

Einfache Singularitäten und ADE-Klassifikation(en)

Giancarlo Castellano

17. Juli 2018

Wir haben gesehen: Ist $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ eine endliche Untergruppe, so ist der Bahnenraum $X = \mathbb{C}^2/\Gamma$ eine (Hyper-)Fläche im \mathbb{C}^3 , die von einer einzigen polynomialen Gleichung in drei Variablen beschrieben wird. Diese Varietät hat eine isolierte Singularität im Ursprung, die man mit lauter *point blowups* auflösen kann. Aufgrund der speziellen Eigenschaften dieser Auflösung kann man den Divisor durch einen Graphen, den sog. *Auflösungsgraphen* veranschaulichen, und dieser ist ein Dynkin-Diagramm mit lauter einfachen Kanten. (Solche Diagramme nennt man in der englischsprachigen Literatur *simply-laced*, wir werden sie aber *homogen* nennen, vgl. [S, S. 70].) Dank der Klassifikation der endlichen Coxetergraphen bzw. -gruppen wissen wir nun: Ein homogenes zusammenhängendes Dynkin-Diagramm gehört entweder zu einer der beiden (disjunkten) unendlichen Familien A_n (mit $n \geq 1$) bzw. D_n (mit $n \geq 4$) oder ist eines der drei "exzeptionellen" Diagramme E_6, E_7, E_8 . Demnach liegt die Frage auf der Hand:

1. Gibt es zu jedem homogenen Dynkin-Diagramm A_n, D_n oder E_n eine Singularität \mathbb{C}^2/Γ , deren Auflösungsgraph genau das gegebene Diagramm ist?

Es stellt sich heraus, dass die Antwort "ja" ist, d.h., wir bekommen zwei äquivalente Beschreibungen für ein und dieselbe Klasse von Singularitäten, die wir *ADE-Singularitäten* nennen werden. Dabei handelt es sich um spezielle isolierte Singularitäten von zweidimensionalen komplex-analytischen Varietäten (s. unten), es liegen also gleich zwei mögliche Verallgemeinerungen nahe:

2. Gibt es ein Analogon von ADE-Singularitäten in höheren Dimensionen? Gibt es für diese dann auch eine ADE-Klassifikation?
3. Gibt es ein algebraisch definiertes Analogon von ADE-Singularitäten, das über Grundkörpern $\neq \mathbb{C}$ Sinn ergibt?

Weitere Fragen drängen sich auf, wenn man die Rolle von Dynkin-Diagrammen in der Lie-Theorie bedenkt, zum Beispiel:

4. Kann man eine *ADE*-Singularität direkt aus der komplexen Lie-Gruppe desselben Typs konstruieren?

Aber Dynkin-Diagramme tauchen auch in der Theorie der algebraischen Gruppen auf, genauer stehen die einfachen, einfach zusammenhängenden algebraischen Gruppen über einem algebraisch abgeschlossenen¹ Körper k wieder in Bijektion zu den zusammenhängenden Dynkin-Diagrammen. Wenn die Antwort auf Frage 3 positiv sein sollte, könnte man sich also genauso gut fragen:

- 4'. Kann man eine *ADE*-Singularität über k direkt aus der algebraischen Gruppe über k desselben Typs konstruieren?

Schließlich könnten wir anhand der Klassifikation aller Dynkin-Diagramme folgende Frage stellen:

5. Was ist denn eigentlich mit den *inhomogenen* Dynkin-Diagrammen (also jenen vom Typ B_n , C_n , F_4 oder G_2)?

Im Rest dieser Arbeit präsentieren wir die (partiellen) Antworten auf diese Fragen, die wir in der Literatur gefunden haben.

Ad Frage 1:

Gibt es zu jedem homogenen Dynkin-Diagramm A_n , D_n oder E_n eine Singularität \mathbb{C}^2/Γ , deren Auflösungsgraph genau das gegebene Diagramm ist?

