Eingang in ein anderes findet – zumindest exemplarisch. An anderer Stelle haben wir das Prinzip des Vernetzens sogar als fundamentale Idee bezeichnet und unsere Vorstellungen mit

ISSN 0020-7926

zahlreichen konkreten Beispielen dargestellt (vgl. [7, S. 345ff][1]). Die genannten Probleme (Würfelverdoppelung und Winkeldreiteilung nur mit Zirkel und Lineal) werden vielfach sogar als Paradebeispiele dafür genannt, wie Geometrie und Algebra zusammenhängen können. Doch meist wird das Ergebnis (nämlich deren Unmöglichkeit) wohl nur mitgeteilt und dazugesagt, dass diese geometrischen Probleme erst mit Hilfe der Algebra gelöst werden konnten. Genauer wird im Schulunterricht darauf nur selten eingegangen – für den mathematischen Pflichtunterricht an Gymnasien ist dies auch durchaus verständlich. Als Hintergrundwissen für Lehrkräfte scheint uns jedoch dieses Thema doch eine wichtige Bereicherung zu sein – sowohl als Auffrischung als auch als erstmalige genauere Beschäftigung damit.

Ein bedeutender Aspekt, der für dieses Thema spricht, ist sicher ein *kultureller* bzw. *historischer*. Diese Probleme haben so lange die mathematische Forschung beschäftigt, dass sie in einem gewissen Sinn schon Teil unseres Kulturguts geworden sind. Wir meinen nicht, dass es für *alle* (Lehrkräfte, Studierende, Schülerinnen und Schüler) interessant sein muss, die Geschichte des Problemkreises *Zusammenhänge zwischen Geometrie und Algebra* gleichsam von Alpha bis Omega nachzuschreiten, aber ein elementarer Zugang zu zwei ausgewählten Problemen bietet zumindest die *Möglichkeit*, diesen Stoff auch außerhalb einer Universitätsvorlesung über Algebra durchzuarbeiten, ohne einen großen Begriffsapparat vorher aufzubauen. Und eine Lehrkraft, die Mathematik unterrichtet, sollte zumindest in der Lage sein, zu diesem mathematikhistorisch so bedeutsamen Thema etwas mehr zu erzählen, als dass ein gewisser Zusammenhang zwischen Algebra und Geometrie in den angegebenen Problemen besteht. Insofern versteht sich dieser Beitrag als Anreicherung des nötigen Hintergrundwissens von Lehrkräften.

Dieser Aufsatz soll kein Plädoyer dafür sein, die Algebra in der Schule enorm auszubauen und z.B. stundenlang zu untersuchen, ob gewisse algebraische Strukturen den Namen Gruppe, Ring oder Körper verdienen – darauf ist nämlich der frühere Schulunterricht in den algebraischen Strukturen oft hinausgelaufen, wobei meist selbst gute Schülerinnen und Schüler nicht im entferntesten verstehen konnten, was es mit diesen Namen überhaupt auf sich hat. Im Gegenteil, es ist wirklich zu begrüßen, dass man i.A. von dieser Vorgehensweise abgekommen ist. Wenn in der Schule überhaupt solche Begriffe strapaziert werden,[2] dann soll dies in einer Weise geschehen, in der Schülerinnen und Schüler verstehen können, dass und inwiefern hier ein wichtiges Thema vorliegt. Für eine allfällige Behandlung des Themas mit Schülerinnen und Schülern oder in Lehrveranstaltungen für Stu-

[1] Dort ist zwar die Rede von fundamentalen Ideen der *Angewandten Mathematik*, wovon hier nicht gesprochen werden kann, aber auch losgelöst vom Anwendungsaspekt soll u.E. *Vernetzen* des Wissens eine Leitidee im Unterricht sein.

[2] Dies können wir uns z.B. im Rahmen von Begabtenförderungen mit besonders interessierten Schülerinnen und Schülern, Facharbeiten oder allgemeinen Leistungskursen mit Freiwilligen vorstellen.

dierende des Lehramts an der Universität[3] haben wir deswegen an vielen Stellen konkrete *Aufgaben* in die folgenden Ausführungen angegeben.

2 Der Begriff des Körpers

Es ist besonders wichtig, zu erkennen und zu wissen, wie man zum Begriff des Körpers kommen kann, nämlich durch eine systematische Erweiterung des Zahlbegriffs. In den natürlichen Zahlen kann man nur die Addition und Multiplikation unbeschränkt ausführen, in den ganzen Zahlen auch noch die Subtraktion. Noch lange vor den negativen Zahlen kamen jedoch die *Verhältnisse* (Proportionen) natürlicher Zahlen – also die rationalen Zahlen. Nun konnte man auch uneingeschränkt dividieren und ein Körper (genannt $\mathbb{Q}$ – die *rationalen Zahlen*) war erreicht. Grob gesprochen ist also ein Körper „etwas“, in dem alle vier Grundrechnungsarten uneingeschränkt (ausgenommen die Division durch 0) durchgeführt werden können, weswegen Körper eine besonders wichtige algebraische Struktur sind. Mit anderen Worten: In einem Körper K (z.B. $\mathbb{Q}$) hat die Gleichung

$$a \cdot x + b = c \qquad (a, b, c \in K,\ a \neq 0)$$

stets eine (sogar eindeutige) Lösung $x = a^{-1}[c + (-b)] = \frac{c-b}{a}$. In $\mathbb{Q}$ kam nun jedoch das Problem mit dem Ziehen von Wurzeln (*Radizieren*) hinzu, das in $\mathbb{Q}$ nicht uneingeschränkt möglich war (allein diese Entdeckung löste bei den Griechen bekanntlich einen fulminanten Glaubenskampf aus) und der nächste Schritt war die Konstruktion des Körpers der reellen Zahlen ($\mathbb{R}$) – eine Erweiterung des Körpers der rationalen Zahlen. Hier konnte man zwar uneingeschränkt Wurzeln ziehen, aber nur aus nicht negativen Zahlen, sodass die nächste Erweiterung auf den Körper der *komplexen Zahlen* führte. Es gibt noch viele andere Körper, die aber in der Schule i.A. nicht thematisiert werden und daher auch für Lehrkräfte keine besondere Bedeutung haben.

Für die Griechen bedeutete Mathematik fast ausschließlich *Geometrie*, sie hatten noch keine Körper (geschweige denn Körpererweiterungen und andere wichtige Elemente der Algebra – siehe später) zur Verfügung, diese Systematisierung kam erst viel später. Sie konnten – so gesehen – daher auch noch gar nicht entdeckt haben, dass die Umwandlung geometrischer Probleme in die Sprache der Algebra (durch ein Koordinatensystem) oft sehr nützlich sein kann.

$\mathbb{Q}$ ist eigentlich ein sehr kleiner Körper, er ist sogar der kleinste Teilkörper von $\mathbb{R}$. Dies ist leicht einzusehen: Mit der 0 und der 1 muss wegen der uneingeschränkten Durchführbarkeit der Addition zunächst ganz $\mathbb{N}$, wegen der uneingeschränkten Durchführbarkeit der Subtraktion ganz $\mathbb{Z}$ und wegen der uneingeschränkten Durchführbarkeit der Division eben ganz $\mathbb{Q}$ im Körper enthalten sein.

[3] Allgemein im Folgenden als *Lernende* bezeichnet.

