

# Berührende Kugeln – ein Aufgabenfeld für selbstständiges Problemlösen durch Schüler

HANS HUMENBERGER

## 1 Problemlösen und (Elementar-)Geometrie

In den letzten Jahren ist ein deutlicher Bedeutungsverlust der Geometrie im Schulunterricht festzustellen, was Inhalten wie Stochastik, Analysis, Anwendungsbezügen im Allgemeinen usw. sicher genützt hat. Nach den Erfahrungen des Verfassers ist es aber gerade die Geometrie, die bei vielen Schülern eine gewisse Faszination auszulösen imstande ist, insbesondere im Bereich des Problemlösens.

Im Schuljahr 1997/98 hatten wir einen Vorbereitungskurs auf die Mathematik-Olympiade zu halten. Von den Schülern hörten wir im Verlauf des Kurses öfters Sätze folgender Art: „Machen wir doch wieder Geometrie, da kann man so schön Skizzen machen, Vermutungen aufstellen, sich konkret was vorstellen; sie ist irgendwie lebendiger als das Lösen von Gleichungen oder Ungleichungen.“ Nach einer langen geometrischen Einführungsphase hatten wir nämlich die Geometrie verlassen und einige Zeit den Themen *Gleichungen, Ungleichungen, zahlentheoretische Überlegungen, vollständige Induktion* gewidmet.

Für ein effizientes und sinnvolles *Problemlösen* sollten mindestens zwei Voraussetzungen erfüllt sein:

- (1) Die Schüler müssen dabei *selbst* aktiv sein! Es nützt wenig, wenn der Lehrer – in vielleicht sogar guter Absicht – den Schülern die Tätigkeit des Problemlösens nur vormacht und die Schüler nicht selbstständig Vermutungen aufstellen, Ideen einbringen, Irrwege beschreiten, argumentieren, probieren, diskutieren etc.
- (2) Die Schüler müssen dementsprechend Interesse, Engagement und Wissensdurst mitbringen, um eventuelle „Durststrecken“ durchzustehen, um hartnäckig zu bleiben in ihren Lösungsversuchen, nicht aufzugeben, sich nicht entmutigen zu lassen. Das „Selbst-es-wirklich-Wollen“ spielt eine große Rolle für die (zumindest größtenteils) selbstständige Lösung.

Durch Zwang lassen sich diese Voraussetzungen allerdings nur in seltenen Fällen schaffen. Weil aber ein gewisser Zwang doch integrativer Bestandteil des normalen Mathematikunterrichts – zumindest in Österreich und wir glauben auch in Deutschland – ist, so bleibt

ausgedehnteres Problemlösen wohl meist Kursen mit Freiwilligen (wie eben z. B. den erwähnten Vorbereitungskursen zur Mathematik-Olympiade) vorbehalten.

Das den folgenden Betrachtungen zugrunde liegende Problem haben wir Schülern eines 11. Jahrgangs gestellt – und zwar in einer „Supplierstunde“ (Freistunde). Für die Schüler geschah dies völlig unvorbereitet (sie machten mit ihrer Klassenlehrerin in Mathematik gerade etwas ganz anderes), aber der Großteil der Klasse war von dieser Aufgabe fasziniert und hat – völlig freiwillig, es war ja keine normale Unterrichtsstunde – die ganze Zeit an diesem Problem mit unterschiedlichem Erfolg gearbeitet.

Ein Vorteil des betrachteten Themenkreises ist, dass die Probleme keine isolierten Einzelaufgaben darstellen. Oft wird beim Problemlösen ja moniert, dass nach der Lösung die Sache erledigt sei, aber gerade nicht ganz so gute Schüler ein Üben an verwandten (nicht gleichen!) Problemen nötig hätten.

## 2 Das Problem und zwei mögliche Einstiegsaufgaben

Ausgangspunkt ist folgendes elementargeometrisches Problem, auf das der Autor von Herrn Dr. Richard MISCHAK aufmerksam gemacht wurde:

Auf einer ebenen Tischplatte liegen vier Kugeln, die alle einander berühren (gemeint ist: paarweise Berührung). Drei davon haben den Radius  $R$ . Welchen Radius hat die vierte Kugel?

Es ist dies eine sehr schöne und interessante Aufgabe<sup>1)</sup>, die in einem Olympiade-Kurs oder einfach mit Interessierten und Freiwilligen – sicher auch ohne vorherige anderweitige Überlegungen – gestellt werden kann. Interessierte Leser mögen hier die Lektüre unterbrechen und das Problem bearbeiten (Lösung:  $\frac{R}{3}$ ).

Da dieses Problem von vielen Schülern wahrscheinlich nicht spontan gelöst werden kann, sollten vorher zu obigem ähnliche – etwas einfachere, aber den Kern der Sache schon enthaltende – Probleme besprochen werden. Besonders für den normalen Klassenunterricht