Wie in der Einführung angekündigt ist die Antwort “ja”: Es gibt eine natürliche Bijektion, die sog. *McKay-Korrespondenz*, zwischen den endlichen Untergruppen der $SL_2(\mathbb{C})$ (bis auf Konjugation) und den zusammenhängenden homogenen Dynkin-Diagrammen. Ursprünglich wurde die Korrespondenz rein algebraisch formuliert, aber es gibt auch eine geometrische Version.

Um die algebraische McKay-Korrespondenz zu erläutern, betrachte zunächst einmal folgende allgemeine Konstruktion für eine (endlich-dimensionale komplexe) Darstellung V einer endlichen Gruppe G . Bis auf Isomorphie hat G nur endlich viele irreduziblen (endlich-dimensionalen komplexen) Darstellungen, die wir mit V_0, V_1, \dots, V_n bezeichnen (hier ist V_0 die triviale Darstellung). Für jedes i können wir nun $V \otimes V_i$ betrachten; laut dem Satz von Maschke zerfällt diese Darstellung in eine direkte Summe von den V_j 's mit

¹Dieses Resultat ist [P-R, Theorem 2.7]; dort wird zusätzlich angenommen, dass k unendlichen Transzendenzgrad über seinem Primkörper hat.

gewissen Vielfachheiten a_{ij} . Der *McKay-Graph* von V ist der gerichtete Graph², der wie folgt definiert ist:

- Die Ecken v_0, v_1, \dots, v_n stehen in Bijektion zu den Darstellungen V_0, V_1, \dots, V_n .
- Es gibt genau dann einen Pfeil von v_i nach v_j , wenn $a_{ij} > 0$. In diesem Fall wird der Pfeil mit dem Gewicht a_{ij} versehen.

Nun stellt sich heraus: Ist $G = \Gamma$ eine endliche Untergruppe der $SL_2(\mathbb{C})$, und V die “kanonische” Darstellung von Γ (d.h., die Matrix $\gamma \in \Gamma \subset GL_2(\mathbb{C})$ operiert auf $v \in \mathbb{C}^2$ durch Multiplikation γv), so ist die Matrix (a_{ij}) symmetrisch, und $a_{ij} \leq 1$ für $i \neq j$, also können wir die gerichteten Pfeile (bzw. die Paare von gerichteten Pfeilen) durch einfache Kanten ersetzen und einen ungerichteten Graphen erhalten. McKay konnte zeigen, dass dieser Graph ein *affines Dynkin-Diagramm* von Typ A , D oder E ist, d.h., wenn man einen bestimmten Knoten³ (und die zu ihm inzidenten Kanten) streicht, so bekommt man ein homogenes Dynkin-Diagramm A_n , D_n oder E_n . Ist umgekehrt ein homogenes Dynkin-Diagramm gegeben mit Inzidenzmatrix (a_{ij}) , und setzt man⁴

$$c_{ij} = 2\delta_{ij} - a_{ij},$$

wobei δ_{ij} natürlich das Kronecker-Delta bezeichnet, so ist das entsprechende Γ isomorph zur Gruppe mit n Erzeugern g_1, \dots, g_n und den n Relationen

$$g_1^{c_{i1}} \cdots g_n^{c_{in}} = 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

s. [S, Appendix III].

Das Dynkin-Diagramm, das der Gruppe Γ unter der McKay-Korrespondenz entspricht, ist *genau der Auflösungsgraph der Singularität* \mathbb{C}^2/Γ . Deshalb ist es zu erwarten, dass es eine (geometrisch sinnvolle) Bijektion gibt zwischen den nichttrivialen irreduziblen Darstellungen von Γ und den irreduziblen Komponenten des exceptionellen Divisors der Auflösung von \mathbb{C}^2/Γ . Diese Bijektion, genannt *geometrische McKay-Korrespondenz*, geht auf Gonzalez-Springer und Verdier zurück; für eine kurze Erläuterung wird in [St, Appendix A] auf [H, S. 31f.] verwiesen.