3 Größe von Körpern – erweiterte Körper

3.1 Gibt es Körper zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$?

Es ist doch eine interessante Frage, ob es zwischen den beiden Körpern $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ vielleicht noch andere Körper gibt, oder ob man mit der Hinzunahme eines Elements, das nicht in $\mathbb{Q}$ liegt, bereits ganz $\mathbb{R}$ in den erweiterten Körper aufnehmen muss, ähnlich wie man mit 1 bereits *alle* rationalen Zahlen in $\mathbb{Q}$ aufnehmen muss (siehe oben).

Probieren wir es einmal mit einer der einfachsten und bekanntesten irrationalen Zahlen – mit $\sqrt{2}$. Mit $\sqrt{2}$ müssten jedenfalls alle Zahlen $b\sqrt{2}$ (Multiplikation) und sogar alle Zahlen $a+b\sqrt{2}$ $(a,b\in\mathbb{Q})$ (Addition) enthalten sein. Eine konkrete Aufgabe für Lernende wäre nun, zu untersuchen (bzw. zu beweisen)[4], ob die Menge der Zahlen $a+b\sqrt{2}$ $(a,b\in\mathbb{Q})$ einen Körper bildet.

Da alle Zahlen der angegebenen Form in $\mathbb{R}$ liegen und $\mathbb{R}$ einen Körper bildet, gelten selbstverständlich alle Rechenregeln. Es ist also nur zu untersuchen, ob mit zwei beliebigen Elementen aus der angegebenen Menge – z.B. $x_1 = a_1 + b_1\sqrt{2}$ und $x_2 = a_2 + b_2\sqrt{2}$ – auch $x_1 \pm x_2$ bzw. $x_1 \cdot x_2$ und mit $0 \neq x_3 = a_3 + b_3\sqrt{2}$ auch $x_3^{-1} = \frac{1}{x_3}$ in dieser Menge liegen, also auch die Gestalt $a+b\sqrt{2}$ haben.

Für die Addition, Subtraktion und Multiplikation ist dies besonders einfach:

$$(a_1+b_1\sqrt{2}) \pm (a_2+b_2\sqrt{2}) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\sqrt{2}\,,$$

$$\text{und } (a_1+b_1\sqrt{2})(a_2+b_2\sqrt{2}) = (a_1a_2 + 2b_1b_2) + (b_1a_2 + a_1b_2)\sqrt{2}\,.$$

Bei der Division bzw. beim Kehrwert hilft jener Trick, der auch bei der Division komplexer Zahlen angewandt wird, nämlich eine Erweiterung des Bruchs: Zunächst ist klar, dass mit $x_3 = a_3 + b_3\sqrt{2} \neq 0$ auch $a_3 - b_3\sqrt{2} \neq 0$ ist. Wäre nämlich $a_3 - b_3\sqrt{2} = 0$, so wäre $a_3 = b_3\sqrt{2}$ und somit $b_3 = a_3 = 0$ (weil sonst ja $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ wäre). Es wäre also $x_3 = 0$, was ja ausgeschlossen war. Nach dieser Überlegung dürfen wir beruhigt mit $a_3 - b_3\sqrt{2}$ erweitern und wir erhalten unter Berücksichtigung von $(a_3+b_3\sqrt{2})(a_3-b_3\sqrt{2}) = a_3^2 - 2b_3^2 \neq 0$:

$$(a_3+b_3\sqrt{2})^{-1} = \frac{1}{a_3+b_3\sqrt{2}} = \frac{a_3-b_3\sqrt{2}}{(a_3+b_3\sqrt{2})(a_3-b_3\sqrt{2})}$$

$$= \frac{a_3-b_3\sqrt{2}}{a_3^2-2b_3^2} = \frac{a_3}{a_3^2-2b_3^2} + \frac{-b_3}{a_3^2-2b_3^2}\sqrt{2}\,,$$

also wieder eine Zahl der geforderten Gestalt. Wir haben dadurch gezeigt, dass die oben beschriebene Menge der Zahlen $a+b\sqrt{2}$ $(a,b\in\mathbb{Q})$ einen Körper bildet, den wir mit $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ bezeichnen wollen (der *kleinste* Körper, der $\mathbb{Q}$ und $\sqrt{2}$

[4] Wir halten die Formulierung mit „untersuchen“ statt „beweisen“ für besser, da das Ergebnis noch nicht vorweggenommen wird.

enthält[5]). Dieser ist offenbar ein größerer als $\mathbb{Q}$ (*erweiterter Körper* oder *Erweiterungskörper*[6]), aber ein kleinerer als $\mathbb{R}$.

„Mit welchen anderen Zahlen außer 2 funktioniert dieses Erweiterungsspiel durch eine Quadratwurzel noch?“, könnte eine Frage an die Lernenden lauten. Sie werden schnell auf die Antwort kommen, dass dies mit jeder Zahl funktioniert, deren Wurzel nicht in $\mathbb{Q}$ liegt – „sonst kommt ja nichts Neues dazu!“, könnte eine hier passende Antwort sein.

3.2 Wiederholte Körpererweiterungen

Wir haben eigentlich beim Beweis, dass die Zahlen der Form $a+b\sqrt{2}$ $(a,b\in\mathbb{Q})$ einen Körper bilden, die spezielle Gestalt von $\mathbb{Q}$ oder den konkreten Wert 2 gar nicht gebraucht. Vielmehr war nur wichtig, dass $\mathbb{Q}$ selbst ein Körper war und $\sqrt{2}$ nicht selbst in diesem Körper lag. Deswegen können wir eigentlich auch allgemein formulieren:

Wenn K_0 irgendein Teilkörper von $\mathbb{R}$ ist, so bilden die Zahlen der Form $a+b\sqrt{d}$ $(a,b,d\in K_0,\ d>0,\sqrt{d}\notin K_0)$ wieder einen Körper, den wir mit K_1 bezeichnen wollen. Man nennt diesen neuen (größeren) Körper K_1 einen (quadratischen[7]) *Erweiterungskörper* von K_0.

Man kann nun den gerade neu erhaltenen Körper K_1 wiederum erweitern, d.h. mit $g\in K_1$, aber $\sqrt{g}\notin K_1$ kann man nach ganz analogem Muster erneut einen Erweiterungskörper konstruieren: Die Menge $K_2 := \{e+f\sqrt{g}\ :\ e,f\in K_1,\ g>0,\sqrt{g}\notin K_1\}$ ist dann offenbar analog ein Erweiterungskörper des Körpers K_1.

Dieses Verfahren kann nun prinzipiell beliebig lang fortgesetzt werden, sodass wir eine ganze Folge von Körpern bekommen $(K_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\mathbb{Q}=K_0,\ K_1,\ K_2,\dots,\ K_n)$, wobei jeder Körper K_i ein Erweiterungskörper des vorherigen Körpers K_{i-1} ist. Man kann z.B. dafür schreiben

$$\mathbb{Q}=K_0\subseteq K_1\subseteq K_2\subseteq\cdots\subseteq K_n.$$

Diese fortgesetzten Erweiterungen betrachten wir einstweilen nur als unkompliziertes Gedankenexperiment – wir werden später nochmals darauf zurückkommen; tiefer wollen wir in die Algebra bzw. in die Theorie der Körpererweiterungen (z.B. Grad von Körpererweiterungen, irreduzible Polynome, Zerfällungskörper, Minimalpolynom, etc.) aber gar nicht eindringen. Uns genügt das bloße Verständnis von (quadratischen) Körpererweiterungen (keine große Theorie rundherum),

[5] Man sagt auch: Zu $\mathbb{Q}$ wurde $\sqrt{2}$ „adjungiert“.

