LV069:LV-Uebersicht/WS15 16/Differenzieren rechnerisch, Ableitungsregeln (inkl. Kettenregel)

Aus Wiki der Fakultät für Physik Universität Wien

Inhaltsverzeichnis

Vorkurs Physikstudium/Mathematik-Teil

Differenzieren rechnerisch, Ableitungsregeln (inkl. Kettenregel)

Input 1

Ableitungen berechnen: Differenzenquotient, Ableitung ("Differentialquotient"):

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(siehe Flash-Animation Die Ableitung als Grenzwert (http://www.mathe-online.at/galerie/diff1/diff1.html#ablgrenz)). Potenzfunktionen. Beispiel: Berechnung der Ableitung von $f(x) = x^2$ an der Stelle $x = 2$.

Aufgaben

- Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{x^2}{2}$ an der Stelle $x = -2$!
- Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2$ allgemein (d.h. an einer beliebigen Stelle x)!
- Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = x^3$ allgemein (d.h. an einer beliebigen Stelle x)!

Input 2

Ableitungen von Potenzen: $(x^n)' = n\,x^{n-1}$ für $n \in \mathbb{R}$. Linearität der Ableitung: $(cf)' = c\,f'$ für $c = \mathrm{const}$ und $(f+g)' = f' + g'$. Ableitungen von Polynomen.

Aufgaben

- Berechnen Sie die Ableitungen:
  - $f(x) = -3x^2 - 2x + 7$
  - $g(x) = \frac{x^5}{5}$
  - $h(x) = 2\sqrt{x} + 3x^{3/2}$
  - $s(t) = -3t^2 - 2t + 7$
  - $\tau(\xi) = \frac{4\pi\xi^3 + 2\pi^2\xi^2 - 5\pi^4}{7}$
- Multiple-Choice-Test Polynome differenzieren (http://www.mathe-online.at/tests/diff1/poldiff.html)

Input 3

Ableitungen weiterer elementarer Funktionen:

- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\operatorname{asin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\operatorname{acos} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- $(\operatorname{atan} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Aufgaben

- Die Funktionen "Sinus hyperbolicus" und "Cosinus hyperbolicus" sind definiert durch

  $$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \text{ und } \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right).$$

  Berechnen Sie ihre Ableitungen und drücken Sie sie durch $\sinh$ und $\cosh$ aus!

Input 4

Produktregel: $(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$, Kettenregel: $(f(g(x)))' = f'(g(x))\,g'(x)$,
Quotientenregel: $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'\,g - f\,g'}{g^2}$.

Aufgaben

- Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:
  - $f(x) = x^2 \sin x$
  - $g(u) = \sin u \, \cos u$
  - Veriifizieren Sie die oben angegebene Form der Kettenregel für $f(x) = e^x$ und $g(x) = -x^2$!
  - $s(t) = A \sin(\omega t)$
  - $p(x) = \sin(x^2)$
  - $q(x) = \sin^2 x$
  - $\tau(\xi) = \dfrac{1}{\sin \xi}$
  - $\mu(\eta) = \dfrac{\eta^2}{\cos \eta}$

Input 5

Noch einmal zur Bedeutung der Ableitung, nützliche Anwendungen:

- Der Unterschied zwischen $\frac{df}{dx} = f'(x)$ und $\frac{\Delta f}{\Delta x} \approx f'(x)$.
- Die Näherung $f(x+h) \approx f(x) + h\, f'(x)$.

Aufgaben

- Eine Bewegung wird durch die Funktion $t \mapsto s(t)$ beschrieben.
  - Was bedeutet $\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$?
  - Was bedeutet $s'(t_0)$?
- Es gilt $1.001^2 = 1.002001$. Erklären Sie den 2er
  - mit Hilfe einer binomischen Formel!
  - mit Hilfe des Ableitungsbegriffs!
- Multiple-Choice-Test Zur Definition der Ableitung (http://www.mathe-online.at/tests/diff1/defabl.html)

Input 6

Nochmals höhere Ableitungen.

Aufgaben

- *Peer instruction*: Die zweite Ableitung von x^n ist gegeben durch
  - A: $n^2 x^{n-1}$
  - B: $n^2 x^{n-2}$
  - C: $n(n-1)x^{n-1}$
  - D: $n(n-1)x^{n-2}$
- *Peer instruction*: Welche der folgenden Funktionen erfüllt die Differentialgleichung $y''(x) = -y(x)$?
  - A: $y(x) = e^x$
  - B: $y(x) = e^{-x}$
  - C: $y(x) = -e^x$

- D: $y(x) = \sin x$

Weitere Aufgaben zum Üben

- Berechnen Sie die Ableitungen:
  - $f(x) = \dfrac{2x-3}{5-3x^2}$
  - $g(E) = 5E - \dfrac{5}{E} - \sqrt{E}$
  - $T(r) = 2r^2 + \dfrac{K}{r^2}$

  [Lösungen: $f'(x) = \dfrac{6x^2-18x+10}{(5-3x^2)^2}$, $g'(E) = 5 + \dfrac{5}{E^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{E}}$, $T'(r) = 4r - \dfrac{2K}{r^3}$]

- Eine Polynomfunktion 4. Grades hat den Extrempunkt $E(-2,0)$, und ihr Graph schneidet die x-Achse bei $x=-1$. Weiters verläuft er durch den Ursprung und hat dort die Steigung $k=-2$.
  Wie lautet die Funktionsgleichung?

  [Lösungen: Bedingungen: $f(-2)=0, f''(-2)=0$, $f(-1)=0$, $f(0)=0$, $f'(0)=-2$
  Funktionsgleichung: $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{2}x^3 - 4x^2 - 2x$]