Bemerkung 1. Wir werden unten sehen, dass es mehrere Charakterisierungen von

²Man nennt einen gerichteten Graphen gelegentlich auch einen *Köcher*, engl. *quiver*.

³Wenn man die Darstellungen geeignet nummeriert, kann man erreichen, dass dieser Knoten genau v_0 ist, also der Knoten, welcher der trivialen Darstellung entspricht.

⁴Die Matrix (c_{ij}) ist genau die *Cartan-Matrix* des Dynkin-Diagramms (man kann jedem Wurzelsystem eine Cartan-Matrix zuordnen; sie ist i.A. nicht symmetrisch).

ADE-Singularitäten gibt. Liegt eine *ADE*-Singularität vor, so könnte man u.U. die entsprechende endliche Gruppe $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ *direkt* ermitteln wollen, d.h. ohne den Auflösungsgraphen zu kennen bzw. kennen zu müssen. Das ist auch möglich, und zwar über die sog. lokale Fundamentalgruppe.

Sei $(X, 0)$ eine isolierte Singularität (vgl. den nächsten Abschnitt für die Terminologie und Notation). Die *lokale Fundamentalgruppe* von $(X, 0)$ ist “im Wesentlichen” die Fundamentalgruppe $\pi_1(X^*)$ des topologischen Raums $X^* = X \setminus \{0\}$, vgl. [Du, S. 140] für Details.

Es gilt nun: *Ist $(X, 0) \simeq (\mathbb{C}^2/\Gamma, 0)$ eine *ADE*-Singularität, so ist $\pi_1(X^*) \cong \Gamma$.* Denn allgemeiner gilt (vgl. [Di, Thm. 2.3.15], [Du, §5]; beide weisen auf [P] zurück): Sei $(X, 0)$ eine *quotient singularity* (von beliebiger Dimension), d.h., es gebe einen analytischen Isomorphismus zwischen dem Keim $(X, 0)$ und dem Keim $(\mathbb{C}^m/\Gamma', 0)$ für ein geeignetes $m \in \mathbb{N}$ und eine geeignete endliche Untergruppe $\Gamma' \subset \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$. Man kann erreichen, dass Γ' keine Spiegelungen enthält; in diesem Fall ist Γ' bis auf Konjugation in $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ eindeutig bestimmt und es gilt: $\pi_1(X \setminus X^{\mathrm{sing}}) \cong \Gamma'$. Speziell für unsere *ADE*-Singularität ist natürlich $m = 2$ und wir sehen, dass Γ selbst keine Spiegelung enthält (weil $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ und Spiegelungen haben Determinante -1), also sind Γ' und Γ konjugiert in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ und $\pi_1(X^*) = \pi_1(X \setminus \{0\}) = \pi_1(X \setminus X^{\mathrm{sing}}) \cong \Gamma$.

Ad Frage 2:

*Gibt es ein Analogon von *ADE*-Singularitäten in höheren Dimensionen? Gibt es für diese dann auch eine *ADE*-Klassifikation?*

Eine mögliche Verallgemeinerung von *ADE*-Singularitäten auf höhere Dimensionen (im komplex-analytischen Rahmen) sind sog. *einfache Singularitäten*. Für diese gibt es eine *ADE*-Klassifikation.

Zunächst einmal eine grundlegende Definition. Unter einer *isolierten Singularität* $(X, 0)$ verstehen wir im komplex-analytischen Rahmen Folgendes:

- $X \subseteq \mathbb{C}^{N+1}$ ist die Nullstellenmenge $f^{-1}(0)$ einer Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, wobei $U \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ eine Umgebung des Nullpunkts ist und $f(0) = 0$.
- Es existiert eine kleine Umgebung $U' \subseteq U$ von 0, sodass *kein Punkt* von $U' \setminus \{0\}$ ein kritischer Punkt von f ist. (Unter einem *kritischen Punkt* von f verstehen wir, wie in der Analysis, einen Punkt p mit $\frac{\partial f}{\partial z_1}(p) = \dots = \frac{\partial f}{\partial z_{N+1}}(p) = 0$.)