[6] Der allgemeine Begriff der Körpererweiterungen und die mit ihm zusammenhängenden Theorien brauchen in diesem Zusammenhang nicht genauer ausgebaut zu werden.

[7] Dieser Name rührt von der Erweiterung durch eine Quadratwurzel her. In weiterer Folge werden wir der Einfachheit halber jedoch nur von „Erweiterungskörpern“ sprechen, andere als quadratische werden nicht vorkommen.

und die Idee des Erweiterns von Zahlbereichen ist ja auch in der Kette $\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ schon vorhanden und stellt insoferne nichts prinzipiell Neues dar.

4 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

4.1 Erklärung und Beschreibung

Es ist in einem gewissen Sinn natürlich schon erstaunlich, dass obige Ausführungen über Körper bzw. Körpererweiterungen etwas mit den Konstruktionen mit Zirkel und Lineal zu tun haben, dazu allerdings erst später. Dieses Erstaunliche, Spannende bzw. Interessante in den Lernenden zu wecken bzw. wach zu halten (Begeisterung schüren bzw. vermitteln) ist allgemein ein Kennzeichen eines erfolgreichen Unterrichts, auf jeder Stufe.

Die einfachsten Hilfsmittel für Konstruktionen sind Zirkel und Lineal, wobei als Lineal nur eine „Schiene“ zu verstehen ist, mit der man zwei Punkte geradlinig verbinden kann. Messen und Rechnen sollten als mögliche Fehlerquellen a priori ausgeschlossen werden. Das Lineal habe also weder eine cm-Skala noch überhaupt irgendeine Markierung. Es dürfen auch keine Punkte am Lineal durch den Konstrukteur markiert werden. Nur Konstruktionen, die mit diesen beiden Werkzeugen allein auszuführen waren, galten bei den Griechen als „wirkliche Konstruktionen“, und so ist es wohl auch nicht verwunderlich, dass man sehr lange versuchte, bei der Dreiteilung eines gegebenen Winkels oder bei der Konstruktion jener Kantenlänge, zu der ein Würfel mit doppeltem Volumen gehört, mit Zirkel und Lineal auszukommen. Es ist aber auch nicht verwunderlich – wie wir sehen werden – , dass dies niemandem gelang.

Bemerkung: Das Problem der Würfelverdoppelung heißt deshalb *Delisches Problem*, weil – einer alten Sage zufolge – bei einem Orakelspruch zu Delos die Verdoppelung des Delischen Altarwürfels gefordert wurde. Die Frage war also, wie kann man aus der vorhandenen Kantenlänge des Altarwürfels die Kantenlänge eines bzgl. des Volumens doppelt so großen Altarwürfels ermitteln?

4.2 Geometrie und Algebra – Konstruktionen in der Sprache der Algebra

Wir werden das Problem der Konstruktionen mit Zirkel und Lineal in die Sprache der Algebra übertragen und feststellen, dass dieses Instrumentarium geeignet ist, die in Rede stehenden Probleme zu lösen. Wir fragen zunächst, welche konstruktiven Operationen mit Zirkel und Lineal ausführbar sind und auf welche Weise wir dadurch zu neuen (konstruierbaren) Punkten kommen können.

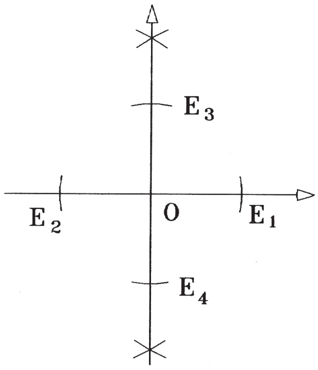

Abbildung 1: Kartesisches Koordinatensystem.

Es sind mit unseren Hilfsmitteln prinzipiell zwei verschiedene Arten von Konstruktionsgängen möglich:

- Mit dem Lineal kann man zwei bekannte Punkte (bereits konstruierte) verbinden und so die Verbindungsgerade zeichnen.
- Mit dem Zirkel kann man bei bekanntem Mittelpunkt und Radius einen ganzen Kreis bzw. einen Kreisbogen zeichnen.

Daraus ergeben sich drei Möglichkeiten, neue Punkte (= Schnittpunkte) zu konstruieren:

1. Schnittpunkt zweier Geraden,
2. Schnittpunkt(e) eines Kreises mit einer Geraden und
3. Schnittpunkt(e) zweier Kreise.

Das Abschlagen einer Strecke auf einer Geraden entspricht in diesem Sinn einem Schneiden einer Geraden mit einem Kreis. Hier wäre eine konkrete Aufgabe für Lernende zur selbstständigen Beschäftigung, wie man z.B. mit Zirkel und Lineal eine Parallele zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt (Parallelverschiebung) oder eine Normale zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt konstruiert, etc.

Für eine Übersetzung dieser möglichen Konstruktionsschritte in die Sprache der Algebra brauchen wir zunächst ein Koordinatensystem mit einer Einheitslänge. Wir geben uns einen beliebigen (ausgezeichneten) Punkt O der Ebene vor (Koordinatenursprung) und einen beliebigen anderen Punkt E_1, den wir mit O verbinden (Gerade $OE_1 = x$-Achse; die Halbgerade von O in Richtung E_1 sei die *positive* x-Achse). Den Abstand $|OE_1|$ definieren wir als Einheitslänge 1 (siehe Abbildung 1).

Wir können O, die x-Achse und die Einheitsstrecke OE_1 in Abbildung 1 leicht zu einem vollständigen kartesischen Koordinatensystem ergänzen, indem wir die y-Achse (Normale zur x-Achse durch O) dazukonstruieren und aus dem Punkt

$E_1(1|0)$ die drei anderen Einheitspunkte $E_2(-1|0)$, $E_3(0|1)$ und $E_4(0|-1)$ – und zwar folgendermaßen:

Den Punkt $E_2(-1|0)$ auf der negativen x-Achse erhalten wir, indem wir in O einstechen, die Strecke OE_1 in den Zirkel nehmen und diese Länge auf die andere Seite abschlagen (Schneiden des Kreises mit Mittelpunkt O und Radius 1 mit der Geraden). Nun schneiden wir die beiden Kreise mit den Mittelpunkten E_1 und E_2 und dem Radius 2 (Streckenlänge von E_1 nach E_2). Die Verbindungsgerade der erhaltenen Schnittpunkte liefert die y-Achse. Darauf können wir erneut die Strecke 1 zweimal abschlagen und erhalten die Punkte E_3 (positive y-Achse) und E_4 (negative y-Achse) – siehe Abbildung 1.

Zur Äquivalenz: Konstruierbarer Punkt in der Ebene $\Longleftrightarrow$ Konstruierbare Zahl auf der Zahlengeraden

Wegen der erwähnten möglichen Parallelverschiebung ist ein Punkt $(x|y)$ in der Koordinatenebene genau dann konstruierbar, wenn die zugehörigen Achsenpunkte $(x|0)$ und $(0|y)$ konstruierbar sind, d.h. wenn die Koordinaten (Zahlen) x und y auf einer Zahlengeraden konstruierbar sind. D.h. die Frage, welche Punkte in der Ebene konstruierbar sind, ist gleichbedeutend mit der Frage, welche Punkte (Zahlen) auf einer Achse (Zahlengerade, z.B. x-Achse oder y-Achse) konstruierbar sind, weshalb wir im Folgenden oft von *konstruierbaren Zahlen* (auf einer Zahlengeraden; statt von konstruierbaren Punkten in der Ebene) sprechen werden.

