Konzept der Metrik in der ART

Ereigniskoordinaten: völlig beliebig!
Werden z.B. $\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$ genannt.

Flache Raumzeit-Metrik (Minkowski-Metrik, SRT):

$$\mathrm{ds}^2 = c^2\,\mathrm{dt}^2 - \mathrm{dx}^2 - \mathrm{dy}^2 - \mathrm{dz}^2$$

Allgemeine Raumzeit-Metrik:

$$\mathrm{ds}^2 = g_{00}(x)\left(\mathrm{dx}^0\right)^2 + 2\,g_{01}(x)\,\mathrm{dx}^0\,\mathrm{dx}^1 + g_{11}(x)\left(\mathrm{dx}^1\right)^2 + \ldots$$

Beispiel Schwarzschildmetrik:

(Karl Schwarzschild, 1916, auf der Suche nach der
von einem Massenpunkt erzeugten Raumzeit-Geometrie)

Die Koordinaten werden mit t, r, θ, φ bezeichnet.

$$\mathrm{ds}^2 = \left(1 - \frac{2\,G\,M}{c^2\,r}\right) c^2\,\mathrm{dt}^2 - \frac{1}{1-\frac{2\,G\,M}{c^2\,r}}\,\mathrm{dr}^2 - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right)$$

Was die Koordinaten bedeuten, ist nicht vorgegeben,
sondern muss durch eine Analyse der Metrik
herausgefunden werden!

Bedeutung der Koordinaten:

- Bedeutung von r: Der Flächeninhalt der Sphäre $r = R$ beträgt $4\pi R^2$. Der Umfang einer "Äquatorlinie" $r = R$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ beträgt $2\pi R$.
  Achtung: r ist *nicht* der "Radius" der Sphäre.
  Der Zusammenhang zwischen einer Änderung von r und einer Änderung der gemessenen (Eigen-)Länge $d\sigma$ in radialer Richtung ist gegeben durch $d\sigma^2 = \frac{1}{1-\frac{2GM}{c^2 r}} dr^2$, daher

  $$d\sigma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2GM}{c^2 r}}} dr.$$

  Für große r gilt:

  $$d\sigma \approx dr\left(1 + \frac{GM}{c^2 r}\right) = dr\left(1 - \frac{\phi_{\text{Newton}}}{c^2}\right).$$

  ("Maßstäbe schrumpfen in der Nähe einer Masse". Besser: Diskrepanz zwischen $d\sigma$ und du:

  $$\frac{du}{d\sigma} = \frac{2\pi\, dr}{dr\sqrt{1+\frac{GM}{c^2 r}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1+\frac{GM}{c^2 r}}} < 2\pi)$$

- Bedeutung von t: Beobachtung weit entfernter Uhren! ("Schwarzschildzeit")
  Zusammenhang zwischen t und der Eigenzeit τ einer Uhr bei konstantem r, θ und φ:

  $$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2, \text{ daher } d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}.$$

  Für große r gilt:

  $$d\tau \approx dt\left(1 - \frac{GM}{c^2 r}\right) = dt\left(1 + \frac{\phi_{\text{Newton}}}{c^2}\right).$$

(Uhren gehen umso “langsamer”, je tiefer sie in einem gravitativen Potentialtopf sitzen, “gravitative Zeitdilatation”)

- Bedeutung von θ und φ: Winkeln (Kugelkoordinaten)

Weiters gibt die Metrik Auskunft über:

- Bewegung von Photonen ($ds^2 = 0$, Kausalstruktur, Ereignishorizont bei $r = \frac{2GM}{c^2}$, “Schwarzschildradius”)

- Bewegung freier Probeteilchen (Weltlinien = zeitartige Geodäten, $\int d\tau$ = maximal)

- Für $r < \frac{2GM}{c^2}$ ist r eine Zeitkoordinate und t eine Raumkoordinate!

- Singularität bei $r = 0$. Falls für ein Probeteilchen $r < \frac{2GM}{c^2}$ ist, so ist der Sturz in die Singularität unvermeidlich! Aus dem “inneren Bereich” gibt es kein Entkommen!
  Die Singularität ist nicht ein “Ort”, sondern eher ein “Zeitpunkt”.

- Die Aufklärung der raumzeitlichen Geometrie der Schwarzschildmetrik dauerte Jahrzehnte! Der Hauptgrund dafür: Nahe $r = \frac{2GM}{c^2}$ sind die Koordinaten ungünstig (so als ob man für die Kilometermarkierungen entlang einer Autobahn

nicht die übliche Koordinate x, sondern $\frac{1}{x}$ verwenden würde)!
Ergebnis: Metrik eines Schwarzen Lochs! Modell der Raumzeit außerhalb eines radialsymmetrischen Objekts (statischer nichtrotierender Stern, radialsymmetrisch kollabierender nichtrotierender Stern).