(Die Notation $(X, 0)$ weist darauf hin, dass wir eigentlich mit *Keimen* arbeiten wollen.)

Bemerkung 2. In der Definition einer isolierten Singularität $(X, 0)$ wird *keine Aussage* über den Punkt 0 selbst getroffen. Er könnte zwar ein kritischer Punkt sein von f , aber er könnte durchaus regulär sein!

Die Definition der einfachen Singularitäten (für beliebiges $N \geq 1$) basiert nun auf den Begriffen des (*universal*) *unfolding* und der *right equivalence*, siehe [E, §3.7] resp. [E, §3.9]. *Unfoldings* sind grob gesagt Deformationen (man fügt Parameter t_1, \dots, t_r hinzu, mit der Eigenschaft, dass man für $t_1 = \dots = t_r = 0$ die ursprüngliche Funktion zurückbekommt), und die einfachen Singularitäten sind genau diejenigen, die (bis auf *right equivalence*) nur auf endlich viele verschiedene Weisen deformiert werden können, vgl. [E, S. 158].

Mithilfe einer etwas mühsamen Fallunterscheidung ([E, Prop. 3.25, S. 165 bzw. Theorem 3.2, S. 170]) kann man einfache Singularitäten für beliebiges $N \geq 1$ klassifizieren: Man hat wieder zwei unendliche Familien und drei exzeptionelle Sonderfälle, und verwendet hierfür wieder die Bezeichnungen A_n, D_n sowie E_6, E_7, E_8 . Der Spezialfall $N = 2$ ist genau der, den wir in der Einleitung behandelt haben, wie man sofort erkennt, wenn man die definierenden Gleichungen in [E, ebenda] und [Du, Table 1] vergleicht.

Bemerkung 3. Man kann allgemeinen isolierten Singularitäten ein sog. *Coxeter-Dynkin-Diagramm* zuordnen; es handelt sich dabei einfach um die Veranschaulichung des sog. *Milnorgitters*, dessen Definition wir jetzt kurz skizzieren.

Sei $(X, 0)$ eine isolierte Singularität wie oben, $X = f^{-1}(0)$ für eine holomorphe Funktion (bzw. ihren Keim) $f : (\mathbb{C}^{N+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. Dann ist die *Milnor-Faser* \bar{X}_{η_0} der Singularität (s. [E, §5.4], vgl. das mit F_{z_0} bezeichnete Objekt aus [AGV, S. 31]) homotopieäquivalent zu der Einpunktvereinigung (engl. *wedge sum*) von endlich vielen N -Sphären, d.h., die N -te Homologie $H_N(\bar{X}_{\eta_0})$ ist eine freie abelsche Gruppe von endlichem Rang. Man kann Basen dieses \mathbb{Z} -Moduls mehr oder weniger explizit konstruieren: Jedes sog. *distinguished system of vanishing cycles*, s. [AGV, S. 35f.] sowie [E, Prop. 5.5, S. 242], ist eine Basis von $H_N(\bar{X}_{\eta_0})$.

Man hat auf dem Modul $H_N(\bar{X}_{\eta_0})$ eine \mathbb{Z} -Bilinearform, die sog. *intersection form*, man siehe z.B. [E, §4.6]. Die Homologiegruppe zusammen mit der *intersection form* heißt das *Milnorgitter* (engl. *Milnor lattice*) der Singularität.