Mit *Konstruierbarkeit einer reellen Zahl $\pm a$ auf der Zahlengeraden* ist gemeint die Konstruierbarkeit einer Strecke mit Länge $|a|$: Die Konstruktion einer solchen Strecke führt i.A. natürlich über die Zahlengerade in die Ebene hinaus (Schnitt von Kreisen und Geraden), diese Streckenlänge kann aber klarerweise auf der Zahlengeraden nach links oder rechts abgetragen werden. Mit jeder konstruierbaren Zahl x ist natürlich auch ihre Gegenzahl $-x$ konstruierbar, sodass man sich bei den Überlegungen auf positive Zahlen beschränken kann.

Zunächst ist klar, dass alle natürlichen bzw. ganzen Zahlen konstruierbar sind, und zwar durch wiederholtes Abtragen der Einheitsstrecke. Mithilfe des Strahlensatzes überlegen wir auch leicht, dass damit auch alle rationalen Zahlen konstruierbar sind (vgl. Abbildung 2). Der Strahlensatz liefert $\frac{n}{1} = \frac{m}{x}$ bzw. $x = \frac{m}{n}$.

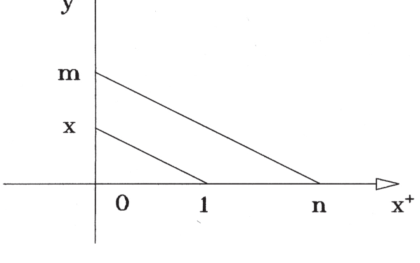

Abbildung 2: Konstruktion rationaler Zahlen (Punkte) – Strahlensatz.

Nun können wir aber nicht nur rationale Zahlen konstruieren, sondern auch Wurzeln von (nicht negativen) rationalen Zahlen $\sqrt{a}$, wie manche Schülerinnen und Schüler vielleicht noch aus der 8. Schulstufe wissen (insbesondere Wurzeln aus natürlichen Zahlen). Dies sogar oft auf mehrfache Weise, mithilfe des Satzes des Pythagoras, indem wir a als Summe oder Differenz von Quadraten darstellen (je nachdem erscheint $\sqrt{a}$ dann als Hypotenusen- oder als Kathetenlänge eines rechtwinkligen Dreiecks), oder mithilfe des *Höhensatzes*, wobei dies keiner zusätzlichen Überlegung mehr bedarf wie die Darstellung als Summe bzw. Differenz zweier Quadrate, denn $a \cdot 1 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$ (siehe Abbildung 3). (Wie ist der zugehörige Konstruktionsgang mit Zirkel und Lineal einzurichten? Genaue Beschreibung! Warum kann $\sqrt{a}$ so erhalten werden? Wie wäre eine Konstruktion von $\sqrt{a}$ mithilfe des Kathetensatzes möglich? Wiederholung der Begründungen bzw. der Beweise des Satzes von Pythagoras, des Höhen- bzw. Kathetensatzes – wieder einige konkrete Aufgaben für Lernende.)

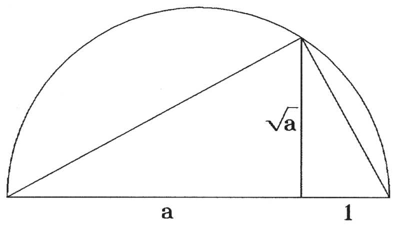

Abbildung 3: Höhensatz zur Konstruktion der Quadratwurzel.

Eine weitere Aufgabe: Die *konstruierbaren* reellen Zahlen (Punkte auf der Zahlengeraden, z.B. auf der x-Achse) bilden einen Körper (einen Teilkörper von $\mathbb{R}$, der nach obigen Überlegungen sicher alle rationalen Zahlen und alle Quadratwurzeln rationaler Zahlen enthält). Hier ist im Wesentlichen zu zeigen: Wenn a und b konstruierbar sind, dann sind auch $a \pm b$, $a \cdot b$ und $\frac{1}{a}$ $(a \neq 0)$ konstruierbar. Wie können also diese Zahlen aus der Kenntnis von a und b konstruiert werden? (Strahlensatz bei $a \cdot b$ und $\frac{1}{a}$.)

4.3 Zusammenhang Konstruierbarkeit – Körper

Jetzt wird die Verbindung zu den oben besprochenen Körpern schon besser sichtbar. Wir fragen uns zunächst, ob wir mit den rationalen Zahlen und mit den Quadratwurzeln aus diesen nun schon alle konstruierbaren Zahlen gefunden haben. Die Antwort darauf ist: *Nein*, denn mit $a, b, \sqrt{d}$ $(a, b, d \in \mathbb{Q}, d > 0,\ \sqrt{d} \notin \mathbb{Q})$ können wir auch z.B. die Zahl $a + b\sqrt{d}$ konstruieren: Diese ist weder rational noch Quadratwurzel einer rationalen Zahl (warum? Beweis als weitere Aufgabe). Wir können sogar alle solchen Zahlen konstruieren, die – wie wir bereits wissen – einen Körper K_1 bilden $(K_0 = \mathbb{Q})$. Aus solchen Zahlen aus K_1 können wir wieder die Quadratwurzel konstruieren und somit in analoger Weise alle Zahlen der Form $e + f\sqrt{g}$ $(e, f, g \in K_1,\ g > 0,\ \sqrt{g} \notin K_1)$, die wiederum einen erweiterten

Körper K_2 bilden. Die obigen Gedanken zu Körpererweiterungen kommen also nun zum Tragen. Dieses Gedankenexperiment lässt sich beliebig lange fortsetzen – wir können daher formulieren:

Eine reelle Zahl x ist jedenfalls dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn sie in irgendeinem der oben beschriebenen Erweiterungskörper (ausgehend von $\mathbb{Q}$) liegt, anders formuliert, wenn es eine endliche Folge von Körpern

$$\mathbb{Q} = K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots \subseteq K_n$$

mit $x \in K_n$ gibt, wobei jeder Körper K_{i+1} eine Erweiterung des Körpers K_i ist, also $K_{i+1} = K_i(\sqrt{d_i})$ mit $d_i(>0) \in K_i$ und $\sqrt{d_i} \notin K_i$.

Man könnte die Elemente der Körper K_j vielleicht bezeichnenderweise „Quadratwurzelausdrücke" nennen; gemeint sind damit Ausdrücke, die durch Verschachtelung von Addition, Multiplikation[8] und Wurzelziehen entstehen. Nehmen wir als konkretes Beispiel die Zahl

$$(1+6\sqrt{5})\sqrt{2\sqrt{5}+4\sqrt{3}}.$$

Durch die Adjunktion von $\sqrt{5}$ zu den rationalen Zahlen $K_0 = \mathbb{Q}$ erhalten wir den Körper $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ mit Elementen der Gestalt $a_1 + b_1\sqrt{5}$ $(a_1, b_1 \in \mathbb{Q})$, dem der Ausdruck $2\sqrt{5}$ angehört. Als nächstes adjungieren wir $\sqrt{3}$ zum Körper K_1 und erhalten $K_2 = K_1(\sqrt{3})$, dem der Ausdruck $u = 2\sqrt{5}+4\sqrt{3}$ angehört. Der Körper K_2 besteht ja aus Ausdrücken der Form $a_2 + b_2\sqrt{3}$, wobei a_2 und b_2 Elemente aus K_1, also Ausdrücke von der Form $a_1 + b_1\sqrt{5}$ $(a_1, b_1 \in \mathbb{Q})$ sind. Nun ziehen wir aus $u = 2\sqrt{5}+4\sqrt{3}$ die Wurzel und fügen sie zu K_2. Wir erhalten einen Körper K_3 mit Elementen der Form $a_3 + b_3\sqrt{u}$ $(a_3, b_3 \in K_2)$. Diesem Körper gehört nun einerseits natürlich $\sqrt{u} = \sqrt{2\sqrt{5}+4\sqrt{3}}$ an, und andererseits auch der ganze gegebene Quadratwurzelausdruck $(1+6\sqrt{5})\sqrt{2\sqrt{5}+4\sqrt{3}}$, da ja der Faktor $1+6\sqrt{5}$ sogar aus K_1 und daher erst recht ein Element aus K_2 ist.

