

Beispiele zur Wellengleichung

Eine Saite der Länge $L = 1$ m und der Masse $m = 10^{-3}$ kg sei mit einer Spannung von $F = 10$ N an beiden Enden fest eingespannt. Unter idealisierten Bedingungen wird die Bewegung der Saite durch die 1D-Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

beschrieben, wobei $u = u(x, t)$ die Auslenkung der Saite am Ort x zur Zeit t angibt und $c = \sqrt{F/(m/L)}$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Störung ("Welle") darstellt. Bestimme mit dem expliziten Verfahren 2. Ordnung eine Näherungslösung von (1) für die folgenden Anfangs- und Randbedingungen und stelle die Ergebnisse graphisch dar.

1. Nach "links" laufender Wellenzug:

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & : x = 0 \\ e^{-100(x+ct-0.5)^2} & : 0 < x < 1 \\ 0 & : x = 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -200 c (x + ct - 0.5) e^{-100(x+ct-0.5)^2} \quad : \quad 0 < x < 1$$

Damit sind Anfangsauslenkung $f(x)$ und Anfangsgeschwindigkeit $g(x)$ gegeben durch $f(x) = u(x, 0)$ und $g(x) = u_t(x, 0)$.

2. Saite in Ruhe, Anfangsauslenkung vorgegeben:

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 0 & : x = 0 \\ e^{-100(x-0.5)^2} & : 0 < x < 1 \\ 0 & : x = 1 \end{cases}$$

$$u_t(x, 0) = g(x) = 0 \quad : \quad 0 < x < 1$$

3. Interferenz zweier entgegelaufender Wellenzüge:

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & : x = 0 \\ a e^{-100(x-0.75)^2} + b e^{-100(x-0.25)^2} & : 0 < x < 1 \\ 0 & : x = 1 \end{cases}$$

$$u_t(x, 0) = a \left\{ -200 c (x - 0.75) e^{-100(x-0.75)^2} \right\} + \\ b \left\{ +200 c (x - 0.25) e^{-100(x-0.25)^2} \right\} \quad : \quad 0 < x < 1$$

4. Implementiere die Randbedingung für ein *freies* Ende bei $x = 0$.

Anleitung: Die Vertikalkomponente der Kraft auf das linke Ende, $F_y = -F(0) \sin \alpha \approx -F(0) \tan \alpha = -F(0)(\partial u / \partial x)|_{x=0}$, wobei α der Winkel zwischen F und der x-Achse ist, verschwindet für ein freies Ende:

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \forall t \geq 0.$$