Ein Gitter (also eine freie abelsche Gruppe L zusammen mit einer Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ mit Werten in \mathbb{Z}) kann man natürlich veranschaulichen, indem man eine fixe Basis wählt und sich wie folgt einen Graphen definiert: Die Ecken v_j stehen in Bijektion zu den Basiselementen Δ_j , und die Kante zwischen zwei Ecken v_i, v_j ist mit der ganzen Zahl

$\langle \Delta_i, \Delta_j \rangle$ gewichtet (falls das Gewicht negativ resp. 0 ist, wird die Kante strichliert resp. weggelassen). Der so entstandene Graph ist das *Coxeter-Dynkin-Diagramm* der Singularität.⁵

Bei unseren einfachen Singularitäten mit $N = 2$ ist die Milnor-Faser diffeomorph zur minimalen Auflösung ist, s. [R]. Folglich ist das Milnorgitter isomorph zum Wurzelgitter (engl. *root lattice*) vom Typ A_n , D_n oder E_n , je nachdem, welche Singularität vorliegt, und das Coxeter-Dynkin-Diagramm ist (bei Wahl einer geeigneten Basis) nichts anderes als der Auflösungsgraph, also das Dynkin-Diagramm desselben Typs.

Bemerkung 4. Die vorige Bemerkung besagt unter anderem: Ist $(X, 0)$ eine *ADE*-Singularität, so erfüllen *distinguished systems of vanishing cycles* der Homologiegruppe $H_N(\overline{X}_{\eta_0})$ die bekannten Axiome für Wurzelsysteme. Geht man von einer anderen Singularität aus, so erfüllen solche *distinguished systems* schwächere Bedingungen, die z.B. in [Sa] axiomatisiert werden.

Ad Frage 3:

Gibt es ein algebraisches Analogon von ADE-Singularitäten, das über Grundkörpern $\neq \mathbb{C}$ Sinn ergibt?

Um diese Frage zu beantworten, können wir uns auf die Vielfalt an bekannten Charakterisierungen von *ADE*-Singularitäten stützen, siehe etwa [Du]:

Theorem 1. *Sei X eine normale zwei-dimensionale analytische Varietät mit einer isolierten Singularität im Nullpunkt 0. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- (i) *Die Singularität ist rational, d.h., für jede Auflösung $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ der analytischen Varietät X verschwinden die higher direct images $R^q \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} = 0$ für $q > 1$.*
- (ii) *Die minimale Auflösung von X ist sehr gut (vgl. [Du] für die Definition) und der exzeptionelle Divisor besteht aus Kurven von Geschlecht 0 und Selbstschnitt -2 .*
- (iii) *Der Auflösungsgraph der minimalen Auflösung ist eines der homogenen Dynkin-Diagramme.*
- (iv) *$(X, 0) \simeq (\mathbb{C}^2/\Gamma, 0)$ für eine endliche Untergruppe $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.*

⁵Je nach Wert von N werden ggf. andere Konventionen gewählt, was das Strichlieren von Kanten angeht, s. z.B. [E, §5.5]. Diese passen mit den obigen Konventionen zusammen, sofern $N \equiv 2 \pmod{4}$; durch "Stabilisieren" kann man Letzteres bei jeder gegebenen isolierten Singularität erreichen, vgl. [AGV, §2.8].

(Die obigen Aussagen (i), (ii) bzw. (iv) entsprechen den Charakterisierungen A2, A3 bzw. A5' aus [Du].)

Weil Beschreibungen (i)-(iii) im Grunde auf dem Begriff der “Auflösung” basieren, den es offensichtlich auch im algebraischen Rahmen gibt, kann man sie mehr oder weniger wortwörtlich auf die algebraische Ebene übertragen und überprüfen, ob die Äquivalenz weiterhin stimmt. Tatsächlich gilt (s. [S, §6.1]):