Nun erhebt sich die Frage, ob wir damit (mit den verschachtelten Quadratwurzeltermen) alle konstruierbaren Zahlen (Punkte) erfasst haben. Dies ist – wie sich herausstellen wird – tatsächlich der Fall. Um das zu begründen, brauchen wir uns nur daran zu erinnern, wie wir neue Punkte (Zahlen) mit Zirkel und Lineal aus bekannten konstruieren können. Hier gibt es nur die bereits erwähnten drei Möglichkeiten, nämlich (1) Schneiden zweier Geraden, (2) Schneiden einer Geraden mit einem Kreis und (3) Schneiden zweier Kreise, wobei Geraden durch Verbinden zweier bekannter (konstruierbarer) Punkte und Kreise bei bekanntem (konstruierbarem) Mittelpunkt und Radius entstehen können.

Schnitt zweier Geraden. Da es im Folgenden um die konkrete Algebraisierung von Geraden und Kreisen (in der Ebene) geht, wenden wir uns nun wieder der

[8] Hier sind auch Subtraktion und Division eingeschlossen.

ursprünglichen Sichtweise *Punkte in der Ebene* (mit 2 Koordinaten) zu, statt – wie oben mehrfach – Zahlen auf einer Zahlengeraden.

Wir stellen zunächst die Gleichung einer Geraden durch zwei konstruierbare Punkte $A(a_1|a_2)$ und $B(b_1|b_2)$ (konkrete Aufgabe!) auf, wobei die Werte a_1, a_2, b_1, b_2 in einem festen Körper K liegen sollen, der nur bereits als konstruierbar erkannte Zahlen enthält. Wir werden sehen, dass dann auch deren Schnittpunkt bzw. die Koordinaten des Schnittpunktes (falls überhaupt einer existiert) in K liegen. Durch Schneiden von Geraden kann man also keine neuen, nicht in K liegende Punkte, als konstruierbar erkennen (keine Erweiterung von K möglich).

Für die gesuchte Gleichung der Geraden erhalten wir

$$(a_2 - b_2)\,x + (b_1 - a_1)\,y = a_2\,b_1 - a_1\,b_2,$$

d.h. sie ist von der Form

$$u\,x + v\,y = w \qquad \text{mit} \qquad u, v, w \in K.$$

Berechnen wir nun die Koordinaten x_0, y_0 des (als existent vorausgesetzten) Schnittpunkts zweier solcher Geraden, d.h. die Lösung $(x_0|y_0)$ des Gleichungssystems $(u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2 \in K)$

$$\begin{aligned} u_1\,x + v_1\,y &= w_1 \\ u_2\,x + v_2\,y &= w_2, \end{aligned}$$

so sehen wir, dass diese Koordinaten natürlich wieder in K liegen:

$$x_0 = \frac{v_2\,w_1 - v_1\,w_2}{u_1\,v_2 - u_2\,v_1} \qquad \text{und} \qquad y_0 = \frac{u_1\,w_2 - u_2\,w_1}{u_1\,v_2 - u_2\,v_1}.$$

Schnitt eines Kreises mit einer Geraden bzw. zwei Kreisen. Betrachten wir zunächst einmal die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunktskoordinaten a und b und dessen Radius r im oben schon beschriebenen Körper K liegen: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ (mit r liegt auch r^2 in K.) Die Kreisgleichung hat also die Gestalt

$$x^2 + y^2 + k\,x + l\,y = m \qquad \text{mit} \qquad k, l, m \in K.$$

Schneiden wir einen solchen Kreis mit einer Geraden

$$u\,x + v\,y = w \qquad\qquad (u, v, w \in K),$$

so ist dabei eine quadratische Gleichung zu lösen, in deren Lösungsformel nur eine Quadratwurzel auftritt und keine komplexeren Terme. Die Lösung (Schnittpunkt) liegt also entweder in K selbst oder in einer Erweiterung von K durch eine Quadratwurzel, nämlich in $K(\sqrt{d})$, wenn d die in der Lösungsformel der quadratischen Gleichung auftretende Diskriminante bezeichnet. Sie ist von der Form $a_1 + b_1\sqrt{d}$ $(a_1, b_1 \in K)$. Das Schneiden eines Kreises mit einer Geraden kann (wird i.A.) demnach „aus dem Körper K herausführen“, jedoch ist nur eine Körpererweiterung durch eine Quadratwurzel – so wie oben beschrieben – denkbar.

Schneiden wir schließlich zwei Kreise der Form

$$x^2 + y^2 + k_1 x + l_1 y = m_1 \qquad (k_1, l_1, m_1 \in K)$$
$$x^2 + y^2 + k_2 x + l_2 y = m_2 \qquad (k_2, l_2, m_2 \in K),$$

so erhalten wir durch Subtrahieren der beiden Gleichungen eine (lineare) Geradengleichung

$$(k_1 - k_2)\,x + (l_1 - l_2)\,y = m_1 - m_2,$$

aus der wir eine Unbekannte explizieren und in eine der beiden Kreisgleichungen einsetzen können. Der Schnitt zweier Kreise entspricht also rechnerisch dem Schnitt eines Kreises mit einer Geraden, so dass wir aufgrund obiger Überlegungen auch hier sagen können, dass die Koordinaten der Schnittpunkte entweder in K selbst oder in einem (quadratischen) Erweiterungskörper liegen müssen.

Bemerkung: Da der Schnitt der durch Subtraktion erhaltenen Geraden mit einem der beiden gegebenen Kreise dasselbe Ergebnis liefert wie der Schnitt der beiden ursprünglichen Kreise, muss es sich um eine ganz besondere Gerade handeln, nämlich um jene, die eben durch die beiden Schnittpunkte der beiden Kreise geht (falls Schnittpunkte überhaupt existieren – „Potenzgerade“).

Alle mit Zirkel und Lineal in einem Schritt[9] konstruierbaren Punkte liegen also entweder im ursprünglichen Körper K (Schnitt Gerade–Gerade) oder allenfalls in einem quadratischen Erweiterungskörper $K(\sqrt{d})$ (Schnitt Kreis–Gerade und Kreis–Kreis).

Wir haben somit eine genaue algebraische Charakterisierung der mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Zahlen (Punkte) gewonnen bzw. folgenden bekannten Satz bewiesen:

Satz: *Eine Zahl a bzw. ein Punkt $(a_1|a_2)$ ist genau dann konstruierbar, wenn es eine endliche*[10] *Folge von Körpern*

$$\mathbb{Q} = K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots \subseteq K_n$$

mit $a \in K_n$ (bzw. $a_1 \in K_n$ und $a_2 \in K_n$) gibt, wobei jeder Körper K_{i+1} eine quadratische Erweiterung seines jeweiligen Vorgängerkörpers K_i ist – wenn also $K_{i+1} = K_i(\sqrt{d_i})$ mit $d_i (> 0) \in K_i$, aber $\sqrt{d_i} \notin K_i$.

[9] Gemeint ist die Konstruktion *eines* Schnittpunkts.

[10] Für unendlich oftmalige Konstruktionsschritte (= mögliche Erweiterungen) haben wir auf Erden wohl weder den Platz noch die Zeit.

5 Das Problem der Würfelverdoppelung – Delisches Problem

Nun begeben wir uns wieder zurück zu einem unserer Ausgangspunkte, dem Delischen Problem der Würfelverdoppelung, zu dessen Lösung die gewonnene Charakterisierung der konstruierbaren Zahlen gute Dienste leistet.

Nehmen wir den einfachsten Würfel, den Einheitswürfel mit Kantenlänge 1, dieser hat auch Volumen 1. Ein Würfel mit doppeltem Volumen 2 müsste daher eine Kantenlänge von $\sqrt[3]{2}$ haben. Wir werden jedoch in zwei Teilen zeigen, dass $\sqrt[3]{2}$ mit Zirkel und Lineal nicht konstruierbar ist und somit die Unmöglichkeit der Würfelverdoppelung mit diesen Instrumenten beweisen.

Beweis: (vgl. z.B. [1, S. 153f]) Wenn $\sqrt[3]{2}$ konstruierbar wäre, so gäbe es einen Körper K_n, der durch sukzessive quadratische Körpererweiterungen aus $\mathbb{Q}$ entsteht, in dem $x = \sqrt[3]{2}$ läge:

$$\mathbb{Q} = K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots \subseteq K_n.$$

Wenn $x = \sqrt[3]{2} \in K_n$ wäre, so gäbe es offenbar ein $x \in K_n$ mit $x^3 = 2$. Wir zeigen (siehe unten):

$$\exists x \in K(\sqrt{d}) \text{ mit } x^3 = 2 \quad \Longrightarrow \quad \exists y \in K \text{ mit } y^3 = 2. \tag{*}$$

Schrittweise angewandt auf die endliche Folge $\mathbb{Q} = K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \cdots \subseteq K_n$ bedeutet dies:

Wenn es in einem Körper K_n eine Zahl x gäbe, für die $x^3 = 2$ gilt, so gäbe es auch eine solche Zahl in K_{n-1}, dann gäbe es aber auch eine in K_{n-2} usw., bis wir schließlich zu $K_0 = \mathbb{Q}$ kämen. Es müsste also auch eine rationale Zahl ($x \in \mathbb{Q}$) geben mit $x^3 = 2$. So eine Zahl kann es aber bekanntlich nicht geben (es gibt viele verschiedene Beweise für die Tatsache $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$). Durch diesen Widerspruch ist dann alles gezeigt. □

Beweis der Gleichung (*): Angenommen es gibt ein $x \in K(\sqrt{d})$ mit $x^3 = 2$, also

$$(a + b\sqrt{d})^3 - 2 = 0 \qquad \text{mit} \qquad a, b, d \in K,\ d > 0,\ \sqrt{d} \notin K. \tag{2}$$

Daraus erhalten wir

$$0 = \underbrace{a^3 + 3\,a\,b^2\,d - 2}_{=:u} + \underbrace{b\,(3\,a^2 + b^2\,d)}_{=:v}\,\sqrt{d} = u + v\,\sqrt{d}\ . \tag{3}$$

Wäre $v = b\,(3\,a^2 + b^2\,d)$, der Koeffizient von $\sqrt{d}$ in Gleichung (3), ungleich Null, so wäre $\sqrt{d} = -\frac{a^3 + 3\,a\,b^2\,d - 2}{b\,(3\,a^2 + b^2\,d)} \in K$, ein Widerspruch! Daher muss der Koeffizient $v = b\,(3\,a^2 + b^2\,d)$ Null sein.

Wegen $d > 0$ wäre für $b \neq 0$ mit Sicherheit $v \neq 0$, woraus $b = 0$ folgt. Aus Gleichung (2) folgt dann aber, dass $a^3 = 2$ ist mit $a \in K$, also genau das, was wir zeigen wollten. $\square$

Damit haben wir nicht nur die Unmöglichkeit der Delischen Würfelverdoppelung mit Zirkel und Lineal bei Kantenlänge $k = 1$ gezeigt, sondern auch die *generelle* Unmöglichkeit: Bei einer Kantenlänge $k \neq 1$ des Ausgangswürfels (k gegeben) wäre der Wert $k \cdot \sqrt[3]{2}$ zu konstruieren, was unmöglich ist, wenn $\sqrt[3]{2}$ nicht konstruierbar ist.

Bemerkung: Man könnte den Beweis auch etwas anders formulieren (Verallgemeinerung siehe unten): Wenn $a + b\sqrt{d}$ Nullstelle des kubischen Polynoms $p(x) := x^3 - 2$ ist, so ist auch $a - b\sqrt{d}$ eine Nullstelle (dies sieht man z.B. durch: $0 = p(a+b\sqrt{d}) = u + v\sqrt{d} \implies v = u = 0$ und $p(a-b\sqrt{d}) = u - v\sqrt{d} = 0$). Da p wegen der strengen Monotonie nur eine einzige reelle Nullstelle haben kann, folgt $b = 0$.

6 Das Problem der Winkeldreiteilung

Hier kann nicht mehr von einer generellen Unmöglichkeit[11] einer Winkeldreiteilung durch Zirkel und Lineal gesprochen werden, sondern nur mehr von der Unmöglichkeit eines Verfahrens, das allgemein, für jeden beliebigen Winkel, eine Lösung brächte. So ist z.B. ein Winkel von $\alpha = \frac{\pi}{2} = 90°$ sicher in drei gleich große Teilwinkel zu je $\frac{\pi}{6} = 30°$ zerlegbar, weil bekanntlich ein Winkel von $\frac{\pi}{6} = 30°$ konstruierbar ist (wie? genaue Erklärung ist eine Aufgabe für Lernende), und das ist ein Drittel von 90°. Noch einfacher ist ein Drittel von 180°, nämlich 60°, zu konstruieren. Wir brauchen, um die Existenz eines generell funktionierenden Verfahrens zu widerlegen, nur ein Beispiel eines Winkels, den man mit Zirkel und Lineal nicht dritteln kann.

Einen solchen finden wir im (leicht konstruierbaren) Winkel $\frac{\pi}{3} = 60°$, von dem wir zeigen können, dass er nicht gedrittelt werden kann, indem wir nachweisen, dass sein Drittel, nämlich $\frac{\pi}{9} = 20°$, nicht konstruierbar ist (vgl. z.B. [1, S. 154f]).

Dazu halten wir zunächst einmal fest, dass ein Winkel α klarerweise genau dann konstruierbar ist, wenn $\cos\alpha$ bzw. $\sin\alpha$ konstruiert werden können. Es genügt daher, zu zeigen, dass z.B. $\cos\frac{\pi}{9} = \cos 20°$ nicht konstruierbar ist (warum genügt das? Begründung ist eine Aufgabe).

Als Voraufgabe leiten wir den Summensatz über den Kosinus eines dreifachen

[11] Wie beim Delischen Problem.