Theorem 2. *Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, X das Spektrum einer zwei-dimensionalen normalen lokalen k -Algebra, und $x \in X$ ein abgeschlossener Punkt. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- (i) *(X, x) ist eine rationale Singularität mit Einbettungsdimension 3 bei x .*
- (ii) *(X, x) ist rational mit Vielfachheit 2 bei x .*
- (iii) *(X, x) hat Vielfachheit 2 bei x und kann durch sukzessive Punkt-Blowups aufgelöst werden.*
- (iv) *Der Auflösungsgraph der Singularität (X, x) ist ein homogenes Dynkin-Diagramm.*

Weiters: Ist die Charakteristik von k “gut” (vgl. [S, S. 38]) für das in (iv) erwähnte Dynkin-Diagramm, so ist (X, x) nach Henselisierung isomorph zum Quotienten \mathbb{A}_k^2/Γ für eine gewisse endliche Untergruppe $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(k)$.

Genauer: Ist (X, x) vom Typ A_n, D_n, E_6, E_7 , resp. E_8 , so ist Γ isomorph zur zyklischen Gruppe der Ordnung $n + 1$, zur *binary dihedral group* der Ordnung $4(n - 2)$, zur *binary tetrahedral group*, zur *binary octahedral group* resp. zur *binary icosahedral group*. In Charakteristik 0 sind das bis auf Konjugation die einzigen endlichen Untergruppen der $\mathrm{SL}_2(k)$.

Ad Fragen 4 und 4':

Kann man eine ADE-Singularität direkt aus der komplexen Lie-Gruppe (bzw., algebraischen Gruppe) desselben Typs konstruieren?

Ja, das geht! Eine genauere Aussage (vgl. Thm. 3 unten) in diese Richtung vermutete schon Grothendieck; Egbert Brieskorn [B] bewies sie für komplexe Lie-Gruppen, Hélène Esnault [Es] für komplexe algebraische Gruppen und Peter Slodowy [S] für algebraische Gruppen über allgemeinerem Grundkörper k .

Sei G eine einfache, einfach zusammenhängende algebraische Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k . Die unipotenten Elemente von G bilden eine Unter-

varietät $V \subset G$, die *unipotente Varietät*. Weiters nennt man ein Element $g \in G$ *regulär*, falls g ein glatter Punkt des *adjoint quotient* $G \rightarrow T/W$ ist, wobei T ein maximaler Torus in G ist und $W = N(T)/T$ die entsprechende Weyl-Gruppe bezeichnet.

Man kann zeigen: Reguläre Elemente sind genau jene, für die die k -Dimension des Zentralisators $Z_G(g)$ gleich dem Rang r der Gruppe G ist. (Der *Rang* von G ist die gemeinsame Dimension der maximalen Tori in G .) Außerdem folgt aus $\dim Z_G(g) > r$ bereits $\dim Z_G(g) \geq r + 2$. Ein Element $g \in G$ mit $\dim Z_G(g) = r + 2$ nennen wir *subregulär* (engl. *subregular*, fr. *sous-régulier*).

In einem gewissen Sinne sind subreguläre Elemente die, die zwar singulär sind, aber “am wenigsten schlimm” sind. Es klingt also vielleicht plausibel, dass sie mit den *ADE*-Singularitäten zusammenhängen, denn diese sind genau die “am wenigsten schlimme” Singularitäten. Das kann präzise erläutert werden, wenn man den Begriff der *transversalen Scheibe* zur Verfügung hat, s. [Es, S. 32], [S, §5.1]. Das Resultat (vgl. [Es, S. 33] und [S, S. 92]) lautet nun wie folgt:

Theorem 3. *Seien k, G, V wie oben, $g \in V$ (d.h., g unipotent), und sei die Charakteristik von k “gut für die Gruppe G ”. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- (i) g ist subregulär;
- (ii) Das Paar $(X, x) = (S \cap V, g)$, wobei S eine transversale Scheibe zur Bahn von g in G ist, erfüllt die Bedingungen von Thm. 2 oben.

Ist G vom Typ A_n, D_n oder E_n , so ist die Singularität $(S \cap V, g)$ von demselben Typ.