Winkels her (konkrete Aufgabe – elementare Trigonometrie). Wir erhalten

$$\begin{aligned}\cos(3\alpha) &= \cos(2\alpha+\alpha) = \cos(2\alpha)\cos\alpha - \sin(2\alpha)\sin\alpha \\ &= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha - (2\sin\alpha\cos\alpha)\sin\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha \\ &= \cos^3\alpha - 3(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.\end{aligned}$$

In der schließlich erhaltenen Beziehung $\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ nehmen wir nun $\alpha = \frac{\pi}{9} = 20^\circ$. Mit $\cos\alpha = \cos 20^\circ = u$ und wegen $\cos(3\alpha) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ erhalten wir die Gleichung $\frac{1}{2} = 4u^3 - 3u$ bzw. $8u^3 - 6u - 1 = 0$. Setzen wir hier noch $x = 2u$, so ergibt sich

$$x^3 - 3x - 1 = 0.$$

Wir werden zeigen, dass keine Lösung dieser Gleichung konstruierbar ist, woraus dann folgt, dass auch $\frac{x}{2} = u = \cos 20^\circ$ bzw. $\alpha = 20^\circ = \frac{\pi}{9}$ selbst nicht konstruierbar ist. Damit kann es kein allgemeines Verfahren zur Winkeldreiteilung (Trisektion) geben, da sonst auch ein Drittel von 60° (eben 20°) konstruierbar sein müsste. Wir betrachten zunächst folgenden

Hilfssatz: *Wenn das normierte kubische Polynom $p(x) := x^3 + rx^2 + sx + t$ mit Koeffizienten $r, s, t \in K_0$ die Nullstelle $a + b\sqrt{d} \in K_1$ hat, dann hat es bereits eine Nullstelle in K_0.*

Beweis: Durch *algebraische Rechnung* folgt analog zu oben: Wenn $x_1 = a + b\sqrt{d}$ Nullstelle des kubischen Polynoms $p(x)$ ist, so ist auch $x_2 = a - b\sqrt{d}$ eine Nullstelle: $0 = p(a+b\sqrt{d}) = \cdots = u + v\sqrt{d} \quad \Rightarrow \quad v = u = 0$ und $p(a-b\sqrt{d}) = \cdots = u - v\sqrt{d} = 0$. Wenn $b = 0$ ist, so ist die Behauptung bereits erfüllt. Wenn $b \neq 0$ ist, so ist $x_1 \neq x_2$ und wegen des Wurzelsatzes von Vieta gilt für die dritte Nullstelle $x_3 = -r - (x_1 + x_2) = -r - 2a \in K_0$. □

Wir wenden diesen Hilfssatz sukzessive auf die obige Gleichung $x^3 - 3x - 1 = 0$ an (Polynom mit rationalen Koeffizienten): Wenn $x^3 - 3x - 1 = 0$ eine Lösung in einem Erweiterungskörper K_n hat, so hat sie auch eine Lösung in $K_0 = \mathbb{Q}$; dies kann aber nicht sein:

Wenn es eine Lösung $x = \frac{m}{n}$ $(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$ gäbe, also

$$\left(\frac{m}{n}\right)^3 - 3\,\frac{m}{n} - 1 = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad m^3 - 3mn^2 - n^3 = 0,$$

so gäbe es auch eine, bei der m und n teilerfremd sind (es kann gekürzt werden). Wäre p ein beliebiger Primteiler von m, so teilte p die ersten beiden Summanden obiger Gleichung und müsste daher auch den dritten Summanden $-n^3$ teilen. Aus $p|n^3$ folgte aber $p|n$ (p ist eine Primzahl[12]), was einen Widerspruch zur Teilerfremdheit von m und n darstellte (analog würde $p|m$ aus $p|n$ folgen). Dieser

[12]Eine grundlegende Eigenschaft von Primzahlen, die mitunter auch zur Definition erhoben

Widerspruch tritt nur dann nicht auf, wenn die Zahlen m, n gar keine Primteiler hätten, also $m = \pm 1,\ n = 1$; dann wäre aber $x = \pm 1$, was ebenfalls einen Widerspruch darstellte, denn ± 1 ist sicher keine Lösung von $x^3 - 3x - 1 = 0$. Damit ist alles gezeigt.

Nebenergebnis: Welche Auswirkungen hat unsere Erkenntnis auf die Konstruktion regelmäßiger n-Ecke? (konkrete Aufgabe). Mit der Unmöglichkeit, einen Winkel von 20° mit Zirkel und Lineal zu konstruieren, haben wir nicht nur gezeigt, dass i.A. die Winkeldreiteilung nicht möglich ist, sondern wir können dadurch ohne weiteren Aufwand ein wenig ins Umfeld eines berühmten anderen griechischen Problems gelangen – der *Konstruktion regelmäßiger n-Ecke*. Den Winkel von 20° bräuchte man für die Konstruktion eines regelmäßigen $360 : 20 = 18$-Ecks. Da man Winkel natürlich mit Zirkel und Lineal verdoppeln bzw. halbieren kann, sind mit 20° auch die Winkel $40^\circ,\ 10^\circ$ und 5° nicht konstruierbar. An nicht konstruierbaren regelmäßigen n-Ecken erhalten wir also als Nebenergebnis unserer Betrachtungen: $n = 9, 18, 36, 72, \ldots$ allgemein: $n = 9 \cdot 2^k$ mit $k = 0, 1, 2 \ldots$

7 Das regelmäßige Siebeneck

Es gibt seit Gauß eine genaue Charakterisierung der mit Zirkel und Lineal konstruierbaren regelmäßigen Vielecke. Sein Resultat:

Das regelmäßige n-Eck lässt sich genau dann mit Zirkel und Lineal konstruieren, wenn n eine Zweierpotenz ist oder $n = 2^k \cdot p_1 \cdot \cdots \cdot p_l$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und die p_i paarweise verschiedene Fermat-Primzahlen, d.h. Primzahlen vom Typus $p_i = 2^{2^m} + 1$ mit $m \in \mathbb{N}_0$, sind.

Dieses Resultat ist nicht mit elementaren Mitteln einzusehen, aber immerhin kann man mit komplexen Zahlen und elementaren Mitteln einsehen, dass das regelmäßige Siebeneck nicht konstruierbar ist, vgl. [2, S. 111].

Vorbemerkung: Man überzeugt sich mit komplexen Zahlen leicht: $z = \cos\phi + i\sin\phi \implies \frac{1}{z} = \cos\phi - i\sin\phi$.

Wir wollen die Seitenlänge x des dem Einheitskreis eingeschriebenen regelmäßigen Siebenecks finden. Die Ecken dieses Siebenecks sind die Wurzeln der Gleichung $z^7 - 1 = 0$. Eine Wurzel ist $z = 1$ und durch Abspalten des Linearfaktors

wird, ist: $p|ab \implies p|a$ oder $p|b$. In $\mathbb{Z}$ ist diese Eigenschaft äquivalent mit der Definition durch die Irreduzibilität (p hat nur die trivialen Teiler ± 1 und $\pm p$). In allgemeineren Zahlenwelten ist diese Definition („irreduzibel") jedoch nicht mehr äquivalent mit der genannten Eigenschaft („prim"). Daher gibt es dort die Unterscheidung *irreduzibel* und *prim*.

$z-1$ ergibt sich:

$$\frac{z^7-1}{z-1} = z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1 = 0.$$

Dividiert man diese Gleichung durch z^3, so ergibt sich $z^3+1/z^3+z^2+1/z^2+z+1/z+1=0$ bzw. nach einigen Umformungen

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^3+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2\left(z+\frac{1}{z}\right)-1=0.$$

Mit $z=\cos\phi+i\sin\phi$ ist $z+1/z=2\cos\phi=: y$. Damit ist klar: $z\in\mathbb{C}$ ist genau dann konstruierbar, wenn es y bzw. $\cos\phi$ ist.