Bemerkung 5. Es gibt den Begriff einer *Dynkin-Kurve*. Tits and Steinberg konnten zeigen, dass ein unipotentes Element einer komplexen Lie-Gruppe G genau dann singulär ist, wenn seine Faser unter der *simultanen Auflösung* der Abbildung $G \rightarrow T/W$ (s. oben) eine Dynkin-Kurve ist, s. [B, S. 280] für eine detailliertere Erklärung.

Bemerkung 6. In [B] bewies Brieskorn (wieder im Setting von komplexen Lie-Gruppen) auch eine weitere Vermutung von Grothendieck, nämlich dass die Auflösung von $G \rightarrow T/W$ (s. vorige Bemerkung) durch die universelle Deformation der in Thm. 3 besprochenen Singularität $(S \cap V, g)$ faktorisiert, vgl. [B, S. 282]. In seinem Buch [S] entwickelte Slodowy auch eine rein algebraische Theorie von Deformationen und bewies ein Analogon dieser Aussage im Setting von algebraischen Gruppen, s. [S, S. 137].

Ad Frage 5:

Was ist denn eigentlich mit den inhomogenen Dynkin-Diagrammen (also jenen vom Typ

B_n, C_n, F_4 oder G_2)?

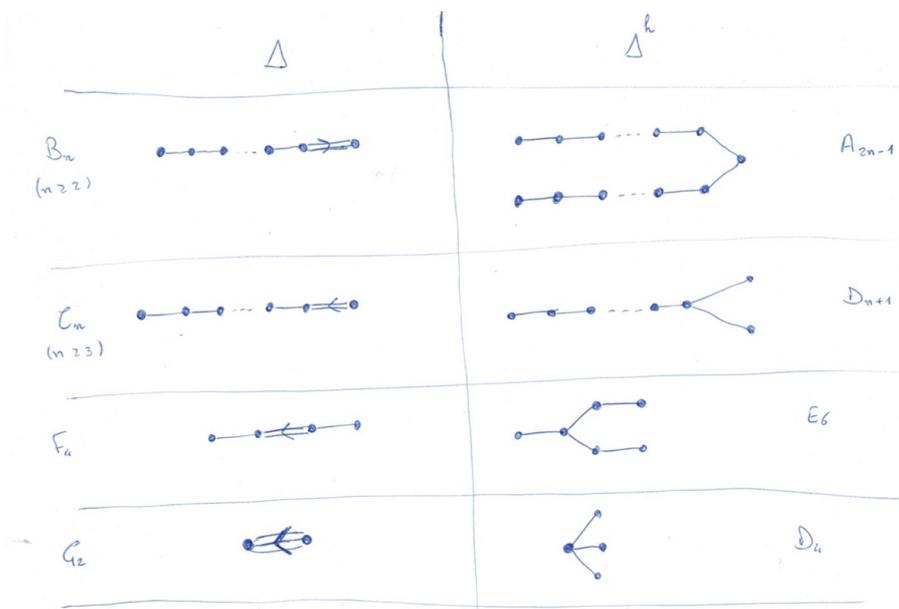
Die kurze Antwort ist: Diese Diagramme tauchen auch auf, d.h., viele der obigen Bijektionen zwischen ADE -Diagrammen und verschiedensten Klassen von Objekten kann man sinnvoll erweitern, damit es auch zu den inhomogenen Dynkin-Diagrammen jeweils ein Gegenstück gibt.

Erstens stellt sich heraus, dass die inhomogenen Dynkin-Diagramme auch als Auflösungsgraphen auftauchen können, und zwar dann, wenn der Grundkörper nicht algebraisch abgeschlossen ist. Darüber wird in [S, Appendix A] berichtet, die Originalquelle ist aber anscheinend [L].

Zweitens konnte Slodowy die McKay-Korrespondenz auf allgemeine Dynkin-Diagramme erweitern. Dabei entsprechen inhomogene Dynkin-Diagramme bestimmten *Paaren* von endlichen Untergruppen der SL_2 . Mithilfe dieser Korrespondenz, die mittlerweile als *Slodowy correspondence* bekannt ist, konnte er auch Singularitäten vom Typ B_n, C_n, F_4 bzw. G_2 definieren, s. [S, S. 76].

Drittens: Man wird vielleicht bemerkt haben, dass die in Thm. 3 behauptete Äquivalenz *nicht* voraussetzt, dass G vom Typ A_n, D_n oder E_n ist. Mit anderen Worten: Man sollte laut Thm. 3 selbst dann eine ADE -Singularität $(S \cap V, g)$ erhalten, wenn die Gruppe G selbst nicht vom Typ A_n, D_n oder E_n ist. Die Frage ist nun: Gegeben das (inhomogene) Dynkin-Diagramm Δ der Gruppe G , wie bestimmt man das entsprechende homogene Dynkin-Diagramm Δ^h der Singularität $(S \cap V, g)$?

Die Antwort ist überraschend elementar: Man erhält aus Δ das entsprechende homogene Diagramm Δ^h einfach, indem man die mehrfache Kante von Δ jeweils “auseinanderzieht”, wie die Tafel auf der folgenden Seite illustriert (vgl. [S, ebenda]).



Literatur

- [AGV] Vladimir I. Arnol'd, Sabir M. Gusein-Zade, Alexander N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps, Volume 2*, Birkhäuser (2012).
- [B] Egbert Brieskorn, Singular elements of semi-simple algebraic groups, *Actes, Congrès intern. Math.* (1970), Tome 2, SS. 279–284.
- [Di] Alexandru Dimca, *Singularities and Topology of Hypersurfaces*, Springer (1992).
- [Du] Alan Durfee, Fifteen characterizations of rational double points and simple critical points, *L'Enseignement Mathématique* **25** (1979), SS. 131–163.
- [E] Wolfgang Ebeling, *Functions of several complex variables and their singularities*, American Mathematical Society (2007).
- [Es] Hélène Esnault, Sur l'identification de singularités apparaissant dans des groupes algébriques complexes, *Publ. Math. de l'Université Paris VII*, **7** (1979), SS. 31–59.

(Online verfügbar unter <http://page.mi.fu-berlin.de/esnault/preprints/helene/01-identification.pdf>.)

- [H] J. van Hoboken, *Platonic solids, binary polyhedral groups, Kleinian singularities and Lie algebras of type A, D, E*. Masterarbeit, Universität Amsterdam (2002).
(Online verfügbar unter http://math.ucr.edu/home/baez/joris_van_hoboken_platonic.pdf.)
- [L] Joseph Lipman, Rational singularities, with applications to algebraic surfaces and unique factorization, *Publ. Math. I.H.E.S.* **36**, SS. 195–279 (1969).
- [P-R] Vladimir Platonov, Andrei Rapinchuk, *Algebraic Groups and Number Theory*, Academic Press, Inc. (1993).
- [P] David Prill, Local classification of quotients of complex manifolds by discontinuous groups, *Duke Math. J.* **34** (1967), SS. 375–386.
- [R] Miles Reid, *The Du Val singularities A_n, D_n, E_6, E_7, E_8* . Online verfügbar unter <https://homepages.warwick.ac.uk/~masda/surf/more/DuVal.pdf>.
- [Sa] Kyoji Saito, *Around the theory of the general weight system: relations with singularity theory, the generalized Weyl group and its invariant theory, etc.*, in *Selected papers on harmonic analysis, groups and invariants*, AMS Translations, Series 2, vol. 183 (1991).
- [S] Peter Slodowy, *Simple Singularities and Simple Algebraic Groups*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (1980).
- [St] Rafael Stekolshchik, *Notes on Coxeter Transformations and the McKay Correspondence*, Springer (2008).