Substituiert man in obiger Gleichung noch $y=z+1/z$, so ergibt sich die Polynomgleichung (rationale Koeffizienten):

$$y^3+y^2-2y-1=0\ .$$

Wenn es hier eine konstruierbare Lösung aus K_n gäbe, so müsste es – wie oben bei der Winkeldreiteilung – auch eine rationale Lösung geben (Hilfssatz).

Dies kann aber nicht sein, denn eine rationale Lösung $y=\frac{m}{n}$ mit teilerfremden $m,n\in\mathbb{N}$ wäre gleichbedeutend mit:

$$m^3+m^2n-2mn^2-n^3=0$$

Jeder Primteiler von m wäre also auch einer von n und umgekehrt, sie können also keine Primteiler haben, d.h. $y=\pm 1$. Aber keine der beiden Zahlen ist Lösung obiger Gleichung.

D.h. das regelmäßige Siebeneck ist mit Zirkel und Lineal nicht konstruierbar.

Erstaunlicherweise ist es aber möglich, das regelmäßige Siebeneck durch Papierfalten (Origami) *exakt*[13] zu bekommen (siehe z.B. [6]). So gesehen ist Papierfalten mächtiger als Zirkel und Lineal. Für das regelmäßige Siebeneck gibt es auch gute und einfachere Näherungslösungen mittels Papierfalten, vgl. z.B. [5, S. 5ff]) oder [4].

8 Konstruktionen mittels eines markierten Lineals und Papierfalten (Origami)

Wir haben gezeigt, dass Würfelverdoppelung und Winkeldreiteilung nicht mit Zirkel und Lineal alleine (exakt[14]) durchführbar sind; gleichwohl gibt es Wege, die

[13] Hier ist *theoretische* Exaktheit gemeint. Natürlich ist viel Genauigkeit, Übung und Geschick erforderlich, um ein akzeptables Resultat zu bekommen.

[14] Hier soll sich das Wort *exakt* auf die genaue Durchführung eines Gedankenprozesses beziehen, die praktische Durchführung einer Konstruktion mit Instrumenten ist notwendigerweise

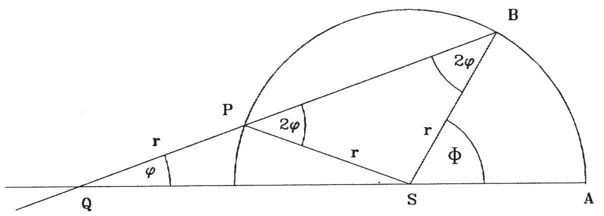

Abbildung 4: Konstruktion für die Winkeldreiteilung mithilfe eines markierten Lineals nach Archimedes.

genannten Konstruktionen mit anderen Hilfsmitteln durchzuführen. Dies wollen wir am Beispiel der Winkeldreiteilung kurz erläutern.

Für die *Dreiteilung des Winkels* gibt es eine alte Konstruktion, die von Archimedes herrührt (siehe Abbildung 4).

1. Gegeben sei ein Winkel Φ mit Scheitel S. Wir zeichnen einen Kreis mit beliebigem Radius r und Mittelpunkt S, der die beiden Winkelschenkel in A bzw. B schneidet.
2. Wir markieren auf dem Lineal eine Strecke der Länge r und legen dieses so an, dass es erstens durch B geht und dass zweitens der eine am Lineal markierte Endpunkt (der Strecke mit Länge r) auf dem Kreis (Punkt P) und der andere Endpunkt auf der Verlängerung von AS über S hinaus zu liegen kommt (Punkt Q).
3. Dann ist der Winkel $\angle PQS =: \varphi$ ein Drittel des gegebenen Winkels Φ.

Der Beweis ist hier ganz einfach: Da das Dreieck PQS gleichschenklig ist, ist auch der Winkel $\angle PSQ = \varphi$ und der Außenwinkel $\angle SPB = 2\varphi$. Da das Dreieck SPB ebenfalls gleichschenklig ist, muss auch der Winkel $\angle SBP = 2\varphi$ sein. Im Dreieck QSB muss nun Φ, der Außenwinkel bei S, gleich der Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel $2\varphi + \varphi$ sein, woraus unmittelbar $\varphi = \frac{1}{3}\Phi$ folgt.

Als eine weitere Möglichkeit sei eine *Papierfaltkonstruktion* (Origami) zur Winkeldrittelung angeführt (siehe Abbildung 5a–f, vgl. [3, S. 44]): Man nehme ein rechteckiges Blatt Papier $ABCD$ (z.B. ein DIN A4-Blatt), wähle einen Punkt $P \in AD$ und falte den zu drittelnden Winkel $\alpha = \angle CBP$. Weiters falte man eine beliebige Parallele EF zu BC und die Mittelparallele GH von EF und BC.

Man faltet dann die Ecke B so ab, dass E auf BP und gleichzeitig B auf GH liegt, markiert die Bildpunkte B' und E' und faltet wieder zurück. Die letzte Faltkante schneidet GH in I. Nun gilt: Die Linien BB' und BI dritteln den Ausgangswinkel $\alpha = \angle CBP$. Der Beweis ist eine schöne elementargeometrische Übungsaufgabe.

ungenau – bedingt durch die Exaktheitsgrenzen der Instrumente und des menschlichen Konstrukteurs.

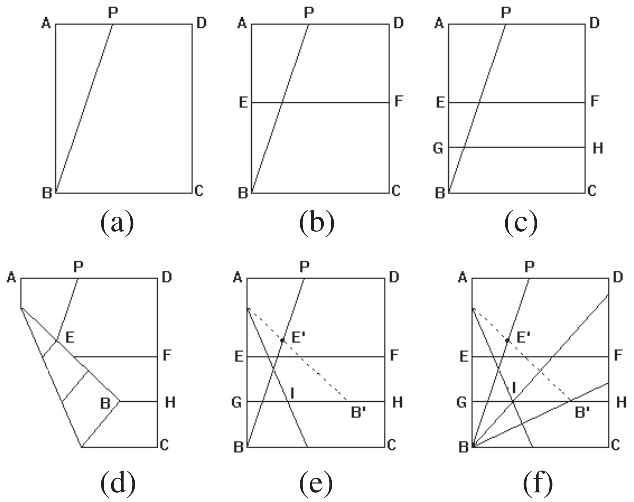

Abbildung 5: Papierfaltkonstruktion für die Winkeldreiteilung.

Literatur

[1] Cigler, J.: *Grundideen der Mathematik*. BI-Verlag 1991.

[2] Courant, R., H. Robbins: *Was ist Mathematik?* Springer 1992.

[3] Henn, H.-W.: *Elementare Geometrie und Algebra*. Vieweg 2003.

[4] Henn, H.-W. (2005): Origamics: Gefaltete Mathematik. In: Henn, H.-W., Kaiser, G. (Hrsg.): *Mathematikunterricht im Spannungsfeld von Evolution und Evaluation*. Festschrift für Werner Blum, 71–80. Franzbecker 2005.

[5] Hilton, P., Pedersen, J.: The unity of mathematics: A casebook comprising practical geometry number theory and linear algebra. *Teaching Mathematics and Computer Science* **1**/1 (2003), 1–34.

[6] Hull, T.C.: Folding Regular Heptagons. In: Pegg, E., Schoen, A.H., Rodgers, T. (Hrsg.): *Homage to a Pied Puzzler*. AK Peters 2009.

[7] Humenberger, H., H.-C. Reichel: *Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht*. BI-Verlag 1995.

Anschrift des Verfassers: *Hans Humenberger, Fakultät für Mathematik der Univ. Wien, Nordbergstraße 15, 1090 Wien. email hans.humenberger@univie.ac